Entropiezahlen für Einbettungen von Folgenräumen mit Gewichten

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades Diplom-Mathematiker

an der FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
Fakultät für Mathematik und Informatik

eingereicht von Jan Schneider
geb. am 13.01.1977 in Weimar

Betreuer: Prof. Dr. Hans-Gerd Leopold

Jena, 15.09.2002

Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersuchen wir das asymptotische Verhalten von Entropiezahlen kompakter Einbettungsoperatoren zwischen Folgenräumen. Ausgehend von einem Ergebnis bezüglich der Entropiezahlen des Operators $id : l_p^M \longrightarrow l_q^M$ werden wir Aussagen über die Einbettungen von Folgenräumen des Typs $l_p(w)$, $l_q(\beta_j l_p^{M_j})$ sowie $l_q(\beta_j l_p(w))$ treffen. Dabei verallgemeinern wir die Räume schrittweise und bauen unsere Resultate mittels Techniken wie der Faktorisierung der Operatoren und der Interpolation aufeinander auf.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all denen danken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn Prof. Dr. Hans-Gerd Leopold für seine freundliche Betreuung und die außerordentliche Hilfsbereitschaft.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Konzept der Entropiezahlen als Maß für den „Grad“ der Kompaktheit eines Operators hat im Laufe der letzten 20 Jahre weitreichende Bedeutung erlangt. So ist zum Beispiel seit 1980 bekannt, dass man durch die Kenntnis der Entropiezahlen kompakter Operatoren deren Eigenwerte von oben abschätzen kann. Da sich nun viele elementare Probleme der Physik als Differentialgleichung und dann mittels Separationsansatz in Form eines Eigenwert-Problems formulieren lassen, können deren Lösungen durch eben diese Abschätzungen approximiert werden. Es gibt zahlreiche Beispiele für die erfolgreiche Anwendung dieses Verfahrens.
Das Interesse für Entropiezahlen von Operatoren zwischen Folgenräumen war am Anfang der 80er Jahre auf einige ausgewählte Probleme beschränkt. So untersuchte man damals verstärkt das Verhalten der Entropiezahlen bei Diagonaloperatoren zwischen l_p-Räumen oder Einbettungen zwischen Besovschen Folgenräumen. Die erzielten Ergebnisse ließen sich aber nur in speziellen Fällen anwenden und für etwa 10 Jahre blieb das Interesse an weiterführenden Untersuchungen eher gering. Nun sind seit etwa fünf bis sechs Jahren wieder eine große Zahl an Arbeiten zu diesem Thema veröffentlicht worden.
Der Hauptgrund dafür sind neue Übersetzungsmechanismen zwischen Funktionen- und Folgenräumen. Ein Beispiel ist die so genannte subatomare Zerlegung, die es erlaubt, eine Funktion aus dem Besovschen Funktionenraum $B^s_{p,q}(\Omega)$ mit Hilfe von Koeffizienten $\eta = (\eta^\gamma_{j,m})$ aus dem Folgenraum $l_\infty(2^{\rho_1|\gamma|}l_q(2^{j(s-\frac{n}{p})}l_p^{M_j}))$ eindeutig zu identifizieren. Mit Hilfe solcher Zerlegungen kann man Fragen über Einbettungen zwischen Funktionenräumen in Fragen über Einbettungen zwischen Folgenräumen übersetzen. Es ist also von Interesse, die Entropiezahlen in solch kompliziert strukturierten Folgenräumen zu kennen. Diesem Anliegen ist diese Arbeit gewidmet.
Dabei gehen wir wie folgt vor. In Kapitel 2 führen wir Folgenräume in ihrer allgemeinen Form ein, geben ein paar grundlegende Eigenschaften an und klären die Frage, unter welchen Bedingungen die Einbettungsoperatoren existieren. Im darauf folgenden Kapitel definieren wir die Begriffe Entropiezahlen und Operatorenideale, listen einige ihrer Eigenschaften auf und stellen Ergebnisse der Interpolationstheorie bereit. Das Kapitel 4 ist der Hauptteil der Arbeit. Hier formulieren wir Aussagen über das Verhalten der Entropiezahlen von Einbettungen zwischen den Folgenräumen aus Kapitel 2 und versehen diese mit teilweise neuen Beweisen.
Während der gesamten Arbeit setzen wir bestimmte funktionalanalytische Begriffe voraus und benutzen dabei folgende Notation. Für zwei beliebige komplexe Banachräume E, F bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(E, F)$ den Banachraum aller linearen und stetigen Operatoren $T : E \longrightarrow F$, wobei

$$\|T|\mathcal{L}(E,F)\| = \sup_{\|x|E\|\le 1} \|Tx|F\|$$

die Norm eines Operators in $\mathcal{L}(E, F)$ ist. Falls es klar ist, zwischen welchen Räumen T operiert, schreiben wir aus Gründen der Lesbarkeit manchmal einfach nur $\|T\|$ für die Norm.
Wir werden häufig die eng verwandten Begriffe der quasi-Norm und der p-Norm verwenden. Wie die Namen schon suggerieren, werden sie ähnlich zur herkömmlichen Norm definiert. Der Unterschied besteht nur in der genauen Form der Dreiecksungleichung. Für eine quasi-Norm wird hier die rechte Seite mit einer Konstanten $c \geq 1$ multipliziert und bei einer p-Norm werden nur die p-ten Potenzen verglichen. Ist ein linearer Raum anstatt mit einer Norm nur mit einer quasi-Norm ausgestattet und bezüglich dieser vollständig, so bezeichnen wir ihn als quasi-Banachraum.

2 Folgenräume

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Banach- und quasi-Banachräumen, die für unsere Untersuchungen im Kapitel 4 relevant sind. Wir beginnen mit den strukturell einfachsten und gelangen dann durch schrittweise Verallgemeinerung zu den komplizierteren Konstruktionen. Nachdem wir die Folgenräume in möglichst allgemeiner Form definiert haben, diskutieren wir einige elementare Eigenschaften. Vor allem werden uns die Bedingungen interessieren, die die Existenz der Einbettungsoperatoren sichern.

2.1 Die Räume l_p^M und $l_p(w)$

Definition 1 *Es seien $M \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq \infty$. Mit l_p^M bezeichnen wir den linearen Raum aller komplexen M-Tupel $x = (\xi_1, \ldots, \xi_M)$, ausgestattet mit der quasi-Norm*

$$\|x|l_p^M\| = \left(\sum_{j=1}^{M} |\xi_j|^p\right)^{1/p}, \quad \textit{falls} \quad 0 < p < \infty, \tag{1}$$

und

$$\|x|l_\infty^M\| = \sup_j |\xi_j|, \quad \textit{falls} \quad p = \infty. \tag{2}$$

Bemerkung 1 *Für $1 \leq p \leq \infty$ beschreiben (1) und (2) sogar eine Norm, bezüglich derer der Raum l_p^M vollständig, also ein Banachraum ist. Auch für $0 < p < 1$ ist l_p^M bezüglich (1) vollständig, also ein quasi-Banachraum. Da l_p^M ein endlich dimensionaler Raum ist, sind dort alle diese Normen äquivalent.*

Bemerkung 2 *In l_p^M gilt die sogenannte Höldersche Ungleichung für $1 < p < \infty$ in der Form*

$$\sum_{j=1}^{M} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{M} |\xi_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{M} |\eta_j|^{p'}\right)^{1/p'} \tag{3}$$

für $x = (\xi_1, \ldots, \xi_M)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_M) \in l_p^M$ und $1/p + 1/p' = 1$.
In allen weiteren Räumen, die in diesem Abschnitt eingeführt werden, sind die Elemente keine M-Tupel mehr, sondern abzählbare Zahlenfolgen. In diesen Fällen gilt die Höldersche Ungleichung in der gleichen Form mit unendlichen Summen.

Im abschließenden Kapitel werden wir damit beginnen, eine Abschätzung für die Entropiezahlen der kompakten Einbettung $id : l_p^M \longrightarrow l_q^M$ anzugeben. In den komplizierteren Räumen lassen sich die entsprechenden Entropiezahlen dann durch geschickte Zerlegung der Identitätsabbildung auf diesen einfachen Fall zurückführen.
Nun folgt eine erste Verallgemeinerung von l_p^M, in der auch die bekannten l_p-Räume als Spezialfall enthalten sind.

Definition 2 *Es seien* $0 < p \leq \infty$ *und* $w = (w_j)_{j=1}^{\infty}$ *eine Gewichtsfolge positiver reeller Zahlen. Mit* $l_p(w)$ *bezeichnen wir die Menge aller komplexwertigen Folgen* $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ *mit*

$$\|x|l_p(w)\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} w_j^p |\xi_j|^p \right)^{1/p} < \infty \tag{4}$$

und der üblichen Modifikation der quasi-Norm für $p = \infty$.

Bemerkung 3 *Wegen der Ungleichung von Minkowski bildet* $l_p(w)$ *einen linearen Raum. Dieser ist vollständig bezüglich der quasi-Norm* (4)*, die für* $1 \leq p \leq \infty$ *wieder eine Norm ist.*

Bemerkung 4 *Setzt man* $w_j = 1$ *für alle* j*, so ergeben sich die schon erwähnten* l_p*-Räume, die auf folgende Weise ineinander geschachtelt sind :*

$$l_p \subset l_q \subset \ldots \subset c_0 \subset c \subset l_\infty \quad \text{für} \quad p < q < \infty. \tag{5}$$

Dabei ist c *der Raum aller konvergenten Folgen und* c_0 *der Raum aller Nullfolgen* $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ *jeweils mit der Norm* $\|x\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j|$.
Hier ist das „$\subset$“ nicht nur mengentheoretisch zu verstehen, sondern es beinhaltet auch die Stetigkeit der Einbettung. Insbesondere gilt für $p \leq q$ *und alle* $x \in l_p$

$$\|x|l_q\| \leq \|x|l_p\|.$$

In Abschnitt 4.2 interessieren wir uns für die Einbettung $id : l_p(w) \longrightarrow l_q$. Bei der Untersuchung dieses Operators ist es egal, ob man den Urbildraum oder den Bildraum als gewichtet annimmt. Es ist wahlweise auch möglich, das Gewicht auf den Operator zu verlagern. Die Fragen bezüglich id lassen sich also in äquivalente Fragen über den Diagonaloperator $D_\sigma : l_p \longrightarrow l_q$ mit $D_\sigma((\xi_j)_{j=1}^{\infty}) = (\sigma_j \xi_j)_{j=1}^{\infty}$ übersetzen. Die Rolle der Gewichtsfolge wird hier mit $\sigma_j = w_j^{-1}$ von der erzeugenden Folge $\sigma = (\sigma_j)_{j=1}^{\infty}$ übernommen.
Wir wollen jetzt das entscheidende Kriterium für die Existenz einer solchen Einbettung formulieren und beweisen. Dazu führen wir die abkürzende Schreibweise $a_+ = \max\{a, 0\}$ für $a \in \mathbb{R}$ ein.

Lemma 1 *Es seien* $0 < p, q \leq \infty$ *und* $w = (w_j)_{j=1}^{\infty}$ *eine Gewichtsfolge positiver reeller Zahlen. Die Einbettung* $id : l_p(w) \longrightarrow l_q$ *existiert und ist beschränkt genau dann, wenn*

$$(w_j^{-1})_{j=1}^{\infty} \in l_r, \quad \text{wobei} \quad 1/r = (1/q - 1/p)_+. \tag{6}$$

Im Fall der Existenz gilt :

$$\|id|\mathcal{L}(l_p(w), l_q)\| \leq \|(w_j^{-1})_{j=1}^{\infty}|l_r\|. \tag{7}$$

Beweis Zuerst beweisen wir, dass die Bedingung (6) hinreichend ist. Für $p \leq q$ und damit $r = \infty$ erhält man aus Bemerkung 4

$$\begin{aligned} \|x|l_q\|^q = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^q &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j^{-q} w_j^q |\xi_j|^q \\ &\leq \big(\sup_j w_j^{-1}\big)^q \left(\sum_{j=1}^{\infty} w_j^p |\xi_j|^p\right)^{q/p}. \end{aligned}$$

Im Fall $p > q$ ergibt sich nach Anwendung der Hölderschen Ungleichung für $\tilde{p} = p/q$, also $1 < \tilde{p} < \infty$,

$$\|x|l_q\| \leq \|(w_j^{-1})_{j=1}^{\infty}|l_r\| \ \|x|l_p(w)\|$$

mit $r = \frac{q}{1-1/\tilde{p}} = \frac{1}{1/q-1/p}$. Also ist $(w_j^{-1})_{j=1}^{\infty} \in l_r$ hinreichend, und es gilt Ungleichung (7).
Um die Notwendigkeit der Bedingung (6) zu beweisen, konstruieren wir ein Gegenbeispiel. Dazu sei vorerst $0 < q < p$, d.h. $r = \frac{pq}{p-q} < \infty$ und $(w_j^{-1})_{j=1}^{\infty} \notin l_r$. Dann existiert eine Folge von Indizes $(j_k)_{k=1}^{\infty}$, so dass

$$\sum_{j=1}^{j_k} w_j^{-r} + 2^k < \sum_{j=1}^{j_{k+1}} w_j^{-r} \tag{8}$$

gilt. Wegen $(w_j^{-1})_{j=1}^{\infty} \notin l_r$ ist es immer möglich, eine solche Folge zu finden. Jetzt setzen wir $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ mit

$$\xi_j = w_j^{-r/q} \left(\sum_{l=j_k+1}^{j_{k+1}} w_l^{-r}\right)^{-1/q} \qquad \text{für} \quad j = j_k+1, \ldots, j_{k+1}.$$

Dann gilt :

$$\|x|l_q\|^q = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^q = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=j_k+1}^{j_{k+1}} w_j^{-r} \left(\sum_{l=j_k+1}^{j_{k+1}} w_l^{-r}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Andererseits ist aber wegen $p - rp/q = -r$

$$\begin{aligned} \|x|l_p(w)\|^p &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j^p |\xi_j|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=j_k+1}^{j_{k+1}} w_j^p w_j^{-rp/q} \left(\sum_{l=j_k+1}^{j_{k+1}} w_l^{-r}\right)^{-p/q} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=j_k+1}^{j_{k+1}} w_l^{-r}\right)^{1-p/q} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{1-p/q}\right)^k < \infty. \end{aligned}$$

Für die Abschätzung in der letzten Zeile ist $0 < q < p$ und die Bedingung (8) wesentlich.
Im noch ausstehenden Fall $0 < p \leq q$ ist $r = \infty$, also nehmen wir an, dass $(w_j^{-1})_{j=1}^\infty \notin l_\infty$ gilt. Dann existiert eine Teilfolge $(w_{j_k}^{-1})_{k=1}^\infty$ mit

$$w_{j_k}^{-1} > k^{\frac{1+\varepsilon}{p-\varepsilon}} \quad \text{für alle } k \tag{9}$$

und ein ε mit $0 < \varepsilon < p$. Jetzt setzen wir $x = (\xi_j)_{j=1}^\infty$ mit

$$\xi_j = \begin{cases} w_{j_k}^{-\varepsilon/p} & : \quad j = j_k \text{ für } k = 1, 2, \dots \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt wegen (9)

$$\|x|l_q\|^q = \sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^q = \sum_{k=1}^\infty w_{j_k}^{-\varepsilon q/p} > \sum_{k=1}^\infty k^{\frac{\varepsilon q(1+\varepsilon)}{p(p-\varepsilon)}} = \infty$$

und

$$\|x|l_p(w)\|^p = \sum_{j=1}^\infty w_j^p |\xi_j|^p = \sum_{k=1}^\infty w_{j_k}^{p-\varepsilon} < \sum_{k=1}^\infty k^{-(1+\varepsilon)} < \infty.$$

Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung (6) in allen Fällen bewiesen.

□

2.2 Die Lorentzräume $l_{p,q}$

Die Lorentzschen Folgenräume sind eine weitere Verallgemeinerung der l_p-Räume. Sie erlauben eine etwas detailliertere Charakterisierung der zugehörigen Folgen. Wir benötigen sie in Abschnitt 3.2, um den Begriff des Operatorenideals einführen zu können. Weiterhin werden sie eine entscheidende Rolle bei der Formulierung unserer Ergebnisse über die Entropiezahlen von Einbettungsoperatoren im letzten Kapitel spielen.

Definition 3 *Es seien $0 < p, q \leq \infty$ und $(s_j(x))_{j=1}^{\infty}$ die monoton fallende Umordnung der Werte $|\xi_j|$ einer komplexwertigen Folge $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$. Dann bezeichnen wir mit $l_{p,q}$ den linearen Raum aller solcher Folgen $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$, für die $(j^{(1/p-1/q)}s_j(x))_{j=1}^{\infty} \in l_q$ gilt, ausgestattet mit der quasi-Norm*

$$\|x|l_{p,q}\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}[j^{(1/p-1/q)}s_j(x)]^q\right)^{1/q} \quad \textit{falls } 0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty \tag{10}$$

und

$$\|x|l_{p,\infty}\| = \sup_{1\leq j<\infty} j^{1/p}s_j(x) \quad \textit{falls } 0 < p \leq \infty, q = \infty. \tag{11}$$

Bemerkung 5 *Die Lorentzräume $l_{p,q}$ sind vollständig bezüglich* (10) *und* (11). *Es gilt der schon erwähnte Spezialfall $l_{p,p} = l_p$. Für $1 < p < \infty$ und $1 \leq q \leq p$ sind die Lorentzräume sogar Banachräume (vgl. [10], Proposition 1.c.11, S.53).*

Jetzt geben wir noch ein Lemma ohne Beweis an, welches die schöne Eigenschaft der lexikographischen Ordnung beschreibt (vgl. auch [5], Lemma 1.5.2, S. 29).

Lemma 2 *Für die Lorentzschen Folgenräume $l_{p,q}$ gilt:*

$$l_{p,q_1} \subset l_{p,q_2}, \quad \textit{falls} \quad 0 < q_1 < q_2 \leq \infty,\ 0 < p \leq \infty$$

und

$$l_{p_1,q_1} \subset l_{p_2,q_2}, \quad \textit{falls} \quad 0 < p_1 < p_2 \leq \infty,\ 0 < q_1, q_2 \leq \infty.$$

2.3 Die Räume $l_q(\beta_j l_p^{M_j})$ und $l_q(\beta_j l_p(w))$

Die Folgenräume dieses Typs sind vor allem von Interesse, wenn es um die Berechnung von Entropiezahlen bestimmter Einbettungen von Funktionenräumen geht (vgl. [14] und [8]). Nach der Übersetzung der Funktionenräume in Folgenräume, zum Beispiel mittels subatomarer Zerlegung (vgl. [24]), besitzen diese typische Strukturen, wie wir sie im Anschluss definieren werden. Die Untersuchung des Verhaltens der Entropiezahlen von Einbettungen dieser Räume wird unser Ziel in den Abschnitten 4.3 und 4.4 sein.

Definition 4 *Es seien $0 < p, q \leq \infty$, $\beta = (\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ eine Gewichtsfolge positiver reeller Zahlen und $M = (M_j)_{j=1}^{\infty}$ eine Folge natürlicher Zahlen. Dann bezeichnen wir mit $l_q(\beta_j l_p^{M_j})$ den linearen Raum aller komplexwertigen Folgen $x = (\xi_{j,l})_{j\in\mathbb{N}, l=1,\ldots,M_j}$, für die gilt*

$$\|x|l_q(\beta_j l_p^{M_j})\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^q \left(\sum_{l=1}^{M_j} |\xi_{j,l}|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} < \infty \tag{12}$$

mit der üblichen Modifikation der quasi-Norm für $p = \infty$ und/oder $q = \infty$.

Bemerkung 6 *Diese Definition enthält den Fall $\beta_j = 2^{j\delta}$ für $\delta \geq 0$ und $M_j = 2^{jd}$ für $d > 0$. In dieser speziellen Situation nennt man die Räume Besovsche Folgenräume (vgl. [11]).*
Es ist klar, dass $l_q(\beta_j l_p^{M_j})$ bezüglich (12) vollständig ist und somit einen quasi-Banachraum bildet. Falls $M_j = 1$ für alle j ist, so gilt $l_q(\beta_j l_p^{M_j}) = l_q(\beta)$.

Wir werden in Abschnitt 4.3 wieder nach den Entropiezahlen der natürlichen Einbettung $id : l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}^{M_j}) \longrightarrow l_{q_2}(l_{p_2}^{M_j})$ fragen. An dieser Stelle geben wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für deren Existenz an (vgl. Theorem 1 in [16]). Es sei wieder $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Lemma 3 *Es seien $0 < p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$, $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ eine Gewichtsfolge positiver reeller Zahlen und $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ eine Folge natürlicher Zahlen. Die Einbettung $id : l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}^{M_j}) \longrightarrow l_{q_2}(l_{p_2}^{M_j})$ existiert und ist beschränkt genau dann, wenn*

$$(\beta_j^{-1} M_j^{(1/p_2 - 1/p_1)_+})_{j=1}^{\infty} \in l_q, \quad \text{wobei} \quad 1/q = (1/q_2 - 1/q_1)_+ \,. \tag{13}$$

In diesem Fall existiert eine Konstante $c > 0$, für die gilt :

$$\|id|\mathcal{L}(l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}^{M_j}), l_{q_2}(l_{p_2}^{M_j}))\| \leq c \, \|(\beta_j^{-1} M_j^{(1/p_2 - 1/p_1)_+})_{j=1}^{\infty}|l_q\|. \tag{14}$$

Beweis Es genügt hier, kurz die Idee zu beschreiben, da der Beweis im Wesentlichen der Argumentation im Beweis von Lemma 1 folgt. Für $p_1 \leq p_2$ existiert die Einbettung $id : l_{p_1}^{M_j} \longrightarrow l_{p_2}^{M_j}$ immer mit

$$\|id|\mathcal{L}(l_{p_1}^{M_j}, l_{p_2}^{M_j})\| = 1.$$

Dann folgt der Rest wie im Beweis von Lemma 1 durch die Anwendung der Hölderschen Ungleichung und einer etwas verallgemeinerten Konstruktion des Gegenbeispiels (vgl. [16]). Im Fall $p_1 > p_2$ existiert die Einbettung $id : l_{p_1}^{M_j} \longrightarrow l_{p_2}^{M_j}$ ebenfalls immer, aber dann mit

$$\|id|\mathcal{L}(l_{p_1}^{M_j}, l_{p_2}^{M_j})\| = M_j^{1/p_2 - 1/p_1},$$

was vom Gewicht $\beta = (\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ in der Hölderschen Ungleichung kompensiert werden muss. Folglich ergibt sich genau die Bedingung (13), und es gilt (14).

□

Jetzt führen wir den letzten und damit den strukturell kompliziertesten Folgenraum ein, den wir in dieser Arbeit untersuchen werden.

Definition 5 *Es seien $0 < p, q \leq \infty$ und $\beta = (\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ sowie $w = (w_l)_{l=1}^{\infty}$ Gewichtsfolgen positiver reeller Zahlen. Dann bezeichnen wir mit $l_q(\beta_j l_p(w))$ den linearen Raum aller komplexwertigen Folgen $x = (\xi_{j,l})_{j,l \in \mathbb{N}}$, für die gilt*

$$\|x|l_q(\beta_j l_p(w))\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^q \left(\sum_{l=1}^{\infty} w_l^p |\xi_{j,l}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty \tag{15}$$

mit der üblichen Modifikation der quasi-Norm für $p = \infty$ und/oder $q = \infty$.

Bemerkung 7 *Auch für diesen Raum gilt : Sind $p, q \geq 1$, so wird durch* (15) *sogar eine Norm definiert. In jedem Fall ist $l_q(\beta_j l_p(w))$ bezüglich* (15) *vollständig.*

Da wir auch für diesen Raum die Einbettung $id : l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}(w)) \longrightarrow l_{q_2}(l_{p_2})$ bezüglich ihrer Entropiezahlen untersuchen werden, geben wir das nun folgende Kriterium für deren Existenz an, wobei wieder $a_+ = \max\{a, 0\}$ sein soll.

Lemma 4 *Es seien $0 < p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$ und $\beta = (\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ sowie $w = (w_l)_{l=1}^{\infty}$ Gewichtsfolgen positiver reeller Zahlen. Die Einbettung $id : l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}(w)) \longrightarrow l_{q_2}(l_{p_2})$ existiert und ist beschränkt genau dann, wenn*

$$(\beta_j^{-1})_{j=1}^{\infty} \in l_q \quad \textit{und} \quad (w_l^{-1})_{l=1}^{\infty} \in l_p, \tag{16}$$

wobei

$$1/q = (1/q_2 - 1/q_1)_+ \quad \textit{und} \quad 1/p = (1/p_2 - 1/p_1)_+.$$

Im Fall der Existenz gilt :

$$\|id|\mathcal{L}(l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}(w)), l_{q_2}(l_{p_2}))\| \leq \|(\beta_j^{-1})_{j=1}^{\infty}|l_q\| \; \|(w_l^{-1})_{l=1}^{\infty}|l_p\|. \tag{17}$$

Beweis Auch hier werden wir nur die Beweisidee skizzieren, da die Argumentation analog zu der im Beweis von Lemma 1 ist. Um zu zeigen, dass Bedingung (16) hinreichend ist, kann man jede der beiden Summen in der $l_{q_2}(l_{p_2})$-Norm separat wie im Beweis von Lemma 1 behandeln. Das heißt, diese Norm lässt sich entweder durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung oder unter Verwendung der natürlichen Einbettung auf folgende Weise abschätzen :

$$\|x|l_{q_2}(l_{p_2})\| \leq \|(\beta_j^{-1})_{j=1}^{\infty}|l_q\| \; \|(w_l^{-1})_{l=1}^{\infty}|l_p\| \; \|x|l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}(w))\|.$$

Für den Beweis der Notwendigkeit von Bedingung (16) konstruieren wir das Gegenbeispiel genau wie im Beweis von Lemma 1 jeweils für $(\beta_j^{-1})_{j=1}^{\infty}$ und $(w_l^{-1})_{l=1}^{\infty}$. Die Rechnungen erfolgen dann ebenfalls analog, und es ergeben sich die gewünschten Abschätzungen.

$\square$

3 Hilfsmittel der Funktionalanalysis

Dieses Kapitel dient dazu, die Definitionen der grundlegenden Begriffe aufzuführen, die die Voraussetzungen für die Formulierung der Ergebnisse in Kapitel 4 bilden. Darüber hinaus werden wir sowohl von den Entropiezahlen als auch den Operatorenidealen einige einfache Eigenschaften angeben. Am Ende dieses Kapitels zitieren wir noch wichtige Ergebnisse der Interpolationstheorie. Wir beschränken uns darauf, die Aussagen in dem gesamten Kapitel ohne Beweise anzugeben, wobei wir für mehr Details in den einzelnen Abschnitten auf die entsprechende Literatur verweisen.

3.1 Entropiezahlen

Das Konzept der Entropiezahlen basiert auf dem Begriff der ε-Entropie, der schon in den 30er Jahren eingeführt wurde. Mit der heute üblichen Definition der Entropiezahlen arbeitet man allerdings erst seit etwa 25 Jahren (vgl. [19], Abschn. 12).

Definition 6 *Gegeben sei ein linearer stetiger Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Dann heißt*

$$\varepsilon_n(T) := \inf\{\varepsilon \geq 0 : \exists x_1, \ldots, x_n \in F \text{ mit } T(U_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + \varepsilon U_F)\}$$

die n-te Entropiezahl von T, wobei U_E bzw. U_F die Einheitskugeln in E bzw. F bezeichnen. Wir nennen

$$e_n(T) := \varepsilon_{2^{n-1}}(T)$$

die n-te dyadische Entropiezahl von T.

Bemerkung 8 *Da die Informationen über das asymptotische Verhalten der „normalen“ Entropiezahlen eines Operators beim Übergang zu den dyadischen vollständig erhalten bleiben, werden wir uns im Folgenden auf die Betrachtung der letztgenannten beschränken, sie aber der Einfachheit halber nur mit „Entropiezahlen“ bezeichnen.*

Die Entropiezahlen besitzen einige schöne algebraische Eigenschaften, von denen wir hier nur die angeben wollen, die wir später unmittelbar benötigen werden (vgl. auch [5], S.21).

(E1) **Monotonie:** $e_1(T) \geq e_2(T) \geq \cdots \geq e_n(T) \geq \cdots$

mit $e_1(T) = \|T|\mathcal{L}(E,F)\|$ für $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

(E2) **Additivität:** $e_{k+n-1}(T_1 + T_2) \leq e_k(T_1) + e_n(T_2)$

für $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, speziell

(E2)' $\qquad e_n(T_1+T_2) \le \|T_1|\mathcal{L}(E,F)\| + e_n(T_2)$.

(E3) **Multiplikativität:** $e_{k+n-1}(RS) \le e_k(R)e_n(S)$

für $S \in \mathcal{L}(E,G)$ und $R \in \mathcal{L}(G,F)$, speziell

(E3)' (a) $e_n(RS) \le \|R|\mathcal{L}(G,F)\| e_n(S)$ und

(b) $e_k(RS) \le e_k(R)\|S|\mathcal{L}(E,G)\|$.

Im Folgenden werden wir uns vor allem für kompakte Operatoren interessieren. Nach Definition ist ein Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$ kompakt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_{n_\varepsilon}$ existieren, so dass gilt :

$$T(U_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} (x_i + \varepsilon U_F),$$

wobei U_E bzw. U_F wieder die Einheitskugeln in E bzw. F sind.
Das nächste Lemma zeigt die enge Verknüpfung der Begriffe Kompaktheit und Entropiezahlen von Operatoren (vgl. auch [5], Formel (1.3.31), S. 20).

Lemma 5 *Für $T \in \mathcal{L}(E,F)$ gilt:*

$$T \textit{ ist kompakt genau dann, wenn } \lim_{n\to\infty} e_n(T) = 0 \textit{ ist }.$$

Das Verhalten der Folge $(e_n(T))_{n=1}^{\infty}$ kann demnach als Maß für den „Grad“ der Kompaktheit von T betrachtet werden. Eine wichtige Motivation für die Untersuchung von Entropiezahlen kompakter Operatoren bildet ein Zusammenhang mit den Eigenwerten dieser Operatoren, der 1981 von Carl bewiesen wurde (vgl. [3]). Ein kompakter Operator besitzt höchstens abzählbar viele Eigenwerte, die sich nur im Nullpunkt häufen können. Jetzt sei $(\lambda_k(S))_{k=1}^{\infty}$ die Folge der Eigenwerte eines kompakten Operators $S \in \mathcal{L}(E,E)$, die durch $|\lambda_1(S)| \ge |\lambda_2(S)| \ge \cdots \ge 0$ geordnet sind und ihrer Vielfachheit nach gezählt werden. Besitzt S nur n Eigenwerte, so setzen wir $\lambda_{n+1}(S) = \lambda_{n+2}(S) = \ldots = 0$.

Satz 1 *Es sei $S \in \mathcal{L}(E,E)$ ein kompakter Operator und $(\lambda_k(S))_{k=1}^{\infty}$ die Folge seiner Eigenwerte. Dann gilt :*

$$\left(\prod_{i=1}^{k} |\lambda_i(S)|\right)^{1/k} \le \inf_{n\in\mathbb{N}} 2^{\frac{n}{2k}} e_n(S) \textit{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Folgerung 1 *Für $n = k$ folgt aus Satz 1 die Ungleichung von Carl :*

$$|\lambda_k(S)| \le \sqrt{2}\, e_k(S).$$

3.2 Operatorenideale

Mit Hilfe von Operatorenidealen lassen sich einige Aussagen bezüglich des Verhaltens der Entropiezahlen von Operatoren einfacher formulieren. Wir führen vorerst noch einige Notationen ein. Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$ bezeichnen wir mit $R(T) := \{Tx : x \in E\}$ den Bildraum von T. Wenn $\dim R(T) < \infty$, dann nennen wir T einen finiten Operator. Die Menge aller finiten Operatoren zwischen E und F bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(E,F)$. Jetzt sind wir in der Lage, den Begriff des Operatorenideals einzuführen. Wir folgen hierbei im Wesentlichen den Ausführungen in [5] (Abschn. 1.6.).

Definition 7 *Für jedes Paar von Banachräumen E, F sei die Teilmenge $\mathcal{A}(E,F) \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ gegeben. Die Klasse*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{E,F} \mathcal{A}(E,F)$$

heißt Operatorenideal, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind :

(I1) $\mathcal{F}(E,F) \subseteq \mathcal{A}(E,F)$.

(I2) *Für $S, T \in \mathcal{A}(E,F)$ folgt stets $S + T \in \mathcal{A}(E,F)$.*

(I3) *Für Banachräume E_0, F_0 und Operatoren $R \in \mathcal{L}(E_0,E)$, $T \in \mathcal{A}(E,F)$,*

$S \in \mathcal{L}(F,F_0)$ folgt stets $STR \in \mathcal{A}(E_0,F_0)$.

Die Klasse $\mathcal{F}$ aller finiten Operatoren und die Klasse $\mathcal{L}$ aller linearen und stetigen Operatoren zwischen beliebigen Banachräumen sind Operatorenideale.
Für jedes Operatorenideal $\mathcal{A}$ gilt : $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$.

Definition 8 *Es sei $\mathcal{A}$ ein Operatorenideal. Die Funktion $\varrho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Ideal-quasi-Norm auf $\mathcal{A}$, falls gilt :*

(Q1) $0 \leq \varrho(T) < \infty$ *für alle $T \in \mathcal{A}$, wobei $\varrho(T) = 0$ genau dann, wenn $T = 0$.*

(Q2) *Es existiert ein $c \geq 1$ mit $\varrho(T_1 + T_2) \leq c(\varrho(T_1) + \varrho(T_2))$*

für alle $T_1, T_2 \in \mathcal{A}(E,F)$.

(Q3) $\varrho(RS) \leq \|R\|\varrho(S)$ *für $S \in \mathcal{A}(E,G)$, $R \in \mathcal{L}(G,F)$ und*

$\varrho(RS) \leq \|S\|\varrho(T)$ *für $S \in \mathcal{L}(E,G)$, $R \in \mathcal{A}(G,F)$.*

Bemerkung 9 *Das Paar $[\mathcal{A}, \varrho]$ heißt quasi-normiertes Operatorenideal. Ein solches wird vollständig genannt, falls jede Komponente $\mathcal{A}(E,F)$ vollständig bezüglich ϱ ist.*

Für unsere Untersuchungen in Kapitel 4 sind folgende spezielle Operatorenideale von Interesse. Wir definieren

$$\mathcal{L}^{(e)}_{p,q} := \{T \in \mathcal{L} : (e_n(T))_{n=1}^{\infty} \in l_{p,q}\} \text{ mit } 0 < p, q \leq \infty \tag{18}$$

und

$$\lambda^{(e)}_{p,q}(T) := \|(e_n(T))_{n=1}^{\infty}|l_{p,q}\| \text{ für } T \in \mathcal{L}^{(e)}_{p,q}. \tag{19}$$

Dabei erinnern wir an die Definition 6 der n-ten (dyadischen) Entropiezahl und an die Definition 3 der Lorentzschen Folgenräume $l_{p,q}$.
Die nun folgende Aussage geht auf Triebel (1970) zurück, und ein Beweis findet sich beispielsweise in [5] (S. 38).

Lemma 6 *Das Paar* $[\mathcal{L}^{(e)}_{p,q}, \lambda^{(e)}_{p,q}]$ *ist ein vollständiges quasi-normiertes Operatorenideal.*

Weiterhin existiert eine nützliche Produkt-Formel für die obigen Operatorenideale, die wir später anwenden werden. Sie folgt direkt aus der Multiplikativität der Entropiezahlen. Dabei bedeutet „$\circ$“ die Verknüpfung zwischen Operatorenidealen.

Lemma 7 *Es seien* $0 < p_1, p_2 < \infty$ *und* $0 < q_1, q_2 \leq \infty$. *Dann gilt*

$$\mathcal{L}^{(e)}_{p_1,q_1} \circ \mathcal{L}^{(e)}_{p_2,q_2} \subseteq \mathcal{L}^{(e)}_{p,q} \quad \text{für} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2},\ \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

3.3 Interpolation

Dieser Abschnitt dient dazu, kurz das Anliegen der Interpolationstheorie zu erläutern und die Ergebnisse bereitzustellen, die in Kapitel 4 Verwendung finden. Für die detaillierte Darstellung des Konzepts verweisen wir auf [1] und [22]. Das Ziel der Interpolationstheorie kann mit einfachen Mitteln wie folgt umrissen werden. Gegeben seien zwei quasi-Banachräume A_1, A_2, die stetig in einen linearen Hausdorffraum $\mathcal{A}$ eingebettet sind. Das Paar (A_1, A_2) heisst Interpolationspaar. Es sei jetzt (B_1, B_2) ein zweites Interpolationspaar, eingebettet in den linearen Hausdorffraum $\mathcal{B}$, und T sei ein linearer Operator von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, dessen Einschränkungen auf A_1 beziehungsweise A_2 lineare stetige Operatoren nach B_1 beziehungsweise B_2 sind. Man fragt jetzt nach quasi-Banachräumen $A \subset \mathcal{A}$ und $B \subset \mathcal{B}$, so dass die Einschränkung von T auf A ein linearer stetiger Operator nach B ist. Diese Bedingung wird Interpolationseigenschaft genannt. Gesucht ist also eine Konstruktion F, die aus einem gegebenen Interpolationspaar (A_1, A_2) einen quasi-Banachraum $A = F((A_1, A_2))$, den Interpolationsraum, erzeugt, so dass $F((A_1, A_2))$ und $F((B_1, B_2))$ die Interpolationseigenschaft besitzen.
Es gibt viele solcher Konstruktionsmöglichkeiten, die sich in reelle und komplexe Methoden unterteilen lassen. Wir wollen hier nur eine relle Methode, die sogenannte K-Methode, etwas näher beschreiben. Wir definieren den quasi-Banachraum

$$A_1 + A_2 = \{a \in \mathcal{A} : \ a = a_1 + a_2 \text{ wobei } a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

mit

$$\|a|A_1 + A_2\| = \inf_{a=a_1+a_2} (\|a_1|A_1\| + \|a_2|A_2\|)$$

und für eine feste Zahl $t > 0$ das Funktional

$$K(t, a)_{A_1,A_2} = \inf_{a \in A_1+A_2} (\|a_1|A_1\| + t\|a_2|A_2\|),$$

wobei die Infima jeweils über alle Darstellungen $a = a_1 + a_2$ mit $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2$ genommen werden. Dann nennen wir für $0 < \Theta < 1$ und $0 < q \leq \infty$

$$(A_1, A_2)_{\Theta,q} = \left\{ a : \ a \in A_1 + A_2 \text{ mit } \left(\int_0^\infty (t^{-\Theta} K(t, a)_{A_1,A_2})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

den Interpolationsraum zum Interpolationspaar (A_1, A_2). Man kann zeigen, dass $(A_1, A_2)_{\Theta,q}$ ein quasi-Banachraum ist, der die Interpolationseigenschaft besitzt.
Jetzt wollen wir die Resultate zusammenstellen, auf die wir später noch zurückgreifen werden. Es handelt sich um Interpolationsaussagen über Folgenräume und Operatorenideale sowie ein Ergebnis bezüglich des Verhaltens der Entropiezahlen unter Interpolation. Im Original findet man den Satz 2 in [1] als Theorem 5.3.1 (S.113). Der Satz 3 ist ein Spezialfall von Theorem 14 in [20] (S.162).

Satz 2 *Es seien* $0 < r_1 < r_2 < \infty$, $0 < t_1, t_2, t \leq \infty$ *und* $0 < \Theta < 1$. *Dann gilt*

$$(l_{r_1,t_1}, l_{r_2,t_2})_{\Theta,t} = l_{r,t} \text{ mit } \frac{1}{r} = \frac{1-\Theta}{r_1} + \frac{\Theta}{r_2}.$$

Satz 3 *Es seien* E *und* F *beliebige Banachräume,* $0 < s_1 < s_2 < \infty$, $0 < t_1, t_2, t \leq \infty$ *und* $0 < \Theta < 1$. *Dann gilt*

$$(\mathcal{L}^{(e)}_{s_1,t_1}(E,F), \mathcal{L}^{(e)}_{s_2,t_2}(E,F))_{\Theta,t} \subseteq \mathcal{L}^{(e)}_{s,t}(E,F) \quad \text{ mit } \quad \frac{1}{s} = \frac{1-\Theta}{s_1} + \frac{\Theta}{s_2}.$$

Das nächste Resultat behandelt die Interpolation gewichteter Folgenräume. Aus den Ergebnissen von [2], speziell Proposition 3.6, folgt, dass ein Spezialfall von Theorem 5.2 in [6] in folgender Weise formuliert werden kann.

Satz 4 *Es seien* $1 \leq q_1, q_2, q \leq \infty$, $0 < \Theta < 1$ *und* $\beta = (\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ *eine Folge positiver reeller Zahlen, die der Bedingung*

$$\lambda_1 \beta_j \leq \beta_{j+1} \leq \lambda_2 \beta_j$$

mit $\lambda_1 > 1$ *oder* $\lambda_2 < 1$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$ *genügt. Dann gilt für* $0 < s_1, s_2 < \infty$ *mit* $s_1 \neq s_2$

$$(l_{q_1}(\beta_j^{s_1} l_p), l_{q_2}(\beta_j^{s_2} l_p))_{\Theta,q} = l_q(\beta_j^{s} l_p),$$

wobei $s = (1-\Theta)s_1 + \Theta s_2$ *ist.*

Die Aussagen des folgenden Satzes findet man in [19] (12.1.11 und 12.1.12, S. 170).

Satz 5 *Es seien* X, Y *Banachräume,* (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) *Interpolationspaare und* $0 < \Theta < 1$.
(i) Ist $X = (X_1, X_2)_{\Theta,q}$ *ein Interpolationsraum, so gilt für jeden Operator* $S \in \mathcal{L}(X_1 + X_2, Y)$ *und* $n \in \mathbb{N}$

$$e_{2n-1}(S : X \longrightarrow Y) \leq 2 e_n(S : X_1 \longrightarrow Y)^{1-\Theta} e_n(S : X_2 \longrightarrow Y)^{\Theta}.$$

(ii) Ist $Y = (Y_1, Y_2)_{\Theta,q}$ *ein Interpolationsraum, so gilt für jeden Operator* $T \in \mathcal{L}(X, Y_1 \cap Y_2)$ *und* $n \in \mathbb{N}$

$$e_{2n-1}(S : X \longrightarrow Y) \leq 2 e_n(S : X \longrightarrow Y_1)^{1-\Theta} e_n(S : X \longrightarrow Y_2)^{\Theta}.$$

4 Entropiezahlen für Einbettungsoperatoren

Wir widmen uns jetzt dem Hauptanliegen dieser Arbeit. Wir werden Aussagen über das Verhalten der Entropiezahlen von denjenigen Einbettungsoperatoren treffen, die wir in Kapitel 2 betrachtet haben.
Um die Ergebnisse einfacher formulieren zu können, führen wir hier eine abkürzende Schreibweise ein, mit der sich das asymptotische Verhalten von Folgen leicht klassifizieren lässt. Es seien $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ und $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ zwei Folgen positiver reller Zahlen. Dann schreiben wir $a_k \sim b_k$, falls zwei positive Konstanten c und C existieren, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung $cb_k \leq a_k \leq Cb_k$ gilt.

4.1 Der Operator $id : l_p^M \longrightarrow l_q^M$

Wir beginnen sofort mit der Hauptaussage bezüglich der Entropiezahlen der Einbettung $id : l_p^M \longrightarrow l_q^M$, sie spielt für alle weiteren Betrachtungen eine entscheidende Rolle.

Satz 6 *Es seien $0 < p \leq q \leq \infty$. Dann gilt für die k-te Entropiezahl e_k der Einbettung $id : l_p^M \longrightarrow l_q^M$*

$$e_k \sim \begin{cases} 1 & : \quad 1 \leq k \leq \log_2(2M), \\ \left(k^{-1}\log_2(1+2Mk^{-1})\right)^{1/p-1/q} & : \quad \log_2(2M) \leq k \leq 2M, \\ 2^{-\frac{k}{2M}}(2M)^{1/q-1/p} & : \quad k \geq 2M, \end{cases} \tag{20}$$

wobei die Konstanten von M unabhängig sind.

Bemerkung 10 *Erstmals wurde diese Aussage 1984 in [21] für Banachräume, also für $1 \leq p < q \leq \infty$ formuliert.*
Bei der auch für quasi-Banachräume gültigen Variante folgen die Abschätzungen nach unten im ersten und dritten Fall in (20) *aus Proposition 7.2 in [23] (S. 50). Für $\log_2(2M) \leq k \leq 2M$ findet man einen Beweis in [12]. Der Beweis der oberen Abschätzungen ist in [9] (S.98-101) ausführlich beschrieben.*

Wir werden versuchen, soweit es möglich ist, unsere Aussagen über die Entropiezahlen von Einbettungsoperatoren in der Sprache der Operatorenideale zu beweisen. Es ist daher zweckmäßig, im nächsten Satz das Verhalten der Entropiezahlen von $id : l_p^M \longrightarrow l_q^M$ mit Hilfe der Norm im Operatorenideal $\mathcal{L}_{s,t}^{(e)}$ auszudrücken. In dieser Form werden wir in Abschnitt 4.2 von der Aussage Gebrauch machen. Ursprünglich findet man diesen Satz in [4] als Theorem 1 (S.138). Dort ist er unter Zuhilfenahme von Gelfandzahlen und Kolmogorovzahlen bewiesen worden. Wir werden hier einen modifizierten Beweis vorführen, der ohne diese Hilfsmittel auskommt, dafür aber entscheidend auf Satz 6 zurückgreift.
Zuvor stellen wir jedoch noch zwei Lemmata bereit, die ebenfalls in diesem Beweis Verwendung finden und in [3] (S.292) nachgeschlagen werden können.

Lemma 8 *Es seien E_M ein M-dimensionaler Banachraum und id der Identitätsoperator auf E_M. Falls $0 < s < \infty$ und $0 < t \leq \infty$, gilt für $M \in \mathbb{N}$*

$$\lambda_{s,t}^{(e)}(id) \leq cM^{1/s}$$

mit einer Zahl $c > 0$, die von s, t, aber nicht von M abhängt.

Beweis Der Beweis basiert auf der Idee, im Fall $0 < t \leq s < \infty$ die Summe

$$\|(e_k(id))_{k=1}^{\infty}|l_{s,t}\|^t = \sum_{k=1}^{\infty} k^{t/s-1} e_k^t(id)$$

an der Stelle $k = M$ in zwei Summen aufzuspalten und mit Hilfe der Ungleichung

$$e_k(id) \leq 4 \cdot 2^{-(k-1)/2M} \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

(vgl. [19], Proposition 12.1.13, S.171) durch einfache Rechnungen die gewünschte Abschätzung zu erhalten.
Für $0 < s \leq t \leq \infty$ folgt die Behauptung mit

$$\lambda_{s,t}^{(e)}(id) \leq c(s,t)\lambda_{s,s}^{(e)}(id)$$

ebenfalls nach obiger Rechnung (vgl. Lemma 2).

□

Lemma 9 *Es seien $0 < s < s_0 \leq \infty$, $0 < t, t_0 \leq \infty$ und $T \in \mathcal{F}$, wobei $dim R(T) \leq M$ ist. Dann gilt für $M \in \mathbb{N}$*

$$\lambda_{s,t}^{(e)}(T) \leq cM^{1/s-1/s_0}\lambda_{s_0,t_0}^{(e)}(T)$$

mit einer von M unabhängigen Zahl $c > 0$.

Beweis Auch hier wollen wir nur die Beweisidee angeben. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ mit $\dim R(T) = \dim T(E) \leq M$ lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ {\scriptstyle T_0}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle J} \\ T(E) & \xrightarrow{id} & T(E). \end{array}$$

Dabei ist T_0 der Operator T, betrachtet als surjektiver Operator von E auf $T(E)$, id der Identitätsoperator auf $T(E)$ und J die natürliche Injektion. Dann gilt für $1/r = 1/s - 1/s_0$ und Konstanten $c_1, c_2 > 0$ wegen der Lemmata 7 und 8

$$\lambda_{s,t}^{(e)}(T) \leq c_1\lambda_{r,t}^{(e)}(Jid)\lambda_{s_0,\infty}^{(e)}(T_0) \leq c_2 M^{1/s-1/s_0}\lambda_{s_0,t_0}^{(e)}(T_0).$$

Jetzt folgt die gewünschte Ungleichung aus der Injektivität der Ideal-quasi-Norm $\lambda_{s,t}^{(e)}$ (vgl. [19], Theorem 14.3.5, S.198).

□

Satz 7 *Es seien* $1 \le p, q \le \infty$, $1/s > \max(1/p - 1/q, 0)$ *und* $0 < t \le \infty$. *Dann gilt für* $M \in \mathbb{N}$ *:*

$$\lambda^{(e)}_{s,t}(id : l_p^M \longrightarrow l_q^M) \le c\, M^{1/s+1/q-1/p}$$

mit einer Zahl $c > 0$, *die von* s, t, p, q, *aber nicht von* M *abhängt.*

Beweis Im Fall $1 \le q \le p \le \infty$ gilt wegen Lemma 8 für $M \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\lambda^{(e)}_{s,t}(id : l_p^M \longrightarrow l_q^M) &\le \lambda^{(e)}_{s,t}(id : l_q^M \longrightarrow l_q^M)\, \|id : l_p^M \longrightarrow l_q^M\| \\
&\le c_1 M^{1/s} M^{1/q-1/p} \\
&\le c_1 M^{1/s+1/q-1/p}
\end{aligned}$$

mit einer Zahl $c_1 > 0$, die von s, t, aber nicht von M abhängt.
Für den Fall $1 \le p < q \le \infty$ beschränken wir uns vorerst auf $t = \infty$ und wählen eine Zahl s_0 mit $1/s_0 > 1/p - 1/q$. Nach Definition ist

$$\lambda^{(e)}_{s_0,\infty}(id : l_p^M \longrightarrow l_q^M) = \sup_{1 \le k \le \infty} k^{1/s_0} e_k(id : l_p^M \longrightarrow l_q^M).$$

Wir spalten das Supremum auf und erhalten wegen Satz 6

$$\begin{aligned}
\sup_{1 \le k \le 2M} k^{1/s_0} e_k(id : l_p^M \longrightarrow l_q^M) &\le c_2 \sup_{1 \le k \le 2M} k^{1/s_0} \left(k^{-1} \log_2(1 + 2Mk^{-1})\right)^{1/p-1/q} \\
&\le c_3\, M^{1/s_0+1/q-1/p}
\end{aligned}$$

mit Zahlen $c_2, c_3 > 0$, die von s_0, p, q, aber nicht von M abhängen.
Um die Abschätzung in der letzten Zeile einzusehen, setzen wir $2M/k = x \ge 1$ und rechnen nach, dass für beliebige $a, b > 0$ immer eine Konstante $c_{a,b} > 0$ existiert, so dass

$$x^{-a} \left(\log_2(1 + x)\right)^b \le c_{a,b}$$

gilt. Weiterhin folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{k \ge 2M} k^{1/s_0} e_k(id : l_p^M \longrightarrow l_q^M) &\le c_2 \sup_{k \ge 2M} k^{1/s_0} 2^{-\frac{k}{2M}} (2M)^{1/q-1/p} \\
&\le c_4\, M^{1/s_0+1/q-1/p}
\end{aligned}$$

mit einer Zahl $c_4 > 0$, die von s_0, p, q, aber nicht von M abhängt.
Für die Abschätzung in der letzten Zeile ist wesentlich, dass die Funktion

$$g(k) = k^{1/s_0} 2^{-\frac{k}{2M}}$$

für $k = 2M/(s_0 \ln 2)$ ihr Maximum annimmt.
Wir lassen jetzt $0 < t \le \infty$ zu und wählen s_0 so, dass $1/s > 1/s_0 > 1/p - 1/q$ gilt. Dann erhalten wir mit Lemma 9 die Ungleichung

$$\lambda^{(e)}_{s,t}(id : l_p^M \longrightarrow l_q^M) \le c_5\, M^{1/s-1/s_0}\, \lambda^{(e)}_{s_0,\infty}(id : l_p^M \longrightarrow l_q^M)$$

mit einer Zahl $c_5 > 0$, die von s, s_0, t, aber nicht von M abhängt. Insgesamt gilt also

$$\lambda_{s,t}^{(e)}(id : l_p^M \longrightarrow l_q^M) \leq c\, M^{1/s+1/q-1/p}$$

mit einer Zahl $c > 0$, die von s, t, p, q, aber nicht von M abhängt.

$\square$

4.2 Der Diagonaloperator $D_\sigma : l_p \longrightarrow l_q$

Im ersten Teil dieses Abschnitts fragen wir nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass der Operator $D_\sigma((\xi_j)_{j=1}^\infty) = (\sigma_j \xi_j)_{j=1}^\infty$ mit der erzeugenden Folge $\sigma = (\sigma_j)_{j=1}^\infty$ zum Operatorenideal $\mathcal{L}_{s,t}^{(e)}$ gehört. Aus unseren früheren Überlegungen ist klar, dass wir damit Aussagen über das Verhalten der Entropiezahlen der Einbettung $id : l_p(w) \longrightarrow l_q$ treffen. Wir folgen dabei im Wesentlichen den Ausführungen von Carl in [4]. Das Hauptresultat dieses ersten Teils, welches wir als Satz 8 formulieren, findet man in [4] als Theorem 2 (S.145).
Im zweiten Teil dieses Abschnitts werden wir ein aktuelles Resultat von Kühn verallgemeinern (vgl. [13]), was die Grundlage für unsere Untersuchungen im darauf folgenden Abschnitt darstellt.

Satz 8 *Es seien* $1 \le p, q \le \infty$, $1/r > \max(1/q - 1/p, 0)$, $0 < t \le \infty$ *und* $1/s = 1/r + 1/p - 1/q$. *Dann ist*

$$D_\sigma \in \mathcal{L}_{s,t}^{(e)}(l_p, l_q) \quad \textit{genau dann, wenn} \quad \sigma = (\sigma_j)_{j=1}^\infty \in l_{r,t}.$$

Für den Beweis dieses Satzes, teilen wir die Aussage in eine notwendige und eine hinreichende Bedingung, formulieren diese als die folgenden zwei Lemmata und beweisen sie separat. Wir beginnen mit der notwendigen Bedingung.

Lemma 10 *Es seien* $1 \le p, q \le \infty$, $1/r > \max(1/q - 1/p, 0)$, $0 < t \le \infty$ *und* $1/s = 1/r + 1/p - 1/q$. *Dann ist*

$$\sigma = (\sigma_j)_{j=1}^\infty \in l_{r,t}, \quad \textit{wenn} \quad D_\sigma \in \mathcal{L}_{s,t}^{(e)}(l_p, l_q).$$

Beweis Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $|\sigma_1| \ge |\sigma_2| \ge \cdots > 0$ gilt, da im Fall $\sigma_k = 0$ für alle $k \ge m$ die Aussage trivial ist. Jetzt definieren wir Operatoren $J \in \mathcal{L}(l_p^M, l_p)$ und $Q \in \mathcal{L}(l_p, l_p^M)$ durch

$$J(\xi_1, \ldots, \xi_M) := (\xi_1, \ldots, \xi_M, 0, 0, \ldots)$$

und

$$Q(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_1, \ldots, \xi_M).$$

Offensichtlich ist $\|J\| = \|Q\| = 1$, und der Operator $D_M = QD_\sigma J$ ist invertierbar. Nach Satz 6 gilt für $p \le q$

$$c_1 M^{1/q-1/p} \le e_M(id : l_p^M \longrightarrow l_q^M).$$

Diese Ungleichung bleibt aber auch für $p > q$ richtig. Denn wenn wir den Operator $id_1 : l_p^M \longrightarrow l_p^M$ mit

$$l_p^M \xrightarrow{id} l_q^M \xrightarrow{id_2} l_p^M$$

faktorisieren, gilt wiederum nach Satz 6

$$c_2 \le e_{2M}(id_1) \le e_M(id) e_M(id_2) \le e_M(id) c_3 M^{1/p-1/q}.$$

Jetzt können wir die Einbettung $id : l_p^M \longrightarrow l_q^M$ auf folgende Weise faktorisieren:

$$l_p^M \xrightarrow{D_M^{-1}} l_p^M \xrightarrow{J} l_p \xrightarrow{D_\sigma} l_q \xrightarrow{Q} l_q^M.$$

Also gilt für $1 \leq p, q \leq \infty$ wegen der Multiplikativität der Entropiezahlen

$$\begin{aligned} cM^{1/q-1/p} &\leq e_M(id : l_p^M \longrightarrow l_q^M) \\ &\leq \|Q\|\, e_M(D_\sigma)\, \|J\|\, \|D_M^{-1}\| \\ &\leq e_M(D_\sigma)|\sigma_M|^{-1} \end{aligned}$$

mit einer von M unabhängigen Konstanten $c > 0$. Daraus folgt

$$|\sigma_M| \leq c^{-1} M^{1/p-1/q} e_M(D_\sigma)$$

für alle $M \in \mathbb{N}$.
Dann gilt für die quasi-Norm der Folge $\sigma = (\sigma_j)_{j=1}^\infty$ im Lorentzraum $l_{r,t}$

$$\begin{aligned} \|(\sigma_j)_{j=1}^\infty | l_{r,t}\|^t = \sum_{j=1}^\infty j^{t/r-1}|\sigma_j|^t &\leq c^{-t} \sum_{j=1}^\infty j^{t(1/r+1/p-1/q)-1} e_j^t(D_\sigma) \\ &\leq c^{-t} \sum_{j=1}^\infty j^{t/s-1} e_j^t(D_\sigma) < \infty, \end{aligned}$$

nach Voraussetzung, also $\sigma = (\sigma_j)_{j=1}^\infty \in l_{r,t}$.

□

Jetzt beweisen wir die hinreichende Bedingung.

Lemma 11 *Es seien* $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/r > \max(1/q - 1/p, 0)$, $0 < t \leq \infty$ *und* $1/s = 1/r + 1/p - 1/q$. *Dann ist*

$$D_\sigma \in \mathcal{L}_{s,t}^{(e)}(l_p, l_q), \qquad \textit{wenn} \qquad \sigma = (\sigma_j)_{j=1}^\infty \in l_{r,t}.$$

Beweis Wir beschränken uns vorerst auf den Spezialfall $(\sigma_j)_{j=1}^\infty \in l_{r,\infty}$ und gehen davon aus, dass $|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq \cdots \geq 0$ gilt. Wir definieren die Operatoren $J^{(k)} \in \mathcal{L}(l_p^{2^k}, l_p)$, $Q^{(k)} \in \mathcal{L}(l_p, l_p^{2^k})$ und $D_\sigma^{(k)} \in \mathcal{L}(l_p^{2^k}, l_q^{2^k})$ durch

$$\begin{aligned} J^{(k)}(\xi_1, \ldots, \xi_{2^k}) &= (\underbrace{0; 0, 0; \ldots;}_{2^k-1 \text{ Nullen}} \xi_1, \ldots, \xi_{2^k}; 0, 0, \ldots), \\ Q^{(k)}(\xi_1, \xi_2, \ldots) &= (\xi_{2^k}, \ldots, \xi_{2^{k+1}-1}) \quad \text{und} \\ D_\sigma^{(k)}(\xi_1, \ldots, \xi_{2^k}) &= (\sigma_{2^k}\xi_1, \ldots, \sigma_{2^{k+1}-1}\xi_{2^k}) \end{aligned}$$

für $k \geq 0$. Offensichtlich gilt $\|J^{(k)}\| = \|Q^{(k)}\| = 1$ und $D_\sigma = \sum_{k=0}^\infty J^{(k)} D_\sigma^{(k)} Q^{(k)}$.
Jetzt wählen wir die Zahl s so, dass $1/s > 1/r + 1/p - 1/q$ gilt und erhalten wegen Satz 7

$$\begin{aligned} \lambda_{s,s}^{(e)}(D_\sigma^{(k)}) &\leq \lambda_{s,s}^{(e)}(id : l_p^{2^k} \longrightarrow l_q^{2^k})\, \|D_\sigma^{(k)} : l_p^{2^k} \longrightarrow l_p^{2^k}\| \\ &\leq c_1 2^{k(1/s+1/q-1/p)} |\sigma_{2^k}| \end{aligned}$$

mit einer Zahl $c_1 > 0$, die von s, p, q, aber nicht von k abhängt.
Da $\lambda_{s,s}^{(e)}$ zu einer α-Norm äquivalent ist (vgl. Theorem 6.2.5 in [19], S. 92-93), folgt wegen $1/s - 1/r + 1/q - 1/p > 0$

$$\begin{aligned}
\lambda_{s,s}^{(e)}\left(\sum_{k=0}^{m-1} J^{(k)} D_\sigma^{(k)} Q^{(k)}\right) &\leq c_2\left(\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_{s,s}^{(e)}(J^{(k)} D_\sigma^{(k)} Q^{(k)})^\alpha\right)^{1/\alpha} \\
&\leq c_2\left(\sum_{k=0}^{m-1} \|J^{(k)}\|^\alpha \lambda_{s,s}^{(e)}(D_\sigma^{(k)})^\alpha \|Q^{(k)}\|^\alpha\right)^{1/\alpha} \\
&\leq c_3\left(\sum_{k=0}^{m-1} 2^{k\alpha(1/s+1/q-1/p)} |\sigma_{2^k}|^\alpha\right)^{1/\alpha} \\
&\leq c_4\left(\sum_{k=0}^{m-1} 2^{k\alpha(1/s-1/r+1/q-1/p)}\right)^{1/\alpha} \\
&\leq c_5 2^{m(1/s-1/r+1/q-1/p)}
\end{aligned}$$

mit von k und m unabhängigen Zahlen $c_2, c_3, c_4, c_5 > 0$.
Aus Lemma 2 folgt $\lambda_{s,\infty}^{(e)}(T) \leq c\lambda_{s,s}^{(e)}(T)$ für jeden Operator $T \in \mathcal{L}_{s,s}^{(e)}$. Also erhalten wir

$$2^{(m-1)/s} e_{2^{m-1}}\left(\sum_{k=0}^{m-1} J^{(k)} D_\sigma^{(k)} Q^{(k)}\right) \leq c_6 2^{m(1/s-1/r+1/q-1/p)},$$

und deshalb ist

$$e_{2^{m-1}}\left(\sum_{k=0}^{m-1} J^{(k)} D_\sigma^{(k)} Q^{(k)}\right) \leq c_7 2^{m(-1/r+1/q-1/p)}$$

mit Zahlen $c_6, c_7 > 0$, die von s, r, p, q, aber nicht von k oder m abhängen.
Jetzt berechnen wir die verbleibende Summe $\sum_{k=m}^{\infty} J^{(k)} D_\sigma^{(k)} Q^{(k)}$ und wählen dazu s so, dass $1/r + 1/p - 1/q > 1/s > \max(1/p - 1/q, 0)$ gilt. Das ist immer möglich, da $1/r > \max(1/q - 1/p, 0)$ ist. Wegen $1/s - 1/r + 1/q - 1/p < 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_{s,s}^{(e)}\left(\sum_{k=m}^{\infty} J^{(k)} D_\sigma^{(k)} Q^{(k)}\right) &\leq c_8\left(\sum_{k=m}^{\infty} 2^{k\alpha(1/s-1/r+1/q-1/p)}\right)^{1/\alpha} \\
&\leq c_8 2^{m(1/s-1/r+1/q-1/p)}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha(1/s-1/r+1/q-1/p)}\right)^{1/\alpha} \\
&\leq c_9 2^{m(1/s-1/r+1/q-1/p)}
\end{aligned}$$

durch die gleiche Argumentation wie zuvor, wobei die Zahlen $c_8, c_9 > 0$ nicht von m oder k abhängen. Es folgt wiederum

$$e_{2^{m-1}}\left(\sum_{k=m}^{\infty} J^{(k)} D_\sigma^{(k)} Q^{(k)}\right) \leq c_{10} 2^{m(-1/r+1/q-1/p)}$$

für eine Zahl $c_{10} > 0$, die von s, r, p, q, aber nicht von k oder m abhängt.
Mit der Additivität der Entropiezahlen gelangen wir zu

$$\begin{aligned} e_{2^m}(D_\sigma) &\leq e_{2^{m-1}}\left(\sum_{k=0}^{m-1} J^{(k)} D_\sigma^{(k)} Q^{(k)}\right) + e_{2^{m-1}}\left(\sum_{k=m}^{\infty} J^{(k)} D_\sigma^{(k)} Q^{(k)}\right) \\ &\leq (c_7 + c_{10}) 2^{m(-1/r+1/q-1/p)}. \end{aligned}$$

Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$, dann wählen wir m so, dass $2^m \leq n < 2^{m+1}$ gilt. Dann folgt aus der Monotonie der Entropiezahlen und den vorangegangenen Rechnungen

$$\begin{aligned} e_n(D_\sigma) \leq e_{2^m}(D_\sigma) &\leq (c_7 + c_{10}) 2^{m(-1/r+1/q-1/p)} \\ &\leq c_{11} 2^{(m+1)(-1/r+1/q-1/p)} \\ &\leq c_{11} n^{-1/r+1/q-1/p} \end{aligned}$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten $c_{11} > 0$. Also gilt

$$D_\sigma \in \mathcal{L}_{s,\infty}^{(e)}(l_p, l_q) \quad \text{für} \quad 1/s = 1/r + 1/p - 1/q.$$

Für den verbleibenden Teil der Aussage benötigen wir zwei Ergebnisse der reellen Interpolationstheorie, die wir schon in Abschnitt 3.3 aufgeführt haben. Also haben die Variablen $\Theta, r_1, r_2, s_1, s_2$ jetzt die gleiche Bedeutung wie in Satz 2 und Satz 3. Dann können wir für jedes r mit $1/r > \max(1/q - 1/p, 0)$ Werte für r_1, r_2 und Θ finden, so dass $1/r_1 > 1/r > 1/r_2 > \max(1/q-1/p, 0)$ und $1/r = (1-\Theta)/r_1 + \Theta/r_2$ ist. Dann gilt, wie schon gezeigt, für den Operator T, der jede Folge $\sigma = (\sigma_j)_{j=1}^\infty$ linear und stetig auf den Diagonaloperator D_σ abbildet,

$$T : l_{r_i,\infty} \longrightarrow \mathcal{L}_{s_i,\infty}^{(e)}(l_p, l_q),$$

wobei $1/s_i = 1/r_i + 1/p - 1/q$ für $i = 0, 1$ gilt. Mit Hilfe von Satz 2 und Satz 3 erhalten wir dann auch

$$T : l_{r,t} \longrightarrow \mathcal{L}_{s,t}^{(e)}(l_p, l_q)$$

mit $1/s = (1-\Theta)/s_1 + \Theta/s_2 = 1/r + 1/p - 1/q$. Damit ist der Beweis komplett. $\square$

Nun kommen wir zum zweiten Teil dieses Abschnitts und beginnen mit zwei neueren Aussagen über die Entropiezahlen von Diagonaloperatoren. Sie gehen auf Kühn zurück und können in [13] als Theorem 1 und Theorem 3 (S. 312-313) nachgeschlagen werden. Der erste Satz behandelt den Fall einer Diagonalfolge, die im Wesentlichen wie eine Potenz abfällt.

Satz 9 *Es seien* $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha > \max(1/q - 1/p, 0)$ *und* $\delta \in \mathbb{R}$. *Aus* $(\sigma_n)_{n=1}^\infty \sim n^{-\alpha}(1 + \log_2 n)^\delta$ *folgt dann*

$$e_n(D_\sigma : l_p \longrightarrow l_q) \sim n^{1/q-1/p-\alpha}(1 + \log_2 n)^\delta.$$

Bemerkung 11 *Kühn vermeidet hier absichtlich die Sprache der Operatorenideale, da die direkte Bedingung $(\sigma_n)_{n=1}^\infty \sim n^{-\alpha}(1+\log_2 n)^\delta$ eine feinere Skala bedeutet als die Zugehörigkeit von $(\sigma_n)_{n=1}^\infty$ zu einem Lorentzraum $l_{r,t}$. So unterscheidet zum Beispiel die Lorentz-Skala für festes $\alpha > 0$ in der obigen Bedingung nicht zwischen verschiedenen $\delta > 0$.*

Der zweite Satz trifft eine Aussage über nur noch logarithmisch abfallende Diagonalfolgen, also für den Fall $\alpha = 0$ im vorigen Satz. Um einen beschränkten Operator D_σ zu erhalten, müssen wir $p \le q$ fordern, vergleiche dazu Lemma 1.

Satz 10 *Es seien $1 \le p \le q \le \infty$ und $\delta > 0$. Aus $(\sigma_n)_{n=1}^\infty \sim (1+\log_2 n)^{-\delta}$ folgt dann*

$$e_n(D_\sigma : l_p \longrightarrow l_q) \sim \begin{cases} n^{1/q-1/p}(1+\log_2 n)^{1/p-1/q-\delta} & : \quad \delta \ge 1/p - 1/q \\ n^{-\delta} & : \quad \delta \le 1/p-1/q. \end{cases}$$

Bemerkung 12 *Da der Beweis Methoden verwendet, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, verweisen wir auf die Ausführungen in [13] (S.316-317).*

Ausgehend vom Beweis des Theorems 1 in [13] und der Beweisidee von Lemma 11 werden wir jetzt Satz 9 verallgemeinern und die neue Variante auch beweisen. Dafür ist eine Klassifizierung bestimmter Folgen zweckmäßig. Wir bezeichnen eine monoton fallende Folge $(\sigma_k)_{k=1}^\infty$ positiver reeller Zahlen als verallgemeinerte Gewichtsfolge, falls eine Zahl $J \in \mathbb{N}$ und Konstanten $d_1^{(\sigma)}, d_2^{(\sigma)} > 0$ existieren, so dass

$$d_1^{(\sigma)} \sigma_{2^j} \le \sigma_{2^{j+1}} \le d_2^{(\sigma)} \sigma_{2^j} \tag{21}$$

für alle natürlichen Zahlen $j \ge J$ gilt.
Aus der Monotonie folgt sofort, dass $d_1^{(\sigma)} \le d_2^{(\sigma)} \le 1$ gelten muss.

Satz 11 *Es seien $1 \le p, q \le \infty$ und $\sigma = (\sigma_k)_{k=1}^\infty$ eine verallgemeinerte Gewichtsfolge mit $-\log_2 d_2^{(\sigma)} > \max(1/q - 1/p, 0)$. Dann gilt*

$$e_n(D_\sigma : l_p \longrightarrow l_q) \sim n^{1/q-1/p}\sigma_n.$$

Beweis Zuerst rechtfertigen wir die Abschätzung nach oben. Dafür verschaffen wir uns zwei einfache Zusammenhänge zwischen den Gliedern der verallgemeinerten Gewichtsfolge. Aus der linken Seite von (21) folgt

$$\sigma_{2^n} \le 2^{-\log_2 d_1^{(\sigma)}(N-n)} \sigma_{2^N} \tag{22}$$

für $n \le N$. Aus der rechten Seite von (21) folgt

$$\sigma_{2^m} \le 2^{\log_2 d_2^{(\sigma)}(m-N)} \sigma_{2^N} \tag{23}$$

für $m \geq N$.
Jetzt sei D_σ^n für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ der n-te dyadische Teil des Operators D_σ, der durch

$$D_\sigma^n(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (0, \ldots, 0, \sigma_{2^n}\xi_{2^n}, \ldots, \sigma_{2^{n+1}-1}\xi_{2^{n+1}-1}, 0, 0, \ldots)$$

definiert wird, wobei man mit den Bezeichnungen aus Lemma 11 auch $D_\sigma^n = J^{(n)} D_\sigma^{(n)} Q^{(n)}$ schreiben kann. Offensichtlich gilt

$$D_\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} D_\sigma^n.$$

Nun wählen wir ähnlich wie zu Beginn des Beweises von Lemma 11 $s > 0$ so, dass $1/s > 1/p - 1/q - \log_2 d_1^{(\sigma)}$ gilt und berücksichtigen, dass die Ideal-quasi-Norm $\lambda_{s,\infty}^{(e)}$ äquivalent zu einer r-Norm ist für ein geeignetes r mit $0 < r < 1$. Für jedes feste $N \in \mathbb{N}$ gilt dann wegen Satz 7 und der Multiplikativität der Entropiezahlen

$$\begin{aligned}
\left[\lambda_{s,\infty}^{(e)}\left(\sum_{n=0}^{N} D_\sigma^n\right)\right]^r &\leq c_1 \sum_{n=0}^{N} [\lambda_{s,\infty}^{(e)}(D_\sigma^n)]^r \\
&\leq c_1 \sum_{n=0}^{N} \sigma_{2^n}^r [\lambda_{s,\infty}^{(e)}(id : l_p^{2^n} \longrightarrow l_q^{2^n})]^r \\
&\leq c_2 \sum_{n=0}^{N} \sigma_{2^n}^r 2^{(1/s+1/q-1/p)nr} \\
&\leq c_2 \sigma_{2^N}^r 2^{(1/s+1/q-1/p)Nr} \sum_{n=0}^{N} \sigma_{2^n}^r \sigma_{2^N}^{-r} 2^{(1/s+1/q-1/p)(n-N)r} \\
&\leq c_2 2^{(1/s+1/q-1/p)Nr} \sigma_{2^N}^r \sum_{n=0}^{N} 2^{(1/s+1/q-1/p+\log_2 d_1^{(\sigma)})(n-N)r} \\
&\leq c_3 2^{(1/s+1/q-1/p)Nr} \sigma_{2^N}^r
\end{aligned}$$

für von N unabhängige Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$. Dabei haben wir in der vorletzten Zeile die Abschätzung (22) entscheidend ausgenutzt. Aus dieser Rechnung folgt

$$e_{2^N}\left(\sum_{n=0}^{N} D_\sigma^n\right) \leq c_4 2^{(1/q-1/p)N} \sigma_{2^N}, \tag{24}$$

wobei die Zahl $c_4 > 0$ von N unabhängig ist.
Jetzt betrachten wir die Ideal-quasi-Norm $\lambda_{s,\infty}^{(e)}$ für den hinteren Teil der Operatorensumme. Diesmal wählen wir $s > 0$ so, dass $1/p - 1/q < 1/s < 1/p - 1/q - \log_2 d_2^{(\sigma)}$ gilt und erhalten durch ähnliche Argumentation wie oben

$$\left[\lambda_{s,\infty}^{(e)}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} D_\sigma^n\right)\right]^r \leq c_5 2^{(1/s+1/q-1/p)Nr} \sigma_{2^N}^r$$

mit einer von N unabhängigen Konstanten $c_5 > 0$. Diesmal haben wir die Abschätzung (23) benutzt. Es folgt jetzt wiederum aus der obigen Abschätzung

$$e_{2^N}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} D_\sigma^n\right) \leq c_6 2^{(1/q-1/p)N} \sigma_{2^N}, \tag{25}$$

wobei die Zahl $c_6 > 0$ von N unabhängig ist.
Unter Verwendung der Additivität der Entropiezahlen und den Ungleichungen (24) und (25) gelangen wir zu

$$e_{2\cdot 2^N}(D_\sigma) \leq e_{2^N}\left(\sum_{n=0}^{N} D_\sigma^n\right) + e_{2^N}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} D_\sigma^n\right) \leq (c_4 + c_6) 2^{(1/q-1/p)N} \sigma_{2^N}.$$

Wegen der Monotonie der Folge $\sigma = (\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ und Bedingung (21) folgt jetzt die obere Abschätzung.
Für die Abschätzung nach unten bezeichnen wir mit R_n die Einschränkung von D_σ auf die ersten n Koordinaten. Dann können wir den Operator $id : l_p^n \longrightarrow l_q^n$ wie folgt faktorisieren :

$$l_p^n \xrightarrow{T_n} l_p^n \xrightarrow{R_n} l_q^n,$$

wobei $T_n : l_p^n \longrightarrow l_p^n$ durch

$$T_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\sigma_1^{-1}\xi_1, \ldots, \sigma_n^{-1}\xi_n)$$

definiert wird. Dann liefert uns die Multiplikativität der Entropiezahlen wegen $\|T_n\| = \sigma_n^{-1}$

$$e_n(D_\sigma) \geq e_n(R_n) \geq \sigma_n \cdot e_n(id : l_p^n \longrightarrow l_q^n),$$

und nach Satz 6 (vgl. auch Bew. von Lemma 10) folgt das gewünschte Ergebnis

$$e_n(D_\sigma) \geq n^{1/q-1/p} \sigma_n.$$

□

4.3 Der Operator $id : l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}^{M_j}) \longrightarrow l_{q_2}(l_{p_2}^{M_j})$

Bevor wir die Hauptaussage dieses Abschnitts formulieren können, benötigen wir eine weitere Charakterisierung für Zahlenfolgen (vgl. [18]). Eine Folge $a = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ positiver reeller Zahlen nennen wir zulässig, falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(Z1) Es existieren zwei Konstanten $d_1^{(a)}, d_2^{(a)} > 0$, so dass

$d_1^{(a)} a_j \leq a_{j+1} \leq d_2^{(a)} a_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.

(Z2) Es existiert eine Konstante $\kappa_a \in \mathbb{N}$, so dass

$2a_j \leq a_k$ für alle j, k mit $k \geq j + \kappa_a$ gilt.

In [18] werden solche Folgen *admissible almost strongly increasing* genannt, wir verwenden allerdings aus Gründen der Lesbarkeit einfach den Begriff der zulässigen Folge, auch wenn der englische Name die Eigenschaften der Folge besser wiederspiegelt.

Bemerkung 13 *Eine zulässige Folge $a = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ genügt der Abschätzung*

$$a_j \leq \max\{2, (d_2^{(a)})^{\kappa_a}\} 2^{-\frac{l-j}{\kappa_a}} a_l = c_a 2^{-\frac{l-j}{\kappa_a}} a_l \tag{26}$$

für beliebige l, j mit $l \geq j$ und einer Konstanten $c_a \geq 2$.

Die folgende Bemerkung zielt darauf ab, im Beweis des nächsten Satzes einige technische Schwierigkeiten zu umgehen.

Bemerkung 14 *Es seien $\gamma = (\gamma_k)_{k=1}^{\infty}$ und $N = (N_k)_{k=1}^{\infty}$ zulässige Folgen. Setzt man jetzt für $\kappa = \max(\kappa_\gamma, \kappa_N)$*

$$\beta_j = \gamma_{j\kappa} \quad \textit{und} \quad M_j = \sum_{k=(j-1)\kappa+1}^{j\kappa} N_k$$

für alle $j \in \mathbb{N}$, dann besitzen die Räume $l_q(\gamma_k l_p^{N_k})$ und $l_q(\beta_j l_p^{M_j})$ äquivalente Normen, und es gelten die folgenden Beziehungen :

$$2\beta_j \leq \beta_{j+1} \leq (d_2^{(\gamma)})^{\kappa} \beta_j \quad \textit{und} \tag{27}$$

$$2M_j \leq M_{j+1} \leq (d_2^{(N)})^{\kappa} M_j \quad \textit{für alle } j \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Der folgende Satz ist für $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$ und $0 < q_1, q_2 \leq \infty$ in [18] (S.8) zu finden, dort wurde er aber ursprüglich mit anderen Methoden bewiesen.

Satz 12 *Es seien* $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $1 < q_1, q_2 \leq \infty$, $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ *eine zulässige Folge natürlicher Zahlen und* $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ *eine zulässige Gewichtsfolge positiver, reeller Zahlen. Dann gilt:*

$$e_{M_L}(id : l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}^{M_j}) \longrightarrow l_{q_2}(l_{p_2}^{M_j})) \sim \beta_L^{-1} M_L^{1/p_2 - 1/p_1}.$$

Beweis *Schritt 1*
Wir beschränken uns vorerst auf den Fall $p_1 = q_1$ und $p_2 = q_2$. Offensichtlich ist $l_{p_2}(l_{p_2}^{M_j}) = l_{p_2}$. Wenn wir $w_n = \beta_{J(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen, wobei $J(n)$ die Umkehrfunktion zu $n(J) = \sum_{j=1}^{J} M_j$ ist, dürfen wir auch $l_{p_1}(\beta_j l_{p_1}^{M_j}) = l_{p_1}(w)$ schreiben. Dabei können wir wegen Bemerkung 14 für die Folgen $\beta = (\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ und $M = (M_j)_{j=1}^{\infty}$ o.B.d.A. die Beziehungen (27) und (28) voraussetzen. Wir wollen hier Satz 11 anwenden. Die dortige Aussage über Diagonaloperatoren lässt sich, wie schon in Abschnitt 2.1 erwähnt, für die Einbettung $id : l_{p_1}(w) \longrightarrow l_{p_2}$ formulieren, wenn man $w_n = \sigma_n^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ setzt. Um die Voraussetzungen von Satz 11 zu erfüllen, müssen wir beweisen, dass die Folge $\sigma = (\sigma_j)_{j=1}^{\infty} = (w_n^{-1})_{n=1}^{\infty}$ eine verallgemeinerte Gewichtsfolge mit $d_2^{(\sigma)} < 1$ ist, was wir in Schritt 3 tun werden und jetzt als bewiesen voraussetzen. Wir wissen also nach Satz 11 und der obigen Übersetzungsvorschrift:

$$e_{n(J)}(id : l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}^{M_j}) \longrightarrow l_{q_2}(l_{p_2}^{M_j})) \sim n(J)^{1/p_2 - 1/p_1} \beta_{J(n)}^{-1}.$$

Die Funktion $n(J)$ genügt wegen (26) der Abschätzung

$$n(J) = \sum_{j=1}^{J} M_j \leq c_M M_J \sum_{j=1}^{J} 2^{-\frac{J-j}{\kappa_M}} \leq \tilde{c} M_J \tag{29}$$

mit einer natürlichen Zahl $\tilde{c} > 0$. Andererseits gilt sicher $n(J) \geq M_J$, und wegen der Monotonie der Entropiezahlen folgt sofort die gewünschte Abschätzung nach unten, d.h.

$$e_{M_J} \geq c M_J^{1/p_2 - 1/p_1} \beta_J^{-1}$$

für eine Konstante $c > 0$.
Für die Abschätzung nach oben erhalten wir mit (29) vorerst

$$e_{\tilde{c} M_J} \leq \hat{c} M_J^{1/p_2 - 1/p_1} \beta_J^{-1}$$

für eine Konstante $\hat{c} > 0$. Um die Ungleichung in die gewünschte Form zu bringen, wählen wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit $2^k > \tilde{c}$. Dann folgt für $L = J + k\kappa_M$ aus der Bedingung (Z1) und der letzten Abschätzung

$$e_{M_L} \leq e_{\tilde{c} M_J} \leq \hat{c} M_J^{1/p_2 - 1/p_1} \beta_J^{-1} \leq C M_L^{1/p_2 - 1/p_1} \beta_L^{-1}$$

für eine Konstante $C > 0$.

Schritt 2
Jetzt werden wir die Beschränkungen von Schritt 1 mit Hilfe reeller Interpolation stufenweise fallen lassen. Vorerst gelte immer noch $p_2 = q_2$. Für die zulässige Folge $\beta = (\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ ist sicher auch die Folge $(\beta_j^t)_{j=1}^{\infty}$ für $t > 0$ zulässig. Also wissen wir für $i = 1, 2$

$$e_{M_L}(id_i : l_{p_1}(\beta_j^{s_i} l_{p_1}^{M_j}) \longrightarrow l_{p_2}(l_{p_2}^{M_j})) \sim \beta_L^{-s_i} M_L^{1/p_2 - 1/p_1},$$

wenn $s_1, s_2 > 0$. Wir definieren jetzt die Operatoren S, T, R durch

$$\begin{aligned}
S((\xi_{j,l})_{j\in\mathbb{N},l=1,\dots,M_j}) &= (\eta_{j,l})_{j,l\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad \eta_{j,l} = \begin{cases} \xi_{j,l} & : \ 1 \le l \le M_j \\ 0 & : \ \text{sonst,} \end{cases} \\
T((\xi_{j,l})_{j,l\in\mathbb{N}}) &= (\xi_{j,l})_{j\in\mathbb{N},l=1,\dots,M_j} \quad \text{und} \\
R((\xi_{j,l})_{j,l\in\mathbb{N}}) &= (\eta_{j,l})_{j,l\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad \eta_{j,l} = \begin{cases} \xi_{j,l} & : \ 1 \le l \le M_j \\ 0 & : \ \text{sonst,} \end{cases}
\end{aligned}$$

so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
l_{q_1}(\beta_j^s l_{p_1}^{M_j}) \arrow[r, "id"] \arrow[d, "S"'] & l_{p_2}(l_{p_2}^{M_j}) \\
l_{q_1}(\beta_j^s l_{p_1}) \arrow[r, "R"] & l_{p_2}(l_{p_2}). \arrow[u, "T"']
\end{tikzcd}$$

Offensichtlich gilt $\|S\| = \|T\| = 1$. Lassen wir jetzt für $i = 1, 2$ den Operator R von $l_{q_1}(\beta_j^{s_i} l_{p_1})$ nach $l_{p_2}(l_{p_2})$ wirken und nennen diese beiden Operatoren R_1 und R_2, so erhalten wir mit der Multiplikativität der Entropiezahlen und den Sätzen 4 und 5 für $0 < \Theta < 1$ und eine Konstante $c > 0$

$$\begin{aligned}
e_{2M_L - 1}(id) &\le e_{2M_L-1}(R) \le 2 e_{M_L}(R_1)^{1-\Theta} e_{M_L}(R_2)^{\Theta} \\
&\le 2 e_{M_L}(id_1)^{1-\Theta} e_{M_L}(id_2)^{\Theta} \\
&\le c \left(\beta_L^{-s_1} M_L^{1/p_2 - 1/p_1}\right)^{1-\Theta} \left(\beta_L^{-s_2} M_L^{1/p_2 - 1/p_1}\right)^{\Theta} \\
&\le c \beta_L^{-s} M_L^{1/p_2 - 1/p_1},
\end{aligned}$$

wobei wir die Operatoren R_i für $i = 1, 2$ mit $R_i = T^{-1} id_i S^{-1}$ faktorisiert haben und $s_1, s_2 > 0$ mit $s = (1 - \Theta)s_1 + \Theta s_2$ gilt.
Um die Abschätzung nach oben endgültig zu beweisen, lassen wir jetzt auch die Bedingung $p_2 = q_2$ fallen und wenden das obige Verfahren analog für den Bildraum an. Wegen

$$e_{M_L}(id : l_{q_1}(\beta_j^t l_{p_1}^{M_j}) \longrightarrow l_{p_2}(l_{p_2}^{M_j})) = e_{M_L}(l_{q_1}(l_{p_1}^{M_j}) \longrightarrow l_{p_2}(\beta_j^{-t} l_{p_2}^{M_j}))$$

für $t > 0$ erhalten wir wieder nach Anwendung der Sätze 4 und 5 für $0 < \Theta < 1$ und eine Konstante $c > 0$

$$\begin{aligned} e_{2M_L-1}(id : l_{q_1}(\beta_j^s l_{p_1}^{M_j}) \longrightarrow l_{q_2}(l_{p_2}^{M_j})) &\leq c\left(\beta_L^{-s_1} M_L^{1/p_2-1/p_1}\right)^{1-\Theta}\left(\beta_L^{-s_2} M_L^{1/p_2-1/p_1}\right)^{\Theta} \\ &\leq c\beta_L^{-s} M_L^{1/p_2-1/p_1}, \end{aligned}$$

wobei $s_1, s_2 > 0$ mit $s = (1-\Theta)s_1 + \Theta s_2$ gilt. Damit ist die Abschätzung nach oben vollständig bewiesen.

Für die Abschätzung nach unten betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}^{M_j}) & \xrightarrow{id} & l_{q_2}(l_{p_2}^{M_j}) \\ S_j \big\uparrow & & \big\downarrow T_j \\ l_{p_1}^{M_j} & \xrightarrow{id^{(j)}} & l_{p_2}^{M_j}. \end{array}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} S_j((\xi_l)_{l=1}^{M_j}) &= (0,\ldots,0,\xi_{j,1},\ldots,\xi_{j,M_j},0,0,\ldots) \quad \text{mit} \quad \xi_{j,l} = \xi_l, \\ T_j((\xi_{k,l})_{k\in\mathbb{N},l=1,\ldots,M_j}) &= (\delta_{j,k}\xi_{k,l})_{l=1}^{M_j} \end{aligned}$$

und $id^{(j)}$ der Operator aus Satz 6. Wegen $\|S_j\| = \beta_j$ und $\|T_j\| = 1$ folgt aus der Multiplikativität der Entropiezahlen

$$e_{M_L}(id^{(L)}) \leq \beta_L e_{M_L}(id)$$

und wir erhalten mit Satz 6

$$c\beta_L^{-1} M_L^{1/p_2-1/p_1} \leq e_{M_L}(id).$$

Damit gilt insgesamt

$$e_{M_L}(id : l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}^{M_j}) \longrightarrow l_{q_2}(l_{p_2}^{M_j})) \sim \beta_L^{-1} M_L^{1/p_2-1/p_1}.$$

Schritt 3

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Folge $\sigma = (\sigma_n)_{n=1}^\infty = (w_n^{-1})_{n=1}^\infty$ der Bedingung (21) mit $d_2^{(\sigma)} < 1$ genügt. Wenn wir die Folge $\tilde{w} = (\tilde{w}_n)_{n=1}^\infty$ mit $\tilde{w}_n = \beta_{J(n)+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren, haben die Räume $l_p(\beta_j l_p^{M_j})$ und $l_p(\tilde{w})$ äquivalente Normen. Jetzt fixieren wir J und setzen für $n(J) \leq n < n(J+1)$

$$\hat{w}_n = \frac{w_{n(J)}(n(J+1)-n) + w_{n(J+1)}(n-n(J))}{n(J+1)-n(J)}.$$

Dann genügt es, die Bedingung (21) mit $d_2^{(\sigma)} < 1$ für die Folge $\sigma = (\sigma_n)_{n=1}^\infty = (\hat{w}_n^{-1})_{n=1}^\infty = \hat{w}^{-1}$ zu beweisen, da die Räume $l_p(w)$, $l_p(\hat{w})$ und $l_p(\tilde{w})$ alle äquivalente Normen besitzen und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$w_n \leq \hat{w}_n \leq \tilde{w}_n$$

gilt. Für $n(J) \leq 2^n < 2^{n+1} \leq n(J+1)$ bekommen wir

$$\frac{1}{1+c_\beta \tilde{c}} \leq \frac{\sigma_{2^{n+1}}}{\sigma_{2^n}} \leq 1 - \frac{1}{c_\beta c_M}.$$

und für $n(J-1) \leq 2^n < n(J) < 2^{n+1} \leq n(J+1)$ ergibt sich

$$\frac{1}{1+c_\beta^2 \tilde{c}} \leq \frac{\sigma_{2^{n+1}}}{\sigma_{2^n}} \leq 1 - \frac{1}{c_\beta^2 c_M^2},$$

wobei $\tilde{c}$ die Konstante aus Formel (29) ist und c_β, c_M die Konstanten auf der rechten Seite der Formeln (27) und (28) sind. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

4.4 Der Operator $id : l_{q_1}(\beta_j l_{p_1}(w)) \longrightarrow l_{q_2}(l_{p_2})$

Über das Verhalten der Entropiezahlen dieser Einbettung in ihrer allgemeinsten Form ist bislang wenig bekannt. Ein Resultat aus dem letzten Jahr (vgl. [14], Theorem 3, S. 19-21) behandelt den Fall $\beta_j = 2^{jd}$ für ein $d > 0$ und $w_k = (1+k)^\alpha$ für ein $\alpha > 0$. Der Beweis benutzt als wesentliches Argument das Ergebnis von Carl bezüglich des Diagonaloperators D_σ, welches wir als Satz 8 formuliert haben.
Wir werden jetzt diese Aussage etwas verallgemeinern und eine andere Beweistechnik vorführen, die auf unseren Satz 11 zurückgreift.

Satz 13 *Es seien* $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$, $d > 0$ *und*

$$w^{(\alpha,\delta)} = (w_k^{(\alpha,\delta)})_{k=1}^\infty = \left(k^\alpha (1+\log_2 k)^\delta\right)_{k=1}^\infty$$

für $\alpha > 0$ *und* $\delta \in \mathbb{R}$. *Dann gilt für alle* $k \in \mathbb{N}$

$$e_k(id : l_{q_1}(2^{jd} l_{p_1}((w^{(\alpha,\delta)})^{1/p_1 - 1/p_2})) \longrightarrow l_{q_2}(l_{p_2})) \sim (k \cdot w_k^{(\alpha,\delta)})^{1/p_2 - 1/p_1}.$$

Beweis *Schritt 1*
Zuerst beweisen wir die Abschätzung nach oben. Dafür betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} l_{q_1}(2^{jd} l_{p_1}((w^{(\alpha,\delta)})^{1/p_1-1/p_2})) & \xrightarrow{id_j} & l_{q_2}(l_{p_2}) \\ {\scriptstyle P_j}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle E_j} \\ l_{p_1}((w^{(\alpha,\delta)})^{1/p_1-1/p_2}) & \xrightarrow{I} & l_{p_2} \end{array}$$

Dabei ist P_j die Projektion auf die j-te Koordinate, I die Identität und E_j der Operator, der jeder Folge $x \in l_{p_2}$ die Folge $(0, \ldots, 0, x, 0, 0, \ldots)$ zuordnet, wobei x hier an der j-ten Koordinate steht.
Offensichtlich ist $id = \sum_{j=1}^\infty id_j$, wobei $id_j = E_j I P_j$ mit $\|P_j\| \le 2^{-jd}$ und $\|E_j\| \le 1$ gilt. Wegen $e_k(I) = e_k(D_\sigma : l_{p_1} \longrightarrow l_{p_2})$ mit $\sigma_k = (w_k^{(\alpha,\delta)})^{1/p_2 - 1/p_1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit der Multiplikativität der Entropiezahlen nach Satz 11

$$e_k(id_j) \le c_1 2^{-jd} \sigma_k k^{1/p_2 - 1/p_1} = c_1 2^{-jd} \left(k^{\alpha+1}(1+\log_2 k)^\delta\right)^{1/p_2 - 1/p_1} \tag{30}$$

für eine Konstante $c_1 > 0$.
Wegen der Additivität der Entropiezahlen gilt nun für jedes $L \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e_k(id) &\le e_k\left(\sum_{l=1}^L id_l\right) + \left\|\sum_{l=L+1}^\infty id_l\right\| \\ &\le \sum_{l=1}^L e_{k_l}(id_l) + \left\|\sum_{l=L+1}^\infty id_l\right\|, \end{aligned} \tag{31}$$

wenn $\sum_{l=1}^{L} k_l \leq k$ ist.
Für den hinteren Term in (31) gilt sicher

$$\left\| \sum_{l=L+1}^{\infty} id_l \right\| \leq c_2 2^{-Ld} \tag{32}$$

für eine von L unabhängige Konstante $c_2 > 0$. Dann wählen wir jetzt L so, dass

$$L(k) \sim \frac{1/p_1 - 1/p_2}{d} \left((\alpha+1) \log_2 k + \delta \log_2 (1 + \log_2 k) \right)$$

gilt. Daraus folgt mit (32)

$$\left\| \sum_{l=L+1}^{\infty} id_l \right\| \leq c_3 (k w_k^{(\alpha,\delta)})^{1/p_2 - 1/p_1}$$

für eine Konstante $c_3 > 0$.
Jetzt behandeln wir den ersten Term in (31). Dazu definieren wir für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ die Zahlen $\tilde{k_l}$ so, dass $\tilde{k_l} \sim k \cdot 2^{-l\varepsilon}$ gilt. Dann ist

$$\sum_{l=1}^{L} \tilde{k_l} < k \cdot c_\varepsilon$$

für ein von L unabhängiges $c_\varepsilon > 0$. Wenn wir jetzt $k_l = \left[\frac{\tilde{k_l}}{c_\varepsilon} \right]$ setzen, wobei $[\cdot]$ der ganzzahlige Anteil ist, dann erhalten wir wegen (30)

$$\begin{aligned} e_{k_l}(id_l) &\leq c_4 2^{-ld} (k \cdot 2^{-l\varepsilon})^{-(\alpha+1)(1/p_1 - 1/p_2)} (1 + \log_2 (k \cdot 2^{-l\varepsilon}))^{-\delta(1/p_1 - 1/p_2)} \\ &\leq c_4 (k w_k^{(\alpha,\delta)})^{1/p_2 - 1/p_1} 2^{-ld + l\varepsilon(\alpha+1)(1/p_1 - 1/p_2)} \left(\frac{1 + \log_2 (k \cdot 2^{-l\varepsilon})}{1 + \log_2 k} \right)^{-\delta(1/p_1 - 1/p_2)} \end{aligned}$$

mit einer jetzt auch von ε abhängenden Konstanten $c_4 > 0$. Nun gilt für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ einerseits, dass der hier auftretende Quotient der log-Terme auf Grund der Wahl von L zwischen zwei Konstanten liegt, andererseits konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{-ld + l\varepsilon(\alpha+1)(1/p_1 - 1/p_2)}$$

für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Daraus folgt für den ersten Term von (31)

$$\sum_{l=1}^{L} e_{k_l}(id_l) \leq c_5 (k w_k^{(\alpha,\delta)})^{1/p_2 - 1/p_1}$$

mit einer Konstanten $c_5 > 0$. Also erhalten wir insgesamt

$$e_k(id) \leq C (k w_k^{(\alpha,\delta)})^{1/p_2 - 1/p_1}.$$

Schritt 2
Jetzt beweisen wir die Abschätzung nach unten. Dazu betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} l_{p_1}^k & \xrightarrow{\tilde{id}} & l_{p_2}^k \\ {\scriptstyle S}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle T} \\ l_{q_1}(2^{jd} l_{p_1}((w^{(\alpha,\delta)})^{1/p_1-1/p_2})) & \xrightarrow{id} & l_{q_2}(l_{p_2}). \end{array}$$

Dabei sind die Operatoren S und T durch

$$S(\xi_1,\ldots,\xi_k) = (\eta_{j,l})_{j,l\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad \eta_{j,l} = \begin{cases} \xi_l & : \quad 1 \le l \le k, j = 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und $T((\xi_{j,l})_{j,l\in\mathbb{N}}) = (\xi_{1,1},\ldots,\xi_{1,k})$ definiert. Offensichtlich gilt $\|S\| \le 2^d(w_k^{(\alpha,\delta)})^{1/p_1-1/p_2}$ und $\|T\| \le 1$.
Unter Verwendung des Satzes 6 für den Operator $\tilde{id}$ erhalten wir mit der Multiplikativität der Entropiezahlen

$$\begin{aligned} \tilde{c}k^{1/p_2-1/p_1} &\le e_k(\tilde{id}) \\ &\le \|S\| e_k(id) \|T\|. \end{aligned}$$

Also folgt

$$c\,(kw_k^{(\alpha,\delta)})^{1/p_2-1/p_1} \le e_k(id)$$

für eine Konstante $c > 0$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

$\square$

Literatur

[1] Bergh, J. und Löfström, J.: Interpolation Spaces. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1976.

[2] Bricchi, M. und Moura, S. D.: Complements on growth envelopes of spaces with generalised smoothness in the sub-critical case. Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, Math/Inf/04/02 (2002).

[3] Carl, B.: Entropy numbers, s-numbers, and eigenvalue problems. J. Funct. Anal. **41** (1981), 290-306.

[4] Carl, B.: Entropy numbers of diagonal operators with an application to eigenvalue problems. J. Approx. Theory **32** (1981), 135-150.

[5] Carl, B. und Stephani, I.: Entropy, compactness and the approximation of operators. Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[6] Cobos, F. und Fernandez, D. L.: Hardy-Sobolev spaces and Besov spaces with a function parameter. Proc. Lund Conf., Springer Lect. Notes in Math., 1302: 158-170, 1986.

[7] Cobos, F. und Kühn, T.: Entropy numbers of embeddings of Besov spaces in generalized Lipschitz spaces. J. Approx. Theory **112** (2001), 73-92.

[8] Edmunds, D. E. und Haroske, D.: Spaces of Lipschitz type, embeddings and entropy numbers. Dissertationes Math., **380** (1999), 1-43.

[9] Edmunds, D. E. und Triebel, H.: Function spaces, entropy numbers, differential operators. Cambridge University Press, Cambridge 1996.

[10] König, H.: Eigenvalue distribution of compact operators. Birkhäuser, Basel 1986.

[11] Kühn, T.: Entropy numbers of matrix operators in Besov sequence spaces. Math. Nachr. **119** (1984), 165-174.

[12] Kühn, T.: A lower estimate for entropy numbers. J. Approx. Theory **110** (2001), 120-124.

[13] Kühn, T.: Entropy numbers of diagonal operators of logarithmic type. Georg. Mathem. J., Vol. **8** (2001), Nr. 2, 307-318.

[14] Kühn, T. und Leopold, H.-G. und Sickel, W. und Skrzypczak, L.: Entropy numbers of Sobolev embeddings of radial Besov spaces. eingereicht bei J. Approx. Theory (2001).

[15] Kühn, T. und Schonbek, T.: Entropy numbers of diagonal operators between vector-valued sequence spaces. J. London Math. Soc.(2) **64** (2001), 739-754.

[16] Leopold, H.-G.: Limiting embeddings for sequence spaces and entropy numbers. Forschungsergebnisse FSU Jena, Math/Inf/98/27 (1998).

[17] Leopold, H.-G.: Embeddings for general weighted sequence spaces and entropy numbers. Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Proceedings of Conference, Syöte, 1999, 170-186, Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republic, Prague, 2000.

[18] Leopold, H.-G.: Embeddings and entropy numbers for general weighted sequence spaces: The non-limiting case. Georg. Mathem. J., Vol. **7** (2000), Nr.4, 1-13.

[19] Pietsch, A.: Operator Ideals. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978.

[20] Pietsch, A.: Weyl numbers and eigenvalues of operators in Banach spaces. Math. Ann. **47** (1980), 149-168.

[21] Schütt, C.: Entropy numbers of diagonal operators between symmetric Banach spaces. J. Approx. Theory **40** (1984), 121-128.

[22] Triebel, H.: Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. North-Holland, Amsterdam/New York/Oxford, 1978.

[23] Triebel, H.: Fractals and spectra related to Fourier analysis and function spaces. Birkhäuser, Basel 1997.

[24] Triebel, H.: The Structure of functions. Birkhäuser, Basel, 2001.

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Jena, 15.09.2002