

Ergänzungen und Bemerkungen zur Analysis-Vorlesung

Krzysztof P. Rybakowski
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik

2003–12–12

1 Vorbemerkungen

Auf den folgenden Seiten werden einige wichtige Definitionen und Resultate aus der Analysisvorlesung zusammengestellt, vor allem solche, die nicht, oder nicht in dieser Form, im Lehrbuch von Forster enthalten sind. Wir setzen Kenntnisse aus dem Miniskript über Grundbegriffe der Mengenlehre voraus.

Im Folgenden ist $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen, $\mathbb{Q}$ die Menge aller rationalen Zahlen, $\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen und $\mathbb{N}$ die Menge aller natürlichen Zahlen (wobei 0 zu $\mathbb{N}$ gehört).

Wir schreiben manchmal auch abkürzend ‘ $\forall \dots$ ’ statt ‘für alle $\dots$ ’ und ‘ $\exists \dots$ ’ statt ‘es existiert (mindestens) ein $\dots$ ’.

2 Funktionen und Folgen

Wenn P eine beliebige Eigenschaft ist, dann bezeichnen wir mit

$$\{x \mid P\}$$

diejenige Menge, die aus genau den Objekten x besteht, welche die Eigenschaft P haben.

Es gilt also:

$$x \in \{x \mid P\} \text{ genau dann, wenn } x \text{ die Eigenschaft } P \text{ besitzt.}$$

Beispielsweise sei P die Eigenschaft “ x war römischer Kaiser” so ist

$$\{x \mid x \text{ war römischer Kaiser}\}$$

eben die Menge aller römischen Kaiser.

Diese Notation wird auch in verschiedenen abgewandelten Formen benutzt, z.B. ist

$$\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 6\}$$

die Menge derjenigen reellen Zahlen, die größer gleich 6 sind.

Ist beispielsweise f eine Funktion von X nach Y und $A \subset X$ so lässt sich das Bild $f[A]$ von A unter f auch schreiben als

$$\{y \in Y \mid (\exists x \in A)f(x) = y\}.$$

Dies schreibt man auch kürzer als

$$\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Bemerkung 2.1. *Man muss an dieser Stelle etwas vorsichtig sein: nicht zu jeder Eigenschaft P existiert $\{x \mid P\}$. Als Beispiel möge die pathologische Eigenschaft $P := x \notin x$ dienen. Es wurde am Anfang der Vorlesung gezeigt, dass die Annahme der Existenz der Menge $\{x \mid x \notin x\}$ zu einem Widerspruch führt. Daher gibt es eine solche Menge nicht.*

Andererseits ist die Menge $\{x \mid P\}$, falls sie existiert, nach dem Mengeneindeutigkeitsaxiom eindeutig bestimmt (beweise dies ausführlich!).

In den hier betrachteten Fällen existiert $\{x \mid P\}$ stets!

Funktionen kann man in unterschiedlicher Weise definieren. Beispielsweise kann man die Funktion

$$f := \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

(welche eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist) auch als

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2,$$

oder auch als

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

schreiben. (Auch andere Varianten sind möglich.)

Seien X und Y beliebige Mengen und sei f eine Funktion von X nach Y . Man sieht leicht, dass die Relation

$$g := f \cap (A \times Y)$$

eine Funktion von A nach Y ist, weil klarerweise $g \subset A \times Y$ und zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in g$, nämlich $y = f(x)$. Mit anderen Worten, g ist diejenige Funktion von A nach Y , für die gilt:

$$g(x) = f(x) \text{ für alle } x \in A.$$

Statt g schreiben wir $f|A$ und nennen $f|A$ die *Einschränkung von f auf A* .

Im Folgenden sei

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

wobei $-\infty$ und $+\infty$ zwei feste verschiedene Objekte sind, die nicht zu $\mathbb{R}$ gehören. Wir schreiben häufig ∞ statt $+\infty$. Wir setzen die auf $\mathbb{R}$ definierte Ordnung $<$ wie folgt auf $\overline{\mathbb{R}}$ fort:

$$-\infty < +\infty, -\infty < x \text{ und } x < +\infty \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wie üblich schreiben wir dann, für alle x und $y \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$x \leq y \text{ für } (x = y \text{ oder } x < y),$$

$$x > y \text{ für } y < x$$

und

$$x \geq y \text{ für } y \leq x.$$

Für a und $b \in \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir folgende Mengen, die *Intervalle* genannt werden:

$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\},$$

$$]a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\},$$

$$[a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b\},$$

$$]a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b\}.$$

Sei X eine beliebige Menge. Eine beliebige Abbildung f von $\mathbb{N}$ nach X wird eine (*unendliche*) *Folge aus X* genannt. Statt $f(n)$ wird dann zum Beispiel x_n geschrieben und damit wird eine Folge auch mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet. Abkürzend kann man dafür auch $(x_n)_n$ schreiben und manchmal auch $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ etc.

Von der häufig benutzten Schreibweise $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oder $\{x_n\}_n$ wird abgeraten, weil sie mit dem *Bild* der Folge, also mit $f[\mathbb{N}]$, verwechselt werden kann.

Beispiel 2.2. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = x_n := (-1)^n$. Dies ist die Folge

$$(1, -1, 1, -1, \dots)$$

deren Bild die Menge $\{-1, 1\}$ ist. Eine völlig andere Folge wird durch $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(n) = x'_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ durch } 3 \text{ teilbar} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Dies ist die Folge

$$(1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, \dots),$$

deren Bild ebenfalls die Menge $\{-1, 1\}$ ist.

Aus dem gerade genannten Grunde soll man auch nicht etwa ‘ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ’ für ‘ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge aus X ’ schreiben, was allerdings in der Literatur häufig anzutreffen ist. Natürlich kann man statt ‘Folge aus X ’ auch ‘Folge in X ’ o.ä. sagen.

In Verallgemeinerung der obigen Definition werden als *Folgen aus X* auch Abbildungen f von der Menge $\mathbb{Z} \cap [\bar{n}, \infty[$ nach X , wobei $\bar{n} \in \mathbb{Z}$ beliebig ist, verstanden. Statt f schreiben wir dann häufig $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$. Beachte, dass $\mathbb{Z} \cap [\bar{n}, \infty[$ die Menge aller ganzen Zahlen n ist mit $n \geq \bar{n}$. Insbesondere gilt $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap [0, \infty[$.

Definition 2.3. Sei $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ eine beliebige Folge aus $\mathbb{R}$. Unter der (unendlichen) Reihe $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x_n$ verstehen wir die Folge $(s_k)_{k \geq \bar{n}}$ wobei $s_k := \sum_{n=\bar{n}}^k x_n$ für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq \bar{n}$. Für $k \geq \bar{n}$ heißt s_k die k -te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x_n$.

Aufgrund der Definition 2.3 gilt also

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x_n := \left(\sum_{n=\bar{n}}^k x_n \right)_{k \geq \bar{n}}. \quad (2.1)$$

Beispiel 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} n = (n(n+1)/2)_{n \geq 1}$.

Beispiel 2.5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $s_n = 1$ für n gerade und $s_n = 0$ für n ungerade.

Das Symbol $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x_n$ hat auch eine andere Bedeutung, welche im Abschnitt 3 diskutiert wird.

3 Folgen- und Reihenkonvergenz

Definition 3.1. (Folgenkonvergenz (in $\mathbb{R}$)) Sei $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ eine beliebige Folge aus $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ sei beliebig. $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ heißt (in $\mathbb{R}$) konvergent gegen a genau dann, wenn folgende Bedingung gilt:

$$(\forall \epsilon \in]0, \infty[) (\exists N \in \mathbb{Z} \cap [\bar{n}, \infty[) (\forall n \in \mathbb{Z} \cap [N, \infty[) |x_n - a| < \epsilon.$$

In Worten: zu jeder positiven reellen Zahl ϵ existiert eine ganze Zahl $N = N(\epsilon) \geq \bar{n}$ derart, dass für alle ganzen Zahlen n mit $n \geq N$ gilt: $|x_n - a| < \epsilon$.

Falls $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ (in $\mathbb{R}$) gegen a konvergiert, so ist a eindeutig bestimmt und wir schreiben $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder kurz $a = \lim x_n$. Andere Schreibweise: $x_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ oder kurz: $x_n \rightarrow a$. Wir nennen a den Grenzwert (oder Limes) von $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$.

Beispiel 3.2. Wir betrachten die Folge $(1/n)_{n \geq 1}$. Sei $\epsilon \in]0, \infty[$ beliebig. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es eine natürliche Zahl $N = N(\epsilon)$ mit $N > (1/\epsilon)$. Daraus folgt: $(1/N) < \epsilon$. Für alle ganzen Zahlen n mit $n \geq N$ gilt dann:

$$|(1/n) - 0| = (1/n) \leq (1/N) < \epsilon.$$

Es folgt also, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$.

Ein nützliches Konvergenzkriterium für Folgen ist in folgendem Satz enthalten, der sofort aus der Definition 3.1 folgt.

Satz 3.3. Sei $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ eine beliebige Folge aus $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ sei beliebig. Sei $n_1 \geq \bar{n}$ und sei $(c_n)_{n \geq n_1}$ eine beliebige Folge aus $\mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \text{ und } |x_n - a| \leq c_n \text{ für alle } n \geq n_1.$$

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Beispiel 3.4. Sei $x_n = (1000)^n/n!$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_{n+1} = x_n \cdot (1000/(n+1))$ für $n \in \mathbb{N}$. Daher ist diese Folge monoton wachsend solange $n+1 \leq 1000$. Es gilt: $x_{1001} = x_{1000} \cdot (1000/1001)$, $x_{1002} = x_{1001} \cdot (1000/1002) = x_{1000} \cdot (1000/1001)(1000/1002) \leq x_{1000} \cdot (1000/1001)^2$ und allgemein

$$0 \leq x_n \leq x_{1000} \cdot (1000/1001)^{-1000} \cdot (1000/1001)^n =: c_n \text{ für } n \geq 1000.$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ (wie in der Vorlesung bewiesen wurde), ergibt Satz 3.3, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Definition 3.5. (Cauchy-Folgen (aus $\mathbb{R}$)) Sei $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ eine beliebige Folge aus $\mathbb{R}$. $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ heißt eine Cauchy-Folge genau dann, wenn folgende Bedingung gilt:

$$(\forall \epsilon \in]0, \infty[) (\exists N \in \mathbb{Z} \cap [\bar{n}, \infty[) (\forall n, m \in \mathbb{Z} \cap [N, \infty[) |x_n - x_m| < \epsilon.$$

Es folgt alleine mit den Körper- und den Anordnungsaxiomen, dass jede (in $\mathbb{R}$) konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge ist.

Das Vollständigkeitsaxiom behauptet die Umkehrung: jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist gegen eine reelle Zahl konvergent.

Das Vollständigkeitsaxiom impliziert das folgende Cantorsche Intervallschachtelungsprinzip.

Satz 3.6. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen mit

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0. \quad (3.2)$$

Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$ so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x.$$

Beweis. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Sei dazu ϵ eine beliebige positive reelle Zahl. Aus (3.2) folgt, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so dass $b_N - a_N < \epsilon$. Für n und $m \geq N$ gilt dann wegen (3.1):

$$a_n \leq a_N \leq b_N \leq b_n \text{ und } a_N \leq a_m \leq b_m \leq b_N$$

also $a_n \in [a_N, b_N]$ und $a_m \in [a_N, b_N]$. Damit folgt $|a_n - a_m| \leq (b_N - a_N) < \epsilon$. Dies zeigt, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, und somit nach dem Vollständigkeitsaxiom gegen eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wegen (3.2) konvergiert auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x . $\square$

Für bestimmte Anwendungen benötigt man eine gewisse Verallgemeinerung der Definition 3.1 auf Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$.

Definition 3.7. Sei $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ eine beliebige Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und $a \in \mathbb{R}$ sei beliebig (beachte: x_n kann ‘unendliche’ Werte annehmen, a sei dagegen ‘endlich’). Die Folge $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ heißt in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent gegen a genau dann, wenn es eine ganze Zahl $n_1 \geq \bar{n}$ gibt, so dass $x_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \geq n_1$ und die Folge $(x_n)_{n \geq n_1}$ in $\mathbb{R}$ gegen a konvergiert. Wir schreiben dann, wie vorher, z.B. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Beispiel 3.8. Sei $x_n = -\infty$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 100$ und $x_n = (1/n)$ für $n > 100$. Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen 0.

Eine Folge in $\mathbb{R}$, die (in $\mathbb{R}$) nicht konvergent ist, heißt (in $\mathbb{R}$) *divergent*. Zum Beispiel ist $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent. Divergent in $\mathbb{R}$ sind aber auch die Folgen $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(-n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die letzteren beiden Folgen sind allerdings konvergent in $\overline{\mathbb{R}}$ (gegen ∞ bzw. $-\infty$) im Sinne der folgenden Definition:

Definition 3.9. Sei $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ eine beliebige Folge in $\overline{\mathbb{R}}$.

$(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ heißt in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent gegen $+\infty$ genau dann, wenn folgende Bedingung gilt:

$$(\forall K \in \mathbb{R}) (\exists N \in \mathbb{Z} \cap [\bar{n}, \infty]) (\forall n \in \mathbb{Z} \cap [N, \infty]) x_n > K.$$

In Worten: zu jeder reellen Zahl K existiert eine ganze Zahl $N = N(K) \geq \bar{n}$ derart, dass für alle ganzen Zahlen n mit $n \geq N$ gilt: $x_n > K$.

Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ oder auch $x_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

$(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ heißt in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent gegen $-\infty$ genau dann, wenn folgende Bedingung gilt:

$$(\forall K \in \mathbb{R}) (\exists N \in \mathbb{Z} \cap [\bar{n}, \infty]) (\forall n \in \mathbb{Z} \cap [N, \infty]) x_n < K.$$

In Worten: zu jeder reellen Zahl K existiert eine ganze Zahl $N = N(K) \geq \bar{n}$ derart, dass für alle ganzen Zahlen n mit $n \geq N$ gilt: $x_n < K$.

Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ oder auch $x_n \rightarrow -\infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Beispiel 3.10. Das Archimedische Axiom zeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty.$$

Beispiel 3.11. Sei $x_n := n$ für $n \in \mathbb{N}$, n gerade, und $x_n := \infty$ für $n \in \mathbb{N}$, n ungerade. Dann folgt sofort, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Bemerkung 3.12. Folgen aus $\mathbb{R}$, welche in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) konvergieren, heißen auch bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$).

Man kann die Definitionen 3.1, 3.7 und 3.9 auch etwas anders formulieren, indem man zuerst den folgenden Begriff einführt:

Definition 3.13. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Eine Menge U heißt eine spezielle Umgebung von a genau dann, wenn ein $\epsilon \in]0, \infty[$ existiert derart, dass $U =]a - \epsilon, a + \epsilon[$.

Eine Menge U heißt eine spezielle Umgebung von $+\infty$ genau dann, wenn ein $K \in \mathbb{R}$ existiert derart, dass $U =]K, \infty[$.

Eine Menge U heißt eine spezielle Umgebung von $-\infty$ genau dann, wenn ein $K \in \mathbb{R}$ existiert derart, dass $U =]-\infty, K[$.

Es gilt dann der folgende Satz, der sofort aus den Definitionen 3.1, 3.7 und 3.9 folgt:

Satz 3.14. 1. Eine Folge $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert (in $\mathbb{R}$) gegen ein $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn zu jeder speziellen Umgebung U von a eine ganze Zahl N mit $N \geq \bar{n}$ existiert derart, dass für alle ganzen Zahlen n mit $n \geq \bar{n}$ gilt: $x_n \in U$.

2. Eine Folge $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert (in $\overline{\mathbb{R}}$) gegen ein $a \in \overline{\mathbb{R}}$ genau dann, wenn zu jeder speziellen Umgebung U von a eine ganze Zahl N mit $N \geq \bar{n}$ existiert derart, dass für alle ganzen Zahlen n mit $n \geq \bar{n}$ gilt: $x_n \in U$.

Bemerkung 3.15. Eine Menge U heißt eine Umgebung von $a \in \overline{\mathbb{R}}$ genau dann, wenn eine spezielle Umgebung V von a existiert derart, dass $V \subset U$. Der Satz 3.14 bleibt gültig (mit dem gleichen Beweis), wenn wir das Wort ‘speziellen’ streichen.

Wir wollen nun den Begriff der Reihenkonvergenz definieren, indem wir ihn auf den Begriff der Folgenkonvergenz zurückführen.

Definition 3.16. Sei $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$.

Falls die unendliche Reihe $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x_n = \left(\sum_{n=\bar{n}}^k x_n \right)_{k \geq \bar{n}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert und $s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=\bar{n}}^k x_n$ dann sagen wir, dass $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x_n$ konvergiert und nennen s die Summe der unendlichen Reihe $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x_n$. Wir schreiben dann ebenfalls

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x_n = s.$$

Falls die unendliche Reihe $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x_n = \left(\sum_{n=\bar{n}}^k x_n \right)_{k \geq \bar{n}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert und $s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=\bar{n}}^k x_n$ dann nennen wir s wiederum die Summe der unendlichen Reihe $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x_n$ und schreiben wiederum

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x_n = s.$$

Das Symbol $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x_n$ bezeichnet also sowohl die Folge $\left(\sum_{n=\bar{n}}^k x_n\right)_{k \geq \bar{n}}$ als auch ihren Limes (in $\mathbb{R}$ oder $\overline{\mathbb{R}}$) falls dieser Limes existiert.

4 Suprema, Infima

Definition 4.1. Sei D eine beliebige Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ und $a \in \overline{\mathbb{R}}$ sei beliebig.

- a heißt ein größtes (bzw. kleinstes) Element von D genau dann, wenn $a \in D$ und $a \geq x$ (bzw. $a \leq x$) für alle $x \in D$.
- a heißt eine obere (bzw. untere) Schranke von D genau dann, wenn $a \geq x$ (bzw. $a \leq x$) für alle $x \in D$. Die Menge der oberen (bzw. der unteren) Schranken von D wird mit $OS(D)$ (bzw. $US(D)$) bezeichnet.
- a heißt ein Supremum (bzw. Infimum) von D genau dann, wenn a ein kleinstes (bzw. ein größtes) Element von $OS(D)$ (bzw. von $US(D)$) ist, d.h. genau dann, wenn a eine kleinste obere Schranke (bzw. eine größte untere Schranke) von D ist.

Satz 4.2. Zwei kleinste (bzw. zwei größte) Elemente einer Menge sind gleich.

Beweis. Falls a und a' beide kleinste Elemente von D sind, dann gilt $a \in D$, $a' \in D$, $a \leq x$ und $a' \leq x$ für alle $x \in D$. Damit gilt insbesondere $a \leq a'$ und $a' \leq a$. Daraus folgt $a = a'$.

Der Beweis für größte Elemente ist analog. □

Aufgrund des Satzes 4.2 reden wir von dem kleinsten (bzw. dem größten) Element von D , falls ein solches Element existiert. Das kleinste (bzw. das größte) Element einer Menge D (falls es existiert) heißt auch das *Minimum von D* (bzw. das *Maximum von D*) und wird mit $\min(D)$ (bzw. $\max(D)$) bezeichnet.

Analog reden wir von dem Infimum $\inf(D)$ (bzw. dem Supremum $\sup(D)$) von D . Das kleinste (bzw. größte) Element von D , falls es existiert, ist zugleich das Infimum (bzw. das Supremum) von D .

Beispiel 4.3. Sei $D = [0, 1[$. 0 ist das kleinste Element von D . D hat kein größtes Element. Da $OS(D) = [1, \infty]$ folgt, dass $\sup(D) = 1$.

Beispiel 4.4. Sei $D =]0, 1]$. 1 ist das größte Element von D . D hat kein kleinstes Element. Da $US(D) = [-\infty, 0]$ folgt, dass $\inf(D) = 0$.

Beispiel 4.5. Sei $D = [-\infty, \infty[$. $-\infty$ ist das kleinste Element von D . D hat kein größtes Element und $\sup(D) = \infty$.

Beispiel 4.6. Sei $D =]-\infty, \infty]$. ∞ ist das größte Element von D . D hat kein kleinstes Element und $\inf(D) = -\infty$.

Definition 4.7. Eine Teilmenge D von $\overline{\mathbb{R}}$ heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt genau dann, wenn eine obere (bzw. untere) Schranke K von D existiert mit $K \in \mathbb{R}$.

Satz 4.8. 1. Zu jeder Teilmenge D von $\overline{\mathbb{R}}$ existiert $\inf(D)$ und $\sup(D)$.

2. Falls $D \neq \emptyset$, so gilt $\inf(D) \leq \sup(D)$.

3. $\inf(\emptyset) = +\infty$ und $\sup(\emptyset) = -\infty$.

4. Falls D_1 und D_2 beliebige Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ mit $D_1 \subset D_2$ sind, so gilt $\sup(D_1) \leq \sup(D_2)$, jedoch $\inf(D_1) \geq \inf(D_2)$.

Beweis. Jedes Element von $\overline{\mathbb{R}}$ ist sowohl eine obere als auch eine untere Schranke der leeren Menge (wieso?). Daher gilt

$$\text{OS}(\emptyset) = \overline{\mathbb{R}} = \text{US}(\emptyset).$$

Daraus folgt, dass $\sup(\emptyset) = -\infty$ und $\inf(\emptyset) = +\infty$. Sei nun $D \neq \emptyset$. Wir zeigen, dass $\sup(D) \in \overline{\mathbb{R}}$ existiert. Wir nehmen zunächst an, dass D nicht nach oben beschränkt ist. Dann folgt leicht, dass $\text{OS}(D) = \{+\infty\}$ und somit $\sup(D) = +\infty$. Daher brauchen wir nur noch den Fall zu betrachten, dass D nach oben beschränkt ist. Sei also $K_0 \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von D . Falls $D = \{-\infty\}$, dann gilt $\sup(D) = -\infty$. Wir können also annehmen, dass D ein Element x_0 enthält mit $x_0 > -\infty$. Da $x_0 \leq K_0 < \infty$, gilt $x_0 \in \mathbb{R}$. Daher ist die kleinste obere Schranke von $D \cap \mathbb{R}$, falls sie existiert, zugleich die kleinste obere Schranke von D . Wenn wir also zeigen, dass $\sup(D \cap \mathbb{R})$ existiert, dann existiert auch $\sup(D)$ und $\sup(D) = \sup(D \cap \mathbb{R})$. Nun ist aber $D \cap \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Nach Satz 3 auf Seite 83 im Forster existiert das Supremum von $D \cap \mathbb{R}$. Damit existiert $\sup(D)$ tatsächlich. Wir haben also die Existenz von $\sup(D) \in \overline{\mathbb{R}}$ für beliebige Teilmengen D von $\overline{\mathbb{R}}$ bewiesen. Der Beweis der Existenz von $\inf(D)$ ist analog. Sei nun D nichtleer. Dann existiert ein $x_0 \in D$. Da $\inf(D)$ eine untere und $\sup(D)$ eine obere Schranke von D ist, gilt

$$\inf(D) \leq x_0 \leq \sup(D).$$

Seien nun D_1 und D_2 beliebige Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ mit $D_1 \subset D_2$. Für jedes $x \in D_1$ gilt dann auch $x \in D_2$ und somit

$$\inf(D_2) \leq x \leq \sup(D_2).$$

Damit ist $\inf(D_2)$ eine untere Schranke von D_1 und deshalb gilt $\inf(D_1) \geq \inf(D_2)$, da $\inf(D_1)$ die größte untere Schranke von D_1 ist. Analog folgt, dass $\sup(D_2)$ eine obere Schranke von D_1 ist und somit $\sup(D_1) \leq \sup(D_2)$, weil $\sup(D_1)$ die kleinste obere Schranke von D_1 ist. $\square$

Satz 4.9. Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ nichtleer. Dann existiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(D)$.

Es existiert auch eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \in \mathbb{N}} b_n = \inf(D)$.

Beweis. Falls $\sup(D) = -\infty$, dann ist entweder $D = \emptyset$ oder $D = \{-\infty\}$. Nach Voraussetzung gilt also $D = \{-\infty\}$ und die Folge $a_n := -\infty$, $n \in \mathbb{N}$, leistet das Gewünschte.

Falls $\sup(D) \in \mathbb{R}$ so ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $\sup(D) - (1/2^n)$ keine obere Schranke von D also gibt es ein $a_n \in D$ mit $\sup(D) - (1/2^n) \leq a_n \leq \sup(D)$. Für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt dann $|a_n - \sup(D)| \leq (1/2^n)$ also folgt aus Satz 3.3, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(D)$.

Falls $\sup(D) = \infty$, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass n keine obere Schranke von D ist, also gibt es ein $a_n \in D$ mit $a_n > n$. Daraus folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty = \sup(D)$.

Der Beweis für die Existenz von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verläuft analog. $\square$

Satz 4.10. *Sei $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ eine monoton wachsende (bzw. monoton fallende) Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent und*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \geq \bar{n}\}$$

(bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \geq \bar{n}\}$.)

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend. Sei $a := \sup\{x_n \mid n \geq \bar{n}\}$.

Falls $a = -\infty$, dann folgt $x_n = -\infty$ für alle $n \geq \bar{n}$. In diesem Fall gilt natürlich die Behauptung.

Falls $a \in \mathbb{R}$, dann ist für jedes $\epsilon > 0$ die Zahl $a - \epsilon$ keine obere Schranke der Menge $\{x_n \mid n \geq \bar{n}\}$ und somit gibt es ein $N \in \mathbb{Z}$ mit $N \geq \bar{n}$ und $x_N > a - \epsilon$. Für $n \geq N$ folgt dann: $a - \epsilon < x_N \leq x_n \leq a$ also $|x_n - a| < \epsilon$. Es folgt in diesem Fall, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Falls $a = \infty$, dann gilt für jedes $K \in \mathbb{R}$, dass K keine obere Schranke von $\{x_n \mid n \geq \bar{n}\}$ ist also gibt es ein $N \in \mathbb{Z}$ mit $N \geq \bar{n}$ und $x_N > K$. Für $n \geq N$ folgt dann: $x_n \geq x_N > K$. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Es folgt also auch in diesem Fall, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Der Beweis für monoton fallende Folgen verläuft analog. $\square$

5 Grenzwerte bei Funktionen

Definition 5.1. *Sei D eine beliebige Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ und sei f eine beliebige Funktion von D nach $\overline{\mathbb{R}}$. Seien a und $b \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig. Wir sagen, dass*

$$f(x) \rightarrow b \text{ für } x \rightarrow a$$

(zu lesen als: $f(x)$ geht gegen b , wenn x gegen a geht) genau dann, wenn folgende Bedingung gilt:

(für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$) (wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$).

Beispiel 5.2. Seien $D = \mathbb{R}$ und $f(x) = x^2$ für $x \in D$. Es gilt für alle $a \in \mathbb{R}$ und jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^2 = a^2.$$

Also gilt: $f(x) \rightarrow b := a^2$ für $x \rightarrow a$.

Analog gilt: $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ und $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$ (beweise dies ausführlich!).

Beispiel 5.3. (Wir benutzen hier elementare Schulkenntnisse über die Sinusfunktion.) Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(x) = \sin(1/x)$ für $x \in D$. Sei $a = 0$. Wir behaupten, dass es kein $b \in \overline{\mathbb{R}}$ gibt derart, dass $f(x) \rightarrow b$ für $x \rightarrow a$. In der Tat wähle $x_n := 1/(\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f(x_n) = \sin(\pi + 2\pi n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt also $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$. Andererseits, falls wir $x'_n := 1/((\pi/2) + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$, setzen, dann gilt $f(x'_n) = \sin((\pi/2) + 2\pi n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ also $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = 1$.

Beispiel 5.4. Sei $D := [0, \infty[$ und $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \in D$. Sei $a = -5$. Da es überhaupt keine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus D gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, gilt die Bedingung in Definition 5.1 trivialerweise, und zwar für jedes $b \in \overline{\mathbb{R}}$. In diesem Fall gilt also: $f(x) \rightarrow b$ für $x \rightarrow a = -5$. Daher ist der ‘Grenzwert’ b nicht eindeutig bestimmt.

Die Nichteindeutigkeit im Beispiel 5.4 hängt mit folgendem Begriff zusammen:

Definition 5.5. Sei D eine beliebige Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ und sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig. a heißt ein Berührungspunkt von D genau dann, wenn es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus D gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Beispiel 5.6. Falls $a \in D$, so ist a trivialerweise ein Berührungspunkt von D (mit $x_n := a$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

Beispiel 5.7. $a := \infty$ ist ein Berührungspunkt von $[\alpha, \infty[$ (für beliebiges $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$): wähle z.B. $x_n := \alpha + n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Analog gilt: $a := -\infty$ ist ein Berührungspunkt von $] -\infty, \beta]$ (für beliebiges $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$).

Beispiel 5.8. $a := 0$ ist ein Berührungspunkt von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: wähle dazu z.B. $x_n := 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 5.9. $a := -5$ ist kein Berührungspunkt von $[0, \infty[$.

Es gelten folgende, leicht zu beweisende Aussagen:

Satz 5.10. Seien $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und $a \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig und sei f eine beliebige Funktion von D nach $\overline{\mathbb{R}}$. Falls a kein Berührungspunkt von D ist, so gilt für jedes $b \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$f(x) \rightarrow b \text{ für } x \rightarrow a.$$

Beweis. Falls der Satz falsch ist, so existiert ein $b \in \overline{\mathbb{R}}$ und nach Definition 5.1 existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht gegen b konvergent. Insbesondere folgt, dass a ein Berührungspunkt von D ist, Widerspruch! $\square$

Satz 5.11. Seien $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und $a, b, b' \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig und sei f eine beliebige Funktion von D nach $\overline{\mathbb{R}}$. Falls a ein Berührungspunkt von D ist und falls sowohl

$$f(x) \rightarrow b \text{ für } x \rightarrow a$$

als auch

$$f(x) \rightarrow b' \text{ für } x \rightarrow a,$$

dann gilt $b = b'$.

Beweis. Nach unserer Voraussetzung existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Daher folgt nach Definition 5.1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b'.$$

Da Folngengrenzwerte eindeutig bestimmt sind, folgt $b = b'$. $\square$

Falls also a ein Berührungspunkt von D ist und $f(x) \rightarrow b$ für $x \rightarrow a$, so ist b eindeutig bestimmt und wir schreiben $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Da eine Folge $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ in einer Menge X nichts anderes als die Funktion f von $D = \mathbb{Z} \cap [\bar{n}, \infty[$ nach X mit $f(n) = x_n$ für alle $n \geq \bar{n}$ ist, wird aufmerksamen Leserinnen nicht entgangen sein, dass wir für Folgen $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ zwei verschiedene Definitionen der Konvergenz gegen einen Punkt $b \in \overline{\mathbb{R}}$ haben, nämlich die Definitionen 3.7 und 3.9 auf der einen Seite und die Definition 5.1 mit $a := \infty$.

Es zeigt sich allerdings, dass die genannten Definitionen im betrachteten Fall äquivalent sind:

Satz 5.12. Sei $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und f die zugehörige Abbildung von $D = \mathbb{Z} \cap [\bar{n}, \infty[$ nach $\overline{\mathbb{R}}$ (d.h. $f(n) := x_n$ für alle $n \geq \bar{n}$). Dann gilt für $a := \infty$ und für beliebiges $b \in \overline{\mathbb{R}}$:

1. a ist ein Berührungspunkt von D .

2. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) $f(n) \rightarrow b$ für $n \rightarrow a$ (im Sinne der Definition 5.1);
- (b) die Folge $(x_n)_{n \geq \bar{n}}$ konvergiert in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen b im Sinne der Definitionen 3.7 bzw. 3.9.

Beweisskizze. Sei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus D derart, dass $n_k = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \bar{n}$. Dann konvergiert $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen ∞ . Daraus folgt (1). Mithilfe der eben definierten Folge zeigt man auch sofort, dass Aussage (2a) die Aussage (2b)

impliziert. Es gelte nun die Aussage (2b). Um Aussage (2a) zu beweisen, wählen wir eine beliebige Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus D , die gegen $a = \infty$ konvergiert. Dies impliziert, dass zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $\bar{k} \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass $n_k \geq N$ für alle $k \geq \bar{k}$. Dies zeigt zusammen mit Definitionen 3.7 bzw. 3.9 und mit der Aussage (2b) dass die Folge $(f(n_k))_{k \in \mathbb{N}} = (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen b konvergiert. Damit ist Aussage (2a) bewiesen. $\square$

Übung: beweise Satz 5.12 in allen Einzelheiten.

Der folgende Satz zeigt, dass man Grenzwerte von Funktionen auch mithilfe des Umgebungsbegriffs und ohne Zuhilfenahme von Folgen definieren kann.

Satz 5.13. *Seien $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig und sei f eine beliebige Funktion von D nach $\overline{\mathbb{R}}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $f(x) \rightarrow b$ für $x \rightarrow a$;
2. für jede spezielle Umgebung V von b existiert eine spezielle Umgebung U von a derart, dass $f[U \cap D] \subset V$.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$.

Angenommen, es gelte 1. Wenn 2 nicht gilt, dann existiert eine spezielle Umgebung $V = V_0$ von b so dass $f[U \cap D] \not\subset V_0$ für jede spezielle Umgebung U von a . Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wähle

- im Falle $a \in \mathbb{R}$: $U_n :=]a - (1/2^n), a + (1/2^n)[$;
- im Falle $a = +\infty$: $U_n :=]n, \infty[$;
- im Falle $a = -\infty$: $U_n := [-\infty, -n[$.

Da in jedem Falle $f[U_n \cap D] \not\subset V_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so dass

$$x_n \in U_n \cap D \text{ und } f(x_n) \notin V_0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

Unsere Wahl der Mengen U_n , $n \in \mathbb{N}$, zeigt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Aus 1 folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$, so dass, insbesondere, ein $N \geq \bar{n}$ existiert derart, dass $f(x_n) \in V_0$ für alle $n \geq N$, in Widerspruch zu (5.1). Wir haben damit bewiesen, dass $1 \Rightarrow 2$.

$2 \Rightarrow 1$.

Nun nehmen wir 2 an und wollen 1 beweisen. Sei dazu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Wir brauchen bloß zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. Zu diesem Zweck sei V eine beliebige spezielle Umgebung von b . Nach 2 existiert eine spezielle Umgebung U von a mit

$$f[U \cap D] \subset V. \quad (5.2)$$

Also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $x_n \in U$ für $n \geq N$. Aus (5.2) folgt, dass $f(x_n) \in V$ für $n \geq N$. Dies beweist, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. $\square$

Bemerkung 5.14. Der Satz 5.13 bleibt gültig (mit dem gleichen Beweis), wenn wir das Wort ‘spezielle’ an einer oder an beiden Stellen der Aussage des Satzes streichen.

Definition 5.15. Seien $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und $a \in D$ beliebig. Sei f eine beliebige Funktion von D nach $\mathbb{R}$.

f heißt im Punkt a stetig genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

f heißt stetig (auf D) genau dann, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Ohne Beweis notieren wir die folgenden Eigenschaften stetiger Funktionen:

Satz 5.16. Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ ein beliebiges Intervall und sei f eine stetige Funktion von D nach $\mathbb{R}$. Dann ist $D' := f[D]$ ebenfalls ein Intervall.

Bemerkung 5.17. Satz 5.16 besagt, dass für alle $x_1, x_2 \in D$ und jedes y , das zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ liegt, ein $x \in D$ existiert mit $y = f(x)$. Satz 5.16 wird daher auch der Zwischenwertsatz genannt.

Das Intervall D' in Satz 5.16 kann möglicherweise degeneriert sein, d.h. aus nur einem Punkt bestehen. Dies ist der Fall, wenn f eine konstante Funktion ist.

Satz 5.18. Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ ein beliebiges Intervall und sei f eine injektive stetige Funktion von D nach $\mathbb{R}$. Dann ist f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Außerdem ist die inverse Funktion $f^{-1}: f[D] \rightarrow D$ ebenfalls stetig.

Zum Schluss geben wir noch die Definition der Ableitung und des Riemann-Integrals an. Diese Definitionen werden in der Vorlesung eingehend erläutert.

Definition 5.19. Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$ beliebig und sei f eine beliebige Funktion von D nach $\mathbb{R}$.

f heißt im Punkt a differenzierbar genau dann, wenn a ein Berührungspunkt von $D \setminus \{a\}$ ist und ein $b \in \mathbb{R}$ existiert derart, dass

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b,$$

wobei $g: D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in D \setminus \{a\}$$

definiert ist. Die Zahl b ist dann eindeutig bestimmt und wir nennen b die Ableitung von f im Punkt a und schreiben $f'(x) := b$.

Definition 5.20. Seien a und $b \in \mathbb{R}$ beliebig mit $a \leq b$. Eine endliche Folge $(x_k)_{k=0}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $x_0 = a$, $x_n = b$ und $x_{k-1} \leq x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$, heißt eine Zerlegung von $[a, b]$. Die Zahl

$$\lambda = \lambda((x_k)_{k=0}^n) := \max\{x_k - x_{k-1} \mid 1 \leq k \leq n\}$$

heißt die Feinheit von $(x_k)_{k=0}^n$.

Eine beliebige Folge $(\xi_k)_{k=1}^n$ mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ heißt eine Stützstellenfolge von $(x_k)_{k=0}^n$.

Ein geordnetes Paar $((x_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n)$, wobei $(x_k)_{k=0}^n$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $(\xi_k)_{k=1}^n$ eine Stützstellenfolge von $(x_k)_{k=0}^n$ ist, heißt eine markierte Zerlegung von $[a, b]$. Die Feinheit von $(x_k)_{k=0}^n$ heißt dann auch die Feinheit von $((x_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n)$.

Sei f eine beliebige Funktion von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$ und $((x_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n)$ eine markierte Zerlegung von $[a, b]$. Dann heißt

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

die Riemannsche Summe von f bzgl. $((x_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n)$.

f heißt Riemann-integrierbar (auf $[a, b]$) genau dann, wenn ein $y \in \mathbb{R}$ existiert derart, dass

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_\nu} f(\xi_{\nu,k})(x_{\nu,k} - x_{\nu,k-1}) = y$$

für jede Folge $((x_{\nu,k})_{k=0}^{n_\nu}, (\xi_{\nu,k})_{k=1}^{n_\nu})$, $\nu \in \mathbb{N}$, von markierten Zerlegungen von $[a, b]$, für die

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda((x_{\nu,k})_{k=0}^{n_\nu}) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \max\{x_{\nu,k} - x_{\nu,k-1} \mid 1 \leq k \leq n_\nu\} = 0.$$

Die Zahl y ist dann eindeutig bestimmt und heißt das Riemann-Integral von f (über $[a, b]$). Wir schreiben

$$\int_a^b f(x) dx := y.$$

Mit anderen Worten: f heißt Riemann-integrierbar mit Riemann-Integral y genau dann, wenn für jede markierte Folge von Zerlegungen (von $[a, b]$), deren Feinheit gegen 0 konvergiert, die entsprechende Folge der Riemannschen Summen gegen y konvergiert.

Bemerkung 5.21. Die hier angegebene Definition der Riemann-Integrierbarkeit und des Riemann-Integrals ist äquivalent zu der im Buch von Forster angegebenen Definition (mittels Treppenfunktionen). Damit gelten alle im Forster bewiesenen Eigenschaften des Riemann-Integrals, wie Linearität, Monotonie, sowie die Riemann-Integrierbarkeit von stetigen Funktionen und von monotonen Funktionen.

Es gilt auch der folgende Satz, dessen Beweis dem des Satzes 5.13 sehr ähnlich ist:

Satz 5.22. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. f ist Riemann-integrierbar.
2. Es existiert ein $y \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $\epsilon \in]0, \infty[$ ein $\delta \in]0, \infty[$ existiert derart, dass

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - y \right| < \epsilon$$

für jede markierte Zerlegung $((x_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n)$ mit $\lambda((x_k)_{k=0}^n) < \delta$.

Falls 2 (und damit auch 1) gilt, dann gilt

$$y = \int_a^b f(x) dx.$$

Aufgabe: beweise Satz 5.22.