

Grundbegriffe der Mengenlehre

Krzysztof P. Rybakowski

Universität Rostock

Fachbereich Mathematik

2003–11–07

1 Vorbemerkungen

Ohne die Sprache der Mengenlehre lässt sich Mathematik nicht verstehen. Die Beschäftigung mit Mengen fördert auch das abstrakte Denken und die Ausbildung einer präzisen Ausdrucksweise. Daher sind zumindest rudimentäre mengentheoretische Kenntnisse für jeden Studierenden der Mathematik, der Naturwissenschaften, aber auch der Philosophie oder anderer Geisteswissenschaften, unerlässlich.

Auf den folgenden Seiten werden auf elementare Weise die allernötigsten mengentheoretischen Begriffe eingeführt. Alle Beispiele sollen gründlich durchgearbeitet werden.

Der Text erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Weitere Ausführungen zum Thema sind geplant.

Die Mengenlehre wurde in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts von Georg Cantor begründet. Von ihm stammt die folgende Begriffsbestimmung.

Unter einer “Menge” verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die “Elemente” von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Wir schreiben $m \in M$ (zu lesen: m ist Element von M) falls m ein Element von M ist und $m \notin M$ falls m kein Element von M ist.

Die obige Begriffsbestimmung ist keine präzise Definition des Begriffes “Menge”. (Denn was heißt zum Beispiel “Zusammenfassung”?) Es ist vielmehr so, dass die Begriffe “Menge” und “Element-Sein” zu den nicht definierten Grundbegriffen der Mathematik gehören. Man gibt lediglich Gesetze an (Axiome), die den Umgang mit diesen Begriffen regeln.

Bei den Objekten unterscheidet man gewöhnlich zwischen Mengen und Urelementen, d.h. Individuen. Kein Urelement ist eine Menge und keine Menge ist ein Urelement. Beim Aufbau der Mathematik kann man auf Urelemente verzichten, bei verschiedenen außermathematischen Anwendungen ist es manchmal günstig, Urelemente zuzulassen. Dies werden wir auch hier tun. Beispiele für Urelemente, die in den folgenden Beispielen benutzt werden, sind: ArnoldSchwarzenegger, MeinHund, Oetzi, Newton, Polarlicht.

2 Mengenoperationen

Wenn eine Menge aus einer nur endlichen (und nicht allzu großen) Anzahl von Elementen besteht, so kann man diese Menge beschreiben, indem man die Namen ihrer Elemente zwischen einem Paar ‘{’, ‘}’ geschweiften Klammern aufzählt. Die geschweiften Klammern sind also der Ausdruck für die “Zusammenfassung” (also eine Art “Verpackung”) der Objekte zu einem Ganzen.

Beispiel 2.1. $M = \{1, 2, -7, \text{ArnoldSchwarzenegger}\}$. Hier gilt: $1 \in M$, $2 \in M$, $-7 \in M$ und $\text{ArnoldSchwarzenegger} \in M$. Dies sind die einzigen Elemente von M , also gilt z.B. $10 \notin M$, $\text{MeinHund} \notin M$. Die Reihenfolge bei der Aufzählung spielt keine Rolle, daher gilt beispielsweise $\{1, 2, -7\} = \{-7, 1, 2\}$.

Man bezeichnet Mengen meistens mit Großbuchstaben, wie A , B , X und deren Elemente mit Kleinbuchstaben, wie a , b und x .

Diese Konvention ist nicht immer durchzuhalten, denn Mengen können selbst Elemente anderer Mengen sein:

Beispiel 2.2. $X = \{A, B\}$, wobei $A = \{0, 4\}$ und $B = \{0, 9, 11\}$. Mit anderen Worten, $X = \{\{0, 4\}, \{0, 9, 11\}\}$. Hier gilt also $A \in X$ also $\{0, 4\} \in X$ aber, z.B. $0 \notin X$.

Es gibt auch Mengen, die als Elemente sowohl Urelemente, Mengen, Mengen von Mengen usw. besitzen:

Beispiel 2.3. $Y = \{0, A, B\}$, wobei $A = \{0, 4\}$ und $B = \{0, 9, 11\}$. Mit anderen Worten, $Y = \{0, \{0, 4\}, \{0, 9, 11\}\}$. Hier gilt also $A \in Y$ also $\{0, 4\} \in Y$ aber auch $0 \in Y$. Beachte, dass $4 \in A$ jedoch $4 \notin Y$.

Beispiel 2.4. $Z = \{0, A, B, C\}$, wobei $A = \{0, 4\}$, $B = \{0, 9, 11\}$ und $C = \{A, B\}$. Hier gilt also $0 \in Z$, $A \in Z$, $B \in Z$ aber auch $\{A, B\} \in Z$.

In den letzten Beispielen wurden Elemente von X , Y , Z mit Großbuchstaben A , B oder C bezeichnet. Man tut aber auch gut daran, Mengen ab und zu auch mit Kleinbuchstaben zu bezeichnen, also z.B. statt $A = \{0, 4\}$ auch $a = \{0, 4\}$ zu schreiben, und sich an Ausdrücke wie $0 \in a$ oder $x \in b$ oder sogar $Z \in c$ zu gewöhnen.

Es gibt eine Menge, die gar kein Element enthält. Diese Menge heißt eine *leere Menge* wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Man kann dafür auch suggestiver

$$\emptyset = \{ \}$$

schreiben.

Seien M und N Mengen. Wir sagen, dass M eine *Teilmenge* von N ist, wenn jedes Element von M auch ein Element von N ist. Wir schreiben dann: $M \subset N$ (zu lesen: M ist Teilmenge von N). Falls M keine Teilmenge von N ist, so schreiben wir: $M \not\subset N$.

Beispiel 2.5. $M = \{1, 2, -7\}$, $N = \{1, 2, 5, -7, \}$ und $P = \{0, 2, 5, -7\}$. Hierbei ist jedes Element von M , nämlich 1, 2 und -7 , auch Element von N , also gilt $M \subset N$. Da $1 \in M$ und $1 \notin P$, folgt dagegen, dass M keine Teilmenge von P ist, also $M \not\subset P$. Frage: gilt $N \subset M$? Begründe Deine Antwort.

Jeder Menge X ist natürlich eine Teilmenge von sich selbst, d.h. $X \subset X$. Es gilt auch der folgende Satz.

Satz 2.6. Für jede Menge X gilt: $\emptyset \subset X$, d.h. $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge.

Beweis. Der Satz behauptet, dass jedes Element von $\emptyset$ auch ein Element von X ist. Wer dies nicht glaubt, der muss also ein Element x von $\emptyset$ finden, welches kein Element von X ist. Dies wird aber nicht gelingen, da $\emptyset$ ja gar kein Element enthält. $\square$

Man sollte sorgfältig zwischen den Begriffen “Element” und “Teilmenge” unterscheiden, so ist z. B. $\emptyset \subset \emptyset$ jedoch $\emptyset \notin \emptyset$. Es gibt allerdings auch Situationen, in denen ein Objekt m sowohl Element als auch Teilmenge einer Menge M ist, z.B. für $m = \emptyset$ und $M = \{\emptyset\}$. Ein anderes Beispiel ist $m = \{\emptyset\}$ und $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Nun folgt ein grundlegendes Axiom der Mengenlehre.

Mengen-Eindeutigkeitsaxiom. Zwei Mengen M und N sind identisch, d.h. $M = N$, genau dann, wenn sie dieselben Elemente haben.

Das Mengen-Eindeutigkeitsaxiom (auch *Extensionalitätsaxiom* genannt) besagt also, dass es bei der “Verpackung” von Objekten zu einer Menge, also zu einem Ganzen, lediglich auf die verpackten Objekte, d.h. die Elemente, ankommt, und nicht auf die Art der Verpackung.

Aus dem Mengen-Eindeutigkeitsaxiom folgt insbesondere die bereits oben erwähnte Unabhängigkeit einer Menge von der Reihenfolge bei Aufzählung ihrer Elemente: Die Mengen $\{1, 2, -7\}$ und $\{-7, 1, 2\}$ sind identisch, weil sie dieselben Elemente besitzen. Ebenfalls sind die Mengen $\{1, 1, 2\}$ und $\{1, 2\}$ identisch, weil sie dieselben Elemente, nämlich 1 und 2, haben, auch wenn in der ersten Menge das Element 1 zweimal aufgezählt wird. (Dies unterscheidet den Begriff

“Menge” vom Begriff “Multimenge”, der in der Kombinatorik eine Rolle spielt, aber an dieser Stelle nicht weiter untersucht wird.)

Das Mengen-Eindeutigkeitsaxiom besagt auch mit anderen Worten, dass $M = N$ genau dann, wenn jedes Element von M auch ein Element von N ist und jedes Element von N auch ein Element von M ist. Es gilt also:

Satz 2.7. $M = N$ genau dann, wenn $M \subset N$ und $N \subset M$.

Aus den Sätzen 2.6 und 2.7 folgt insbesondere, dass es genau eine leere Menge gibt, daher sprechen wir von *der* leeren Menge.

Für jedes Objekt x sollte man sorgfältig unterscheiden zwischen dem Objekt x selbst und der Menge $\{x\}$, welche als einziges Element x enthält. Nach dem Mengen-Eindeutigkeitsaxiom gilt z.B. $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, da $\{\emptyset\}$ ein Element enthält und $\emptyset$ kein Element enthält. Ebenfalls gilt $\{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$, da $x = \emptyset$ das einzige Element von $\{\emptyset\}$ ist, während $y = \{\emptyset\}$ das einzige Element von $\{\{\emptyset\}\}$ ist, und wir eben schon gezeigt haben, dass $x \neq y$.

Diese Art von Mengenbildung liefert uns also immer neue Mengen

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}, \{\{\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}\} \dots$$

Man kann auf diese Weise sogar rein mengentheoretisch die natürlichen Zahlen ‘definieren’, indem man setzt:

$$0 := \emptyset, 1 := \{\emptyset\}, 2 := \{\{\emptyset\}\}, 3 := \{\{\{\emptyset\}\}\}, \text{ usw.} \quad (2.1)$$

(Dies geht auf Ernst Zermelo zurück.) Selbstverständlich muss (und soll) man sich natürliche Zahlen *nicht* auf diese Weise vorstellen. Es soll lediglich das Gefühl vermittelt werden, dass die Mengenlehre sich wirklich dazu eignet, die Mathematik zu begründen, und zwar ohne Zugriff auf irgendwelche Urelemente. Übrigens ist es in der Mengenlehre üblich, natürliche Zahlen nicht wie in (2.1) einzuführen, sondern durch die folgende Vorschrift, die von John von Neumann stammt:

$$0 := \emptyset, 1 := \{0\}, 2 := \{0, 1\}, \dots, n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}. \quad (2.2)$$

Bei dieser ‘Definition’ ist also die Zahl n eine Menge mit n Elementen. Z.B. gilt $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ und $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Sei nun X eine beliebige Menge. Indem wir alle Teilmengen von X nach Cantor zu einem Ganzen zusammenfassen, erhalten wir also die Menge aller Teilmengen von X , welche mit $\mathcal{P}(X)$ bezeichnet wird und *die Potenzmenge von X* genannt wird. Nach Definition von $\mathcal{P}(X)$ gilt also für jedes M :

$$M \in \mathcal{P}(X) \text{ genau dann, wenn } M \subset X.$$

Mit anderen Worten: jedes Element von $\mathcal{P}(X)$ ist eine Teilmenge von X und jede Teilmenge von X ist ein Element von $\mathcal{P}(X)$.

Beispiel 2.8. Sei $X = \{a, b\}$ wobei a und b beliebige Objekte (möglicherweise auch Mengen) sind. Dann gilt: $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$. Speziell gilt also z.B.

$$\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}.$$

Beispiel 2.9. Sei $X = \{\text{Newton}, \{\text{Oetzi}, 2\}, 5\}$. Dann gilt z.B. $\{\text{Oetzi}, 2\} \notin \mathcal{P}(X)$, dagegen $\{\{\text{Oetzi}, 2\}\} \in \mathcal{P}(X)$ und $\{\text{Newton}, 5\} \in \mathcal{P}(X)$. Daraus folgt auch, dass

$$\{\{\{\text{Oetzi}, 2\}\}, \{\text{Newton}, 5\}\} \subset \mathcal{P}(X)$$

also

$$\{\{\{\text{Oetzi}, 2\}\}, \{\text{Newton}, 5\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)).$$

Seien nun A und B beliebige Mengen. Wir definieren die *Vereinigung* $A \cup B$ von A mit B als die Menge aller x so dass $x \in A$ oder $x \in B$.

Wir definieren den *Durchschnitt* $A \cap B$ von A mit B als die Menge aller x so dass $x \in A$ und $x \in B$.

Wir definieren die *Mengendifferenz* $A \setminus B$ von A mit B als die Menge aller x so dass $x \in A$ und $x \notin B$.

Beispiel 2.10. Seien $A = \{0, 2, \text{Newton}, \text{Hansa}, \{95\}, \{2, \text{Polarlicht}\}\}$, $B = \{2, \{95\}, \text{Polarlicht}, \{\text{Newton}\}\}$. Dann gelten:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{0, 2, \text{Newton}, \{\text{Newton}\}, \text{Hansa}, \{95\}, \{2, \text{Polarlicht}\}, \text{Polarlicht}\}, \\ A \cap B &= \{2, \{95\}\} \\ A \setminus B &= \{0, \text{Newton}, \text{Hansa}, \{2, \text{Polarlicht}\}\}, \\ B \setminus A &= \{\text{Polarlicht}, \{\text{Newton}\}\}. \end{aligned}$$

3 Relationen und Funktionen

Einer der wichtigsten Begriffe der Mengenlehre ist der Begriff des geordneten Paares. Hierbei wird je zwei (nicht unbedingt verschiedenen) Objekten x und y ein Objekt (x, y) zugeordnet, so dass stets die folgende Regel gilt:

$$(a, b) = (a', b') \text{ genau dann, wenn } a = a' \text{ und } b = b'. \quad (3.1)$$

Im geordneten Paar (x, y) steht also das Objekt x an erster Stelle und das Objekt y an zweiter Stelle. Daher gilt zum Beispiel $(11, 9) \neq (9, 11)$. Auch wenn es für die Anwendungen des Begriffs "geordnetes Paar" unwichtig ist, wie dieser Begriff definiert ist, solange nur die Regel (3.1) gilt, ist es interessant zu wissen, dass man diesen Begriff allein in der Sprache der Mengenlehre definieren kann. Die übliche Definition stammt von Kazimierz Kuratowski und lautet:

Definition 3.1. $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$

Es gilt nämlich der folgende, leicht zu beweisende Satz:

Satz 3.2. $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$ genau dann, wenn $a = a'$ und $b = b'$.

Für die Arbeit mit geordneten Paaren ist weder Definition 3.1 noch Satz 3.2, sondern alleine die Regel (3.1) von Bedeutung.

Seien X und Y beliebige Mengen. Das *Kartesische Produkt von X mit Y* , mit $X \times Y$ bezeichnet, ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$.

Beispiel 3.3. Sei $X = \{1, 2\}$ und $Y = \{\text{Newton}, \text{Oetzi}\}$. Dann gilt:

$$X \times Y = \{(1, \text{Newton}), (1, \text{Oetzi}), (2, \text{Newton}), (2, \text{Oetzi})\}$$

und

$$Y \times X = \{(\text{Newton}, 1), (\text{Oetzi}, 1), (\text{Newton}, 2), (\text{Oetzi}, 2)\}.$$

Mit Hilfe geordneter Paare können wir ‘Relationen’ definieren:

Definition 3.4. Unter einer Relation verstehen wir eine beliebige Menge geordneter Paare.

Mit anderen Worten: R ist eine Relation genau dann, wenn R eine Menge ist und jedes Element von R ein geordnetes Paar ist, d.h. zu jedem $m \in R$ gibt es x und y so dass $m = (x, y)$.

Beispiel 3.5. Für beliebige Mengen X und Y ist das Kartesische Produkt $X \times Y$ eine Relation, da $X \times Y$ eine Menge geordneter Paare ist. Ebenfalls ist jede Teilmenge von $X \times Y$ eine Relation.

Beispiel 3.6.

$$R_1 = \{(0, \text{MeinHund}), (8, 9), (8, 2), (\text{Newton}, \text{Newton}), \\ (\text{Polarlicht}, \text{Newton})\}$$

ist eine Relation, dagegen ist

$$R' = \{(0, \text{MeinHund}), (8, 9), \emptyset, (8, 2), (\text{Newton}, \text{Newton}), \\ (\text{Polarlicht}, \text{Newton})\}$$

keine Relation, denn $\emptyset$ ist kein geordnetes Paar.

Relationen drücken Beziehungen aus, in denen das erste Element des geordneten Paares jeweils zum zweiten Element steht. Daher sagt man statt $(x, y) \in R$ auch, dass x in Relation R (oder in Beziehung R) zu y steht. Man schreibt auch häufig xRy für $(x, y) \in R$.

Beispiel 3.7. Sei $X = \{0, 3, 5, 8\}$. Sei R_2 die Menge von geordneten Paaren (x, y) mit $x \in X$, $y \in X$ und $x < y$. R_2 drückt also die Beziehung ‘ x ist kleiner als y ’ zwischen Elementen der Menge X aus. Es gilt explizit:

$$R_2 = \{ (0, 3), (0, 5), (0, 8), (3, 5), (3, 8), (5, 8) \}.$$

Sei jetzt R_3 die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in X$, $y \in X$ so dass $x \neq y$ und $y - x$ durch 2 teilbar. R_3 drückt also die Beziehung ‘ $x \neq y$ und $y - x$ ist durch 2 teilbar’ zwischen Elementen der Menge X aus. Explizit gilt:

$$R_3 = \{ (0, 8), (3, 5), (5, 3), (8, 0) \}.$$

Während die Relationen aus Beispiel 3.7 bestimmte klar zu beschreibende Beziehungen ausdrückt, scheint die Relation in Beispiel 3.6 keine offensichtliche Beziehung auszudrücken. Trotzdem können wir auch sagen, dass, z.B. Newton zu sich selbst und Polarlicht zu Newton in Relation R_1 steht, denn es gilt ja: $(\text{Newton}, \text{Newton}) \in R_1$ und $(\text{Polarlicht}, \text{Newton}) \in R_1$. Dagegen steht Newton *nicht* in Relation R_1 zu Polarlicht.

Beispiel 3.8. $R = \emptyset$ ist eine Relation, denn erstens ist $\emptyset$ eine Menge und zweitens ist jedes Element von $\emptyset$ ein geordnetes Paar: wenn Du dies nicht glaubst, dann musst Du ein Element $m \in \emptyset$ finden, so dass m kein geordnetes Paar ist. Dies wird Dir aber nicht gelingen, weil $\emptyset$ eben überhaupt keine Elemente hat.

Sei R eine Relation und $R^\sim$ sei die Menge aller geordneten Paare (y, x) mit $(x, y) \in R$. Mit anderen Worten, $m \in R^\sim$ genau dann, wenn x und y existieren derart, dass $(x, y) \in R$ und $m = (y, x)$.

$R^\sim$ ist eine Relation. Sie heißt *die zu R konverse Relation*.

Beispiel 3.9. Sei R_1 die in Beispiel 3.6 definierte Relation. Dann gilt:

$$R_1^\sim = \{ (\text{MeinHund}, 0), (9, 8), (2, 8), (\text{Newton}, \text{Newton}), \\ (\text{Newton}, \text{Polarlicht}) \}.$$

Seien R_2 und R_3 die in Beispiel 3.7 definierten Relationen. Dann gilt:

$$R_2^\sim = \{ (3, 0), (5, 0), (8, 0), (5, 3), (8, 3), (8, 5) \}$$

und

$$R_3^\sim = \{ (8, 0), (5, 3), (3, 5), (0, 8) \}.$$

Beachte, dass $R_3^\sim = R_3$.

Mit Hilfe von Relationen kann man den Begriff “Funktion” sauber definieren:

Definition 3.10. Seien X und Y Mengen.

f heißt eine Funktion von X nach Y genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $f \subset X \times Y$;

2. zu jedem $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$ derart, dass $(x, y) \in f$.

Für jedes $x \in X$ wird das nach Bedingung 2 eindeutig bestimmte $y \in Y$ mit $f(x)$ bezeichnet. Also gilt für alle (x, y) : $(x, y) \in f$ genau dann, wenn $(x, y) \in X \times Y$ und $y = f(x)$. $f(x)$ heißt der Wert von f an der Stelle x . Wir schreiben $f: X \rightarrow Y$, um auszudrücken, dass f eine Funktion von X nach Y ist.

Beispiel 3.11. Seien $X = \{-1, 1, 2\}$ und $Y = \{5, \text{MeinHund}, 2, \{\text{Oetzi}\}\}$. Sei

$$f_1 = \{(-1, 5), (1, 5), (2, \{\text{Oetzi}\})\}.$$

Dann ist f_1 eine Funktion von X nach Y , da $f_1 \subset X \times Y$ und zu jedem $x \in X$ genau ein $y = f_1(x) \in Y$ existiert mit $(x, y) \in f_1$. Explizit gilt $f_1(-1) = 5$, $f_1(1) = 5$ und $f_1(2) = \{\text{Oetzi}\}$.

Sei nun

$$f_2 = \{(-1, 5), (-1, \text{MeinHund}), (1, 5), (2, \{\text{Oetzi}\})\}.$$

Dies ist keine Funktion von X nach Y . Zwar gilt $f_2 \subset X \times Y$, doch zu $x = -1 \in X$ gibt es zwei verschiedene Elemente $y_1 = 5 \in Y$ und $y_2 = \text{MeinHund} \in Y$ mit $(x, y_1) \in f_2$ und $(x, y_2) \in f_2$.

Sei weiterhin

$$f_3 = \{(1, 5), (2, \{\text{Oetzi}\})\}.$$

Dies ist ebenfalls keine Funktion von X nach Y denn es gilt zwar $f_3 \subset X \times Y$ doch zu $x = -1 \in X$ existiert kein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f_3$.

Sei ferner

$$f_4 = \{(-1, 5), (1, \text{Rostock}), (2, \{\text{Oetzi}\})\}.$$

Dies ist ebenfalls keine Funktion von X nach Y . Zwar gibt es zu jedem Objekt $x \in X$ genau ein Objekt y mit $(x, y) \in f_4$, aber $(x, y) = (1, \text{Rostock})$ liegt nicht in $X \times Y$, also $f_4 \not\subset X \times Y$. Andererseits ist f_4 eine Funktion von X nach $Y \cup \{\text{Rostock}\}$.

Aus dem gleichen Grunde ist

$$f_5 = \{(0, 2), (-1, 5), (1, 5), (2, \{\text{Oetzi}\})\}$$

keine Funktion von X nach Y . Jedoch ist f_5 eine Funktion von $X \cup \{0\}$ nach Y .

Beispiel 3.12. Sei X eine beliebige Menge und sei id_X die Menge aller geordneten Paare $(x, y) \in X \times Y$ mit $x = y$. Mit anderen Worten, $m \in \text{id}_X$ genau dann, wenn ein $x \in X$ existiert so dass $m = (x, x)$.

id_X ist eine Funktion von X nach X . Sie heißt die identische Funktion auf X .

Beispiel 3.13. Sei $X = \emptyset$, Y beliebige Menge und $f = \emptyset$. Man sieht leicht, dass f eine Funktion von X nach Y , und zwar die einzige Funktion von X nach Y .

Beispiel 3.14. Sei X eine beliebige Menge mit $X \neq \emptyset$ und $Y = \emptyset$. Dann existiert keine Funktion von X nach Y .

Übung: Beweise die in den Beispielen 3.13 und 3.14 gemachten Aussagen.

Eine Funktion f von X nach Y ist nach Definition 3.10 ist also eine spezielle Relation $f \subset X \times Y$, welche jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ zuordnet. Dies präzisiert den in der üblichen Definition des Begriffes “Funktion” verwendeten Begriff “eindeutige Zuordnungsvorschrift”.

Beachte, dass wenn f eine Funktion von X nach Y ist und $Y \subset Z$, so ist f auch eine Funktion von X nach Z .

Allgemeiner gilt, wie man sich leicht mit dem Mengen-Eindeutigkeitsaxiom überzeugt, die folgende Aussage:

Satz 3.15. Seien X, A, Y und B Mengen. Sei f eine Funktion von X nach Y und g eine Funktion von A nach B . Dann folgt: $f = g$ genau dann, wenn $X = A$ und $f(x) = g(x)$ für jedes $x \in X$.

Aus Satz 3.15 folgt, dass für eine Funktion f von X nach Y die Menge X durch f eindeutig bestimmt ist, während die Menge Y durch f nicht eindeutig bestimmt ist. X heißt die *Definitionsmenge* von f (auch der *Definitionsbereich* von f) und Y heißt eine *Zielmenge* von f .

Sei nun f eine beliebige Funktion von X nach Y und sei A eine beliebige Teilmenge von X . Das *Bild* von A unter f , in Zeichen $f[A]$, ist die Menge aller Elemente $f(x) \in Y$ mit $x \in A$.

Mit anderen Worten, $y \in f[A]$ genau dann, wenn $y \in Y$ und ein $x \in A$ existiert derart, dass $f(x) = y$.

Klarerweise gilt stets $f[\emptyset] = \emptyset$.

Beispiel 3.16. Seien

$$X = \{-1, 1, 2, 3, 8\} \text{ und } Y = \{5, \text{MeinHund}, 2, \{\text{Oetzi}\}, 10\}.$$

Sei

$$f = \{(-1, 5), (1, 5), (2, \{\text{Oetzi}\}), (3, 10), (8, 10)\}.$$

Dann ist f eine Funktion von X nach Y . Es gilt: $f[X] = \{5, \{\text{Oetzi}\}, 10\}$, $f[\{-1, 1\}] = \{5\}$, $f[\{2, 8\}] = \{\{\text{Oetzi}\}, 10\}$.

Häufig wird statt $f[A]$ einfach $f(A)$ geschrieben. Dies kann manchmal zu Missverständnissen führen: Falls $A \subset X$ und zugleich $A \in X$, dann weiß man nicht, ob unter $f(A)$ der Wert von f an der Stelle A oder das Bild von A unter f gemeint ist:

Beispiel 3.17. Sei $X = \{\emptyset\}$, $Y = \{5, 9\}$ und $f = \{(\emptyset, 5)\}$. Dann ist f eine Funktion von X nach Y . Sei $A = \emptyset$. Dann gilt sowohl $A \in X$ als auch $A \subset X$. Es gilt $f(A) = 5$ und $f[A] = f[\emptyset] = \emptyset$. Also ist $f(A) \neq f[A]$.

Sei f nun wiederum eine Funktion von X nach Y und B eine beliebige Teilmenge von Y . Das Urbild von B unter f , in Zeichen $f^{-1}[B]$, ist die Menge aller $x \in X$ mit $f(x) \in B$. Mit anderen Worten, $x \in f^{-1}[B]$ genau dann, wenn $x \in X$ und $f(x) \in B$.

Beispiel 3.18. Seien X, Y und f wie in Beispiel 3.16. Dann gilt: $f^{-1}[\{5\}] = \{-1, 1\}$, $f^{-1}[\{5, 10\}] = \{-1, 1, 3, 8\}$, $f^{-1}[\{\{\text{Oetzi}\}\}] = \{2\}$.

Statt $f^{-1}[B]$ wird ebenfalls häufig $f^{-1}(B)$ geschrieben.

Seien nun X, Y, Z und W Mengen. Sei f eine Funktion von X nach Y und g eine Funktion von Z nach W . Wir nehmen an, dass $f[X] \subset Z$. Sei $x \in X$ beliebig. Dann gilt $f(x) \in f[X]$ also auch $f(x) \in Z$. Daher ist $g(f(x))$ definiert und $g(f(x)) \in W$. Die Menge aller geordneten Paare $(x, w) \in X \times W$ mit $w = g(f(x))$ ist eine Funktion von X nach W , welche mit $g \circ f$ bezeichnet wird. Es gilt also $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für jedes $x \in X$. Die Funktion $g \circ f: X \rightarrow W$ heißt die *zusammengesetzte Funktion g nach f* .

Insbesondere ist $g \circ f$ definiert, wenn $f: X \rightarrow Y$, $g: Z \rightarrow W$ und $Y = Z$.

Beispiel 3.19. Seien X, Y und f wie in Beispiel 3.16. Ferner sei $Z = Y$, $W = \{a, b, c, 11\}$ und

$$g = \{(5, a), (\text{MeinHund}, a), (2, c), (\{\text{Oetzi}\}, b), (10, c)\}.$$

Dann ist g eine Funktion von Z nach W und es gilt

$$g \circ f = \{(-1, a), (1, a), (2, b), (3, c), (10, c)\}.$$

Beispiel 3.20. Seien X, Y und f wie in Beispiel 3.16. Seien

$$Z = \{5, \{\text{Oetzi}\}, 10, \text{Paris}\}, \quad W = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

und

$$g = \{(5, \emptyset), (\{\text{Oetzi}\}, \emptyset), (10, \{\emptyset\}), (\text{Paris}, \{\emptyset\})\}.$$

Dann ist g eine Funktion von Z nach W , $f[X] \subset Z$ und

$$g \circ f = \{(-1, \emptyset), (1, \emptyset), (2, \emptyset), (3, \{\emptyset\}), (8, \{\emptyset\})\}.$$

Definition 3.21. Seien X und Y Mengen.

f heißt eine *surjektive Funktion* von X nach Y genau dann, wenn f eine Funktion von X nach Y ist und $f[X] = Y$.

f heißt eine *injektive Funktion* von X nach Y genau dann, wenn f eine Funktion von X nach Y ist und aus $x, x' \in X$ und $f(x) = f(x')$ stets folgt, dass $x = x'$.

f heißt eine *bijektive Funktion* von X nach Y genau dann, wenn f eine surjektive Funktion von X nach Y ist und f eine injektive Funktion von X nach Y ist.

Definition 3.22. Seien X und Y Mengen und sei f eine Funktion von X nach Y .

g heißt eine zu f inverse Funktion von Y nach X genau dann, wenn g eine Funktion von Y nach X ist und sowohl $g \circ f = \text{id}_X$ als auch $f \circ g = \text{id}_Y$.

Beispiel 3.23. Seien $X = \{0, 1, 2\}$ und $Y = \{1, 3, 5, 6\}$. Seien

$$f_1 = \{(0, 6), (1, 6), (2, 3)\}$$

und

$$f_2 = \{(0, 1), (1, 5), (2, 3)\}.$$

f_1 und f_2 sind Funktionen von X nach Y .

f_1 ist keine surjektive Funktion von X nach Y , weil $f_1[X] = \{6, 3\} \neq Y$. f_1 ist auch keine injektive Funktion von X nach Y , denn $f_1(0) = f_1(1) = 6$.

f_2 ist keine surjektive Funktion von X nach Y , da $f_2[X] = \{1, 5, 3\} \neq Y$. Allerdings ist f_2 eine injektive Funktion von X nach Y , denn es gilt $f_2(x) = 1$ nur für $x = 0$, $f_2(x) = 5$ gilt nur für $x = 1$ und $f_2(x) = 3$ gilt nur für $x = 2$.

Beispiel 3.24. Seien $X = \{0, 1, 2, 4\}$ und $Y = \{1, 3, 5\}$. Sei

$$f_3 = \{(0, 3), (1, 5), (2, 3), (4, 1)\}.$$

Dann ist f_3 eine Funktion von X nach Y . f_3 ist eine surjektive Funktion von X nach Y denn $f_3[X] = Y$. f_3 ist keine injektive Funktion von X nach Y , denn $f_3(0) = f_3(2) = 3$.

Beispiel 3.25. Seien $X = \{0, 1, 2\}$ und $Y = \{1, 3, 5\}$. Sei

$$f_4 = \{(0, 5), (1, 3), (2, 1)\}.$$

Dann ist f_4 eine bijektive Funktion von X nach Y . Die konverse Relation

$$f_4^\sim = \{(5, 0), (3, 1), (1, 2)\}$$

ist eine Funktion von Y nach X . Es gilt:

$$f_4^\sim \circ f_4 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\} = \text{id}_X$$

und

$$f_4 \circ f_4^\sim = \{(5, 5), (3, 3), (1, 1)\} = \text{id}_Y.$$

Es gilt der folgende

Satz 3.26. Seien X und Y beliebige Mengen.

1. f ist eine bijektive Funktion von X nach Y genau dann, wenn f eine Funktion von X nach Y ist und ein g existiert derart, dass g eine zu f inverse Funktion von Y nach X ist.

2. *f ist eine bijektive Funktion von X nach Y genau dann, wenn f eine Funktion von X nach Y ist und die konverse Relation $f^\sim$ eine Funktion von Y nach X ist.*
3. *Falls f eine Funktion von X nach Y ist und g eine zu f inverse Funktion von Y nach X ist, so gilt notwendigerweise $g = f^\sim$.*

Falls also f eine bijektive Funktion von X nach Y ist, dann existiert eine eindeutig bestimmte zu f inverse Funktion g von Y nach X . Es gilt $g = f^\sim$. Wir schreiben in diesem Fall f^{-1} statt $f^\sim$ und nennen f^{-1} die zu f inverse Funktion von Y nach X .

Beachte, dass für eine beliebige bijektive Funktion f von X nach Y und eine beliebige Teilmenge B von Y der Term ' $f^{-1}[B]$ ' missverständlich zu sein scheint, da er sowohl das Urbild von B unter f als auch das Bild von B unter f^{-1} bezeichnen kann. Allerdings sieht man sofort, dass das Urbild von B unter f und das Bild von B unter f^{-1} ein und dieselbe Menge ist.