

Universität Rostock  
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät  
Institut für Mathematik



Diplomarbeit im Studiengang Mathematik  
Ein Kriterium für partielle Sheffer-Funktionen  
in 4-wertiger Logik

eingereicht von: Karsten Schölzel  
geboren am 08.06.1982  
in Grevesmühlen  
eingereicht im: Mai 2008  
Betreuer: Prof. Dr. Dietlinde Lau  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau

**Erklärung nach §28 Absatz 5 der Diplomprüfungsordnung**

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur angefertigt zu haben.

Rostock, den 6. Mai 2008

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                                                  | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>Grundlagen</b>                                                  | <b>7</b>  |
| 2.1      | Grundbegriffe . . . . .                                            | 7         |
| 2.2      | Satz von Haddad und Rosenberg . . . . .                            | 11        |
| 2.3      | Minimale Überdeckung . . . . .                                     | 14        |
| 2.4      | Die minimale Überdeckung für $p\mathcal{M}_2$ . . . . .            | 16        |
| 2.5      | Verschiedene Relationen – verschiedene Klone . . . . .             | 20        |
| 2.6      | Bestimmung von $p\mathcal{M}_4$ . . . . .                          | 23        |
| 2.7      | Unäre Relationen und $P_k \cup C_\infty$ . . . . .                 | 25        |
| 2.8      | Bestimmung und Eindeutigkeit einer minimalen Überdeckung . . . . . | 25        |
| <b>3</b> | <b>Überflüssige Relationen</b>                                     | <b>27</b> |
| 3.1      | Relationen in allgemeiner Produktdarstellung . . . . .             | 27        |
| 3.2      | Zentrierte Relationen . . . . .                                    | 30        |
| 3.3      | Binäre symmetrische reflexive Relationen . . . . .                 | 32        |
| 3.4      | Total-symmetrische total-reflexive Relationen . . . . .            | 34        |
| 3.5      | Weitere überflüssige Relationen für $k = 4$ . . . . .              | 35        |
| <b>4</b> | <b>Benötigte Relationen</b>                                        | <b>39</b> |
| 4.1      | Blockfunktionen . . . . .                                          | 39        |
| 4.2      | Eine universelle Blockfunktion . . . . .                           | 41        |
| 4.3      | Anwendung der universellen Blockfunktion . . . . .                 | 45        |
| 4.4      | Die Relationen $\varrho_1$ , $\varrho_2$ und $\iota_k^3$ . . . . . | 52        |
| 4.5      | Weitere benötigte Relationen für $k = 4$ . . . . .                 | 55        |

|                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5 Zusammenfassung</b>                                               | <b>76</b> |
| 5.1 Ergebnisse . . . . .                                               | 76        |
| 5.2 Schlussfolgerungen . . . . .                                       | 76        |
| <b>A Alle kohärenten Relationen für <math>k \in \{2, 3, 4\}</math></b> | <b>78</b> |
| <b>B Weitere Tabellen</b>                                              | <b>86</b> |

# Tabellenverzeichnis

|      |                                                                                                                                                 |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.1  | Größe von $p\mathcal{M}_k$ und $\mathcal{M}_k$ sowie von den minimalen Überdeckungen $p\mathcal{X}_k$ beziehungsweise $\mathcal{X}_k$ . . . . . | 77 |
| A.1  | Alle kohärenten Relationen für $k = 2$ . . . . .                                                                                                | 79 |
| A.2  | Alle kohärenten Relationen für $k = 3$ . . . . .                                                                                                | 79 |
| A.3  | Unäre Relationen . . . . .                                                                                                                      | 80 |
| A.4  | Binäre asymmetrische areflexive Relationen . . . . .                                                                                            | 80 |
| A.5  | Binäre symmetrische areflexive Relationen . . . . .                                                                                             | 80 |
| A.6  | Binäre antisymmetrische reflexive Relationen . . . . .                                                                                          | 81 |
| A.7  | Binäre symmetrische reflexive Relationen . . . . .                                                                                              | 81 |
| A.8  | Ternäre areflexive Relationen . . . . .                                                                                                         | 82 |
| A.9  | Ternäre Relationen mit $\delta = \delta_{\{0,1,2\}}^3$ . . . . .                                                                                | 82 |
| A.10 | Ternäre Relationen mit $\delta = \delta_{\{0,1\}}^3$ und $G_\sigma = \{\text{id}\}$ . . . . .                                                   | 83 |
| A.11 | Ternäre Relationen mit $\delta = \delta_{\{0,1\}}^3$ und $G_\sigma = \{\text{id}, (01)\}$ . . . . .                                             | 83 |
| A.12 | Ternäre total-reflexive, total-symmetrische Relationen . . . . .                                                                                | 83 |
| A.13 | Quartäre areflexive Relationen . . . . .                                                                                                        | 84 |
| A.14 | Quartäre Relationen mit $\delta = \delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ . . . . .                                                                             | 84 |
| A.15 | Quartäre Relationen mit $\delta = \delta_{\{0,1,2\}}^4$ . . . . .                                                                               | 84 |
| A.16 | Quartäre Relationen mit $\delta = \delta_{\{0,1\}}^4$ . . . . .                                                                                 | 85 |
| A.17 | Quartäre Relationen mit $\delta = \delta_{\{0,1\},\{2,3\}}^4$ . . . . .                                                                         | 85 |
| A.18 | Spezielle quartäre Relationen . . . . .                                                                                                         | 85 |
| B.1  | Relationen, auf die Satz 20 mit den angegebenen Parametern anwendbar ist . . . . .                                                              | 87 |
| B.2  | Relationen, auf die Satz 21 mit den angegebenen Parametern anwendbar ist . . . . .                                                              | 88 |

---

|     |                                                                                       |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| B.3 | Relationen, auf die Satz 32 mit den angegebenen Parametern<br>anwendbar ist . . . . . | 89 |
| B.4 | Relationen, auf die Satz 34 mit den angegebenen Parametern<br>anwendbar ist . . . . . | 90 |

# Kapitel 1

## Einleitung

In Funktionenalgebren sind die Elemente der Trägermenge der jeweiligen Algebra Funktionen und es stellt sich die Frage, ob es eine Funktion gibt, mit der sich alle anderen Funktionen der Algebra mit Hilfe der Mal'tsev-Operationen (auch Superpositionsoperationen genannt) darstellen lassen. Solch eine Funktion wird **Sheffer**-Funktion genannt. Falls es Sheffer-Funktionen gibt, will man entscheiden, ob eine gewisse gegebene Funktion eine Sheffer-Funktion ist.

Für den Fall totaler Funktionen wurden 1941 durch E. L. Post ([1]) alle Unterklassen der Algebra der binären Funktionen  $P_2$  bestimmt. In Arbeiten von I. G. Rosenberg ([2], [5]) aus den Jahren 1965 und 1970 wurden für den allgemeinen Fall mit Funktionen auf einer  $k$ -elementigen Menge die maximalen Unterklassen bestimmt. Daraus ließ sich ein allgemeines Vollständigkeitskriterium ableiten und im Jahre 1967 gab G. Rousseau ([4]) ein allgemeines Sheffer-Kriterium für den totalen Fall an.

In dieser Arbeit werden Funktionen auf  $k$ -elementigen Mengen behandelt, die nicht notwendigerweise überall definiert sind, und deswegen partielle Funktionen genannt werden. Die Menge dieser Funktionen wird mit  $\tilde{P}_k$  bezeichnet und die Menge der maximalen Klassen von  $\tilde{P}_k$  durch  $p\mathcal{M}_k$ .

Für  $k = 2$  wurde durch R. V. Freivald 1966 ([3]) gezeigt, dass es genau 8 maximale Klassen von  $\tilde{P}_2$  gibt. Unabhängig voneinander bestimmten D. Lau ([6]) und B. A. Romov ([8]) die 58 maximalen Klassen von  $\tilde{P}_3$ . In Arbeiten von 1989 und 1992 gaben L. Haddad und I. G. Rosenberg ([10],[13]) dann eine Charakterisierung der maximalen Klassen von  $\tilde{P}_k$  sowie ein allgemeines Vollständigkeitskriterium für  $k \geq 2$  an. In [12] wurde ein Sheffer-Kriterium für  $\tilde{P}_2$  bestimmt und in [17] ein Sheffer-Kriterium für  $\tilde{P}_3$ .

Dabei wird der Begriff einer minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$  benutzt und gezeigt, dass es für  $k = 2$  und  $k = 3$  jeweils genau eine minimale Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$  gibt. Mit einer minimalen Überdeckung lassen sich die Sheffer-Funktionen charakterisieren.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass es genau eine minimale Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$  gibt. Die 449 Elemente dieser Überdeckung werden bestimmt sowie auch Elemente minimaler Überdeckungen für beliebige  $k$ . Die maximalen partiellen

Klassen für  $k = 4$  wurden in [15] bestimmt. Die zugehörigen Relationen werden im Anhang A aufgelistet und dabei die Anzahl maximaler partieller Klone auf 1 102 korrigiert.

## Kapitel 2

# Grundlagen

### 2.1 Grundbegriffe

In den mehrwertigen Logiken werden endliche Grundmengen betrachtet, so dass man sich auf die Menge

$$E_k := \{0, 1, \dots, k-1\} \quad (k \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$$

beschränken kann. Im totalen Fall werden dann  $n$ -stellige Funktionen

$$f^{(n)} : E_k^n \rightarrow E_k$$

betrachtet. Anstelle von  $f^{(n)}$  verwenden wir auch  $f^n$  oder  $f$ . Für partielle Funktionen wird dem Bildbereich ein weiteres Element  $\infty$  hinzugefügt, womit ein Tupel gekennzeichnet wird, für das die Funktion nicht definiert ist. Wir setzen

$$\tilde{E}_k := E_k \cup \{\infty\}.$$

**Sofern keine anderen Angaben gemacht werden, ist nachfolgend stets**

$$k \geq 3.$$

Die  $n$ -stelligen totalen beziehungsweise partiellen Funktionen über der Menge  $E_k$  werden bezeichnet mit

$$P_k^n := \{f \mid f : E_k^n \rightarrow E_k\}$$

beziehungsweise

$$\tilde{P}_k^n := \left\{ f \mid f : E_k^n \rightarrow \tilde{E}_k \right\}.$$

Damit lassen sich auch die Mengen aller totalen beziehungsweise partiellen Funktionen durch

$$P_k := \bigcup_{n \geq 1} P_k^n$$

beziehungsweise

$$\tilde{P}_k := \bigcup_{n \geq 1} \tilde{P}_k^n$$

eingeführen. Der Definitionsbereich einer partiellen Funktion  $f \in \tilde{P}_k^n$  wird dann durch

$$\text{dom}(f) := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in E_k^n \mid f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq \infty\}$$

definiert.

Ein Beispiel für eine 2-stellige partielle Funktion  $f$  in der 2-wertigen Logik ist durch

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1, x_2)$ |
|-------|-------|---------------|
| 0     | 0     | 1             |
| 0     | 1     | 1             |
| 1     | 0     | 0             |
| 1     | 1     | $\infty$      |

(2.1)

gegeben. Damit ist  $f$  auf  $(1, 1)$  nicht definiert, d.h.,

$$\text{dom } f = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}.$$

Die  $n$ -stellige Funktion  $e_i^n$ , die durch

$$e_i^n(x_1, \dots, x_n) := x_i \quad (i \in \{1, \dots, n\})$$

definiert ist, heißt **Projektion** auf die  $i$ -te Koordinate. Sei die Menge aller Projektionen von  $P_k$

$$J_k := \{e_i^n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Die  $n$ -stellige Funktion mit leerem Definitionsbereich wird mit  $c_\infty^n$  bezeichnet, d.h., es gilt

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E_k : c_\infty^n(x_1, \dots, x_n) = \infty.$$

Die Menge dieser Funktionen sei

$$C_\infty := \{c_\infty^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Für beliebige  $f^n, g^m \in \tilde{P}_k$  definieren wir die Mal'tsev-Operationen  $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, \star$  mit

$$\zeta f^n \in \tilde{P}_k^n, \tau f^n \in \tilde{P}_k^n, \Delta f^n \in \tilde{P}_k^{\max\{1, n-1\}}, \nabla f^n \in \tilde{P}_k^{n+1}, f^n \star g^m \in \tilde{P}_k^{m+n-1}$$

durch

$$\begin{aligned} (\zeta f)(x_1, x_2, \dots, x_n) &:= f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1), \\ (\tau f)(x_1, x_2, \dots, x_n) &:= f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n), \\ (\Delta f)(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &:= f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \text{ für } n \geq 2, \\ \zeta f = \tau f = \Delta f = f &\text{ für } n = 1, \\ (\nabla f)(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &:= f(x_2, \dots, x_{n+1}), \\ (f \star g)(x_1, \dots, x_{m+n-1}) &:= \\ &\begin{cases} f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}) & \text{falls } g(x_1, \dots, x_m) \in E_k, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Menge  $\tilde{P}_k$  zusammen mit den Mal'tsev-Operationen bildet eine Algebra

$$(\tilde{P}_k; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, \star).$$

Die abgeschlossenen Mengen dieser Algebra werden als **partielle Klassen** bezeichnet. Eine abgeschlossene Menge  $X = [X] \subset \tilde{P}_k$  mit  $J_k \subset X$  heißt **partieller Klon**. Falls eine Menge  $X$  nur ein Element  $f$  besitzt und

$$[X] = [\{f\}] = \tilde{P}_k$$

gilt, so heißt  $f$  **partielle Sheffer-Funktion**.

Um die Klassen von  $\tilde{P}_k$  zu beschreiben, sind  $h$ -stellige Relationen, d.h. Teilmengen von  $\tilde{E}_k^h$ , mit  $h \geq 1$  nützlich. Die Elemente von Relationen werden häufig in der Form von Spalten geschrieben und eine Relation in der Form einer Matrix angegeben, deren Spalten die Elemente der Relation sind.

Beispielsweise schreiben wir die Relation

$$\varrho = \{(0, 1, 2), (1, 2, 0), (3, 4, 5), (2, 3, 1)\}$$

auch in der Form

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

oder in den Tabellen im Anhang kurz durch

$$\varrho = \{012, 120, 345, 231\}$$

auf, da für  $k \leq 10$  durch Weglassen der Kommata und Klammern keine Missverständnisse entstehen können. Wird dagegen über eine Zeile einer Matrix gesprochen, so werden die Einträge nur durch Leerzeichen, nicht durch Kommata getrennt.

Sei eine Matrix durch  $c = (c_{ij})_{h \times n}$  gegeben. Dann werden mit  $c_i$  die Zeilen der Matrix für  $i \in \{1, \dots, h\}$  bezeichnet, d.h.,

$$c_i = (c_{i1} \quad c_{i2} \quad \dots \quad c_{in})$$

und mit  $c^j$  die Spalten der Matrix für  $j \in \{1, \dots, n\}$ , d.h.,

$$c^j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{hj} \end{pmatrix}.$$

Die Menge aller  $h$ -stelligen Relationen auf  $E_k$  wird mit

$$R_k^h$$

bezeichnet und es wird

$$R_k := \bigcup_{h \geq 1} R_k^h.$$

gesetzt. Entsprechend wird die Menge aller  $h$ -stelligen Relationen auf  $\tilde{E}_k$  mit

$$\tilde{R}_k^h$$

bezeichnet und es wird

$$\tilde{R}_k := \bigcup_{h \geq 1} \tilde{R}_k^h$$

gesetzt.

Eine  $n$ -stellige Funktion  $f \in \tilde{P}_k$  **bewahrt** ein  $h$ -stellige Relation  $\varrho$  über  $\tilde{E}_k$  genau dann, wenn für alle  $r^1, r^2, \dots, r^n \in \varrho$  mit  $r^j = (r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{hj})^T$  für  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  die Bedingung

$$f(r^1, \dots, r^n) := \begin{pmatrix} f(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n}) \\ f(r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n}) \\ \vdots \\ f(r_{h1}, r_{h2}, \dots, r_{hn}) \end{pmatrix} \in \varrho$$

gilt. Dabei sei  $f(a) = \infty$  für alle  $a \in \tilde{E}_k^n \setminus E_k^n$ .

Sei

$$pPol_k \varrho$$

die Menge aller Funktionen aus  $\tilde{P}_k$ , die die Relation  $\varrho \subseteq \tilde{E}_k^h$  bewahren. Weiter sei

$$pPOL_k \varrho := pPol_k \left( \varrho \cup \left( \tilde{E}_k^h \setminus E_k^h \right) \right).$$

Da für viele Betrachtungen der Wert von  $f(x, \dots, x)$  wichtig ist, wird dieser für eine beliebige  $n$ -stellige Funktion  $f$  durch

$$f'(x) := f(x, \dots, x)$$

für alle  $x \in E_k$  bezeichnet. Zum Beispiel gilt  $f'(0) = 1$  und  $f'(1) = \infty$  für die Funktion  $f$  aus (2.1).

Für zwei unäre Funktionen  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  sei  $f \square g : A \rightarrow C$  definiert durch

$$\forall x \in A : (f \square g)(x) := g(f(x)),$$

d.h., mit  $\square$  wird die Hintereinanderausführung von Abbildungen beschrieben.

Eine weitere Abkürzung für jedes  $m \in \mathbb{N}$  sei

$$\eta_m := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{pmatrix}.$$

Mit  $\omega(v)$  wird für  $v = (v_1, \dots, v_h) \in E_k^h$  die Menge der Elemente bezeichnet, die in  $v$  vorkommen, d.h.,

$$\omega(v) = \omega(v_1, \dots, v_h) := \{v_1, \dots, v_h\}.$$

Für eine Relation  $\varrho^{(h)}$  auf  $E_k$  bezeichne  $\omega(\varrho)$  die Elemente aus  $E_k$ , die in den Tupeln von  $\varrho$  vorkommen, d.h.,

$$\omega(\varrho) = \bigcup_{v \in \varrho} \omega(v).$$

## 2.2 Satz von Haddad und Rosenberg

Um den Satz von Haddad und Rosenberg formulieren zu können, werden einige Bezeichnungen für Relationen benötigt.

**Definition 1.** Für alle  $h$  mit  $3 \leq h \leq k$  sei

$$\begin{aligned}\varrho_1 &:= \{(a, a, b, b), (a, b, a, b), (a, b, b, a) \mid a, b \in E_k\}, \\ \varrho_2 &:= \{(a, a, b, b), (a, b, b, a) \mid a, b \in E_k\}, \\ \iota_k^h &:= \{(x_1, x_2, \dots, x_h) \in E_k^h \mid |\{x_1, x_2, \dots, x_h\}| \leq h-1\}.\end{aligned}$$

**Definition 2.** Für eine beliebige Äquivalenzrelation  $\varepsilon$  auf  $E_h$  sei

$$\delta_{k,\varepsilon}^h := \{(a_0, \dots, a_{h-1}) \in E_k^h \mid (i, j) \in \varepsilon \implies a_i = a_j\}.$$

Falls  $h$  oder  $k$  aus dem Kontext hervorgehen, wird nur  $\delta_\varepsilon$  oder  $\delta_\varepsilon^h$  oder  $\delta_{k,\varepsilon}$  geschrieben. Um  $\delta_{k,\varepsilon}^h$  einfacher zu beschreiben, wird die Relation häufig in der Form

$$\delta_{k;\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}^h$$

oder, kurz  $\delta_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}$  geschrieben, wobei  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  genau die Äquivalenzklassen von  $\varepsilon$  mit mindestens zwei Elementen sind. Speziell ist

$$\delta_{k;E_h}^h = \{(x, x, \dots, x) \in E_k^h \mid x \in E_k\}.$$

Da im folgenden stets  $\emptyset \neq \varepsilon \neq \iota_h^2$  gilt, d.h.,  $\varepsilon$  ist eine nicht-triviale Äquivalenzrelation, kann  $\delta_\varepsilon \subseteq \iota_k^h$  vorausgesetzt werden.

**Definition 3.** Eine  $h$ -stellige Relation  $\varrho \subseteq E_k^h$  heißt

- **areflexiv**, falls  $\varrho \cap \iota_k^h = \emptyset$ , d.h., für jedes  $(x_1, \dots, x_h) \in \varrho$  gilt  $x_i \neq x_j$  für alle  $1 \leq i < j \leq h$ .
- **quasi-diagonal**, falls  $\varrho = \sigma \cup \delta_\varepsilon$ , wobei  $\sigma$  eine nicht-leere areflexive Relation ist,  $\varepsilon$  eine Äquivalenzrelation mit  $\varepsilon \neq \iota_h^2$  und ferner  $\varrho \neq E_k^2$  für  $h = 2$  gilt.

Im folgenden sei  $\varrho$  eine  $h$ -stellige Relation der Form

$$\varrho = \sigma \cup \delta$$

mit  $\sigma$  areflexiv und  $\delta \subseteq \iota_k^h$ .

Sei

$$G_\sigma := \left\{ \pi \in S_h \mid \sigma \cap \sigma^{(\pi)} \neq \emptyset \right\},$$

wobei  $S_h$  die Menge aller Permutationen auf  $E_h$  bezeichnet und

$$\sigma^{(\pi)} := \{(a_{\pi(0)}, \dots, a_{\pi(h-1)}) \mid (a_0, \dots, a_{h-1}) \in \sigma\}.$$

Für ein einzelnes Tupel  $r = (r_0, r_1, \dots, r_{n-1}) \in E_k^n$  und  $\pi \in S_n$  wird entsprechend die Bezeichnung

$$r^{(\pi)} := (r_{\pi(0)}, r_{\pi(1)}, \dots, r_{\pi(n-1)})$$

verwendet.

Das **Modell** von  $\varrho$  ist dann die  $h$ -stellige Relation

$$M(\varrho) := \{(\pi(0), \dots, \pi(h-1)) \mid \pi \in G_\sigma\} \cup (\delta \cap E_h^h)$$

auf der Menge  $E_h$ .

Die Relation  $\varrho^{(h)} = \sigma \cup \delta$  heißt **kohärent**, falls folgende Bedingungen gelten:

1.  $\varrho \neq E_k^h$ ,
2.  $\sigma$  ist areflexiv und  $\delta \subseteq \iota_k^h$ ,
3. (a)  $\varrho$  areflexiv mit  $1 \leq h \leq k$ , d.h.,  $\sigma \neq \emptyset$  und  $\delta = \emptyset$ , oder  
 (b)  $\varrho$  quasi-diagonal mit  $2 \leq h \leq k$ , d.h.,  $\sigma \neq \emptyset$  und  $\delta = \delta_\varepsilon$  für eine Äquivalenzrelation  $\varepsilon$  auf  $E_h$ , oder  
 (c)  $\delta = \iota_k^h$  mit  $3 \leq h \leq k$ , oder  
 (d)  $\delta = \varrho_i$  mit  $i \in \{1, 2\}$  und  $h = 4$ ,
4.  $\forall r \in \varrho \forall \pi \in G_\sigma : r^{(\pi)} \in \varrho$ ,
5. für jedes  $\emptyset \neq \sigma' \subseteq \sigma$  existiert ein relationaler Homomorphismus  $\varphi : E_k \rightarrow E_h$  von  $\sigma'$  nach  $M(\varrho)$ , so dass  $(\varphi(i_0), \dots, \varphi(i_{h-1})) = (0, \dots, h-1)$  für ein  $(i_0, \dots, i_{h-1}) \in \sigma'$ , d.h., es gibt ein  $r \in \sigma'$  mit  $\varphi(r) = \eta_h$ ,
6. (a)  $\delta = \iota_k^h, h \geq 3 \implies G_\sigma = S_h$   
 (b)  $\delta = \varrho_1 \implies G_\sigma = S_4$   
 (c)  $\delta = \varrho_2 \implies G_\sigma = \langle (0123), (02) \rangle$ .

Nachfolgend werden einige Beispiele für kohärente und nicht kohärente Relationen für den Fall  $k = 4$  angegeben, insbesondere Relationen, für die die Punkte 4 und 5 verletzt sind. Dafür wird jeweils  $G_\sigma$  und  $M(\varrho)$  bestimmt.

- Für die Relation

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \delta = \emptyset,$$

d.h.,  $\varrho$  ist areflexiv. Es gilt  $G_\sigma = \{\text{id}\}$  und

$$M(\varrho) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt 4 ist trivial erfüllt, da  $G_\sigma = \{\text{id}\}$  ist. Für den Punkt 5 muss für die nicht-leeren Teilmengen von  $\sigma$  jeweils ein relationaler Homomorphismus gefunden werden. Die Funktion  $\varphi : E_4 \rightarrow E_2$  mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt für alle Teilmengen die Bedingung aus Punkt 5. Damit ist diese Relation kohärent.

- Sei

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist wieder  $G_\sigma = \{\text{id}\}$ , d.h., Punkt 4 ist erfüllt, und

$$M(\varrho) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun wird

$$\sigma' := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \subset \sigma$$

betrachtet. Angenommen, es existiert ein relationaler Homomorphismus  $\varphi : E_4 \rightarrow E_2$  von  $\sigma'$  nach  $M(\varrho)$ . Dann muss

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelten. Damit ergibt aber  $0 = \varphi(0) = 1$  einen Widerspruch. Also ist Punkt 5 nicht erfüllt und damit  $\varrho$  nicht kohärent.

- Sei

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt  $G_\sigma = \{\text{id}, (01)\}$ , da

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}^{((01))}$$

gilt.<sup>1</sup> Dann ist aber Punkt 4 verletzt, da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{((01))} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \varrho.$$

Folglich ist  $\varrho$  nicht kohärent.

- Sei

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \{\emptyset, \delta_\varepsilon, \iota_k^\mu, \varrho_i \mid \varepsilon \text{ Äquivalenzrelation}, 3 \leq \mu \leq k, i \in \{1, 2\}\}.$$

Also ist  $\varrho$  von keinem der angegebenen Typen und folglich auch nicht kohärent. Die Relation

$$\varrho' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ist dagegen quasi-diagonal und auch kohärent.

<sup>1</sup>Zur Schreibweise siehe Seite 11.

- Sei

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cup \delta_{\{0,1\}}^3.$$

Dann ist  $G_\sigma = \{\text{id}, (12)\}$ . Da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \delta_{\{0,1\}}^3 \subset \varrho$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{((12))} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \varrho$$

gilt, ist wieder Punkt 4 verletzt. Dies zeigt, dass für ein festes  $\delta = \delta_\varepsilon$  die Wahl von  $G_\sigma$  eingeschränkt ist. So muss zum Beispiel  $G_\sigma = \{\text{id}\}$  oder  $G_\sigma = \{\text{id}, (01)\}$  für  $\delta = \delta_{\{0,1\}}^3$  gelten.

Bezeichne  $\tilde{R}_{max}$  die Menge aller kohärenten Relationen. Die Menge der einstelligen kohärenten Relationen werden mit  $\mathfrak{C}_k^1 = \{C \subset E_k \mid C \neq \emptyset\}$  bezeichnet.

**Satz 4** (Satz von Haddad und Rosenberg; [10], [13]; ohne Beweis). *Sei  $k \geq 2$ . Für jede echte partielle Unterklasse  $A$  von  $\tilde{P}_k$  existiert eine maximaler partieller Klon, der  $A$  umfasst. Falls  $C$  ein maximaler partieller Klon von  $\tilde{P}_k$  ist, dann gilt entweder  $C = P_k \cup C_\infty$  oder  $C = pPOL_k \varrho$  mit einer kohärenten Relation  $\varrho$ .*

Eine vollständige Liste aller kohärenten Relationen für  $k \in \{2, 3, 4\}$  findet sich in den Tabellen im Anhang A.

Sei  $p\mathcal{M}_k$  die Menge aller maximalen partiellen Klone von  $\tilde{P}_k$ . Damit gilt dann

$$p\mathcal{M}_k = \{P_k \cup C_\infty\} \cup \left\{ pPOL_k \varrho \mid \varrho \in \tilde{R}_{max} \right\}.$$

Eine Menge  $C \subseteq \tilde{P}_k$  heißt vollständig, falls

$$[C] = \tilde{P}_k$$

gilt. Aus obigem Satz folgt:

**Satz 5** (Vollständigkeitskriterium für  $\tilde{P}_k$ ; [13]; ohne Beweis). *Sei  $C \subseteq \tilde{P}_k$ . Dann gilt  $[C] = \tilde{P}_k$  genau dann, wenn  $C \not\subseteq pPOL_k \varrho$  für alle  $\varrho \in \tilde{R}_{max}$  und  $C \not\subseteq P_k \cup C_\infty$ .*

## 2.3 Minimale Überdeckung

Die in dieser Arbeit behandelte Frage ist, welche maximalen partiellen Klone aus obigem Kriterium man benötigt, um die Vollständigkeit zu zeigen. Dafür wird der Begriff einer minimalen Überdeckung eingeführt.

**Definition 6.** Eine Menge  $\mathcal{X} \subseteq p\mathcal{M}_k$  heißt *minimale Überdeckung* von  $p\mathcal{M}_k$ , falls  $\mathcal{X}$  folgende Bedingungen erfüllt:

1.  $\forall f \in \tilde{P}_k : ([f] = \tilde{P}_k \iff \forall A \in \mathcal{X} : f \notin A)$
2.  $\forall A \in \mathcal{X} \exists f \in \tilde{P}_k : ([f] \neq \tilde{P}_k \wedge (\forall B \in \mathcal{X} \setminus A : f \notin B)).$

**Lemma 7.** Sei  $C$  ein maximaler partieller Klon und  $f \in C$  mit

$$\forall B \in p\mathcal{M}_k \setminus \{C\} : f \notin B.$$

Dann gehört  $C$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .

*Beweis.* Sei  $f \in C \in p\mathcal{M}_k$  mit

$$\forall B \in p\mathcal{M}_k \setminus \{C\} : f \notin B$$

gegeben. Angenommen, es existiert eine minimale Überdeckung  $\mathcal{X}$  von  $p\mathcal{M}_k$  mit  $C \notin \mathcal{X}$ . Dann gilt  $[f] \subseteq C \subset \tilde{P}_k$  und

$$\forall A \in \mathcal{X} \subseteq p\mathcal{M}_k \setminus \{C\} : f \notin A,$$

im Widerspruch zur ersten Bedingung an eine minimale Überdeckung.  $\square$

**Lemma 8.** Sei  $C$  ein maximaler partieller Klon. Seien  $C_1, C_2, \dots, C_l$  maximale partielle Klone, die in jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$  sind, mit

$$\forall f \in C \exists i \in \{1, 2, \dots, l\} : f \in C_i \quad (2.2)$$

und

$$C \not\subseteq \{C_1, C_2, \dots, C_l\}.$$

Dann gehört  $C$  zu keiner minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .

*Beweis.* Angenommen,  $C$  ist in einer minimalen Überdeckung. Dann existiert ein  $f \in \tilde{P}_k$  mit  $[f] \neq \tilde{P}_k$  und

$$\forall B \in \mathcal{X} \setminus \{C\} : f \notin B.$$

Da  $\{C_1, C_2, \dots, C_l\} \subseteq \mathcal{X}$  ist, gilt nach (2.2) auch  $f \notin C$ . Also gilt

$$\forall A \in \mathcal{X} : f \notin A$$

und somit  $[f] = \tilde{P}_k$ , im Widerspruch zur Annahme  $[f] \neq \tilde{P}_k$ . Also liegt  $C$  in keiner minimalen Überdeckung.  $\square$

**Lemma 9.** Seien eine kohärente Relation  $\varrho^{(h)}$  und eine Funktion  $f^n$  gegeben. Weiter seien  $c^1, c^2, \dots, c^n \in \varrho$  mit  $c_{i'} = c_{i''}$  für gewisse  $i' \neq i''$ . Dann gilt

$$d := f(c^1, c^2, \dots, c^n) \in \varrho \cup (\tilde{E}_k^h \setminus E_k^h).$$

*Beweis.* Falls  $f(c_i) = \infty$  für ein  $i \in \{1, 2, \dots, h\}$ , gilt

$$d = f \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_h \end{pmatrix} \in \left( \tilde{E}_k^h \setminus E_k^h \right) \subseteq \varrho \cup \left( \tilde{E}_k^h \setminus E_k^h \right).$$

Also kann folgend

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, h\} : f(c_i) \in E_k$$

vorausgesetzt werden.

Da  $\varrho = \sigma \cup \delta$  kohärent ist, kann man für  $\sigma \cap \iota_k^h = \emptyset$  und  $\delta \subseteq \iota_k^h$  folgende Fälle unterscheiden.

- $\delta = \emptyset$ , d.h.,  $\varrho$  ist areflexiv. Dann gilt  $c^1 \notin \varrho$ , im Widerspruch zur Voraussetzung.
- $\delta = \delta_\varepsilon$  für eine Äquivalenzrelation  $\varepsilon \neq \iota_h^2$ . Dann gilt  $c^1, c^2, \dots, c^n \in \delta_\varepsilon$  und somit  $d \in \delta_\varepsilon \subseteq \varrho$ .
- $\delta = \iota_k^h$ . Dann gilt  $d_{i'} = f(c_{i'}) = f(c_{i''}) = d_{i''}$ , d.h.,  $d \in \iota_k^h \subseteq \varrho$ .
- $\delta = \varrho_2$ , d.h.,

$$\begin{aligned} \delta = \{(a, a, a, a)^T | a \in E_k\} & \dot{\cup} \{(a, a, b, b)^T | a, b \in E_k, a \neq b\} \\ & \dot{\cup} \{(a, b, a, b)^T | a, b \in E_k, a \neq b\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten zwei Fälle. O.B.d.A. sei  $i' < i''$ .

- Sind  $i' = 1$  und  $i'' = 2$ , dann gilt

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : c^j \in \delta \setminus \{(a, b, a, b)^T | a, b \in E_k, a \neq b\} = \delta_{\{0,1\}, \{2,3\}}$$

und damit  $d \in \delta_{\{0,1\}, \{2,3\}} \subset \varrho_2 \subseteq \varrho$ . Analog gilt dies für  $(i', i'') \in \{(1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ .

- Sind  $i' = 1$  und  $i'' = 4$ , dann gilt

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : c^j \in \{(a, a, a, a)^T | a \in E_k\} = \delta_{E_4}$$

und damit  $d \in \delta_{E_4} \subset \varrho_2 \subseteq \varrho$ . Analog gilt dies für  $(i', i'') = (2, 3)$ .

- $\delta = \varrho_1$  geht analog.

□

## 2.4 Die minimale Überdeckung für $p\mathcal{M}_2$

Sei  $f$  die Funktion aus (2.1):

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1, x_2)$ |
|-------|-------|---------------|
| 0     | 0     | 1             |
| 0     | 1     | 1             |
| 1     | 0     | 0             |
| 1     | 1     | $\infty$      |

In [3] wurden die folgenden maximalen partiellen Klone bestimmt und es wurde gezeigt, dass dies alle maximalen partiellen Klone in  $\tilde{P}_2$  sind.

$$\begin{aligned}\tilde{T}_0 &:= pPOL_2\{0\}, \\ \tilde{T}_1 &:= pPOL_2\{1\}, \\ \tilde{Q} &:= pPOL_2\{(0,1)^T\}, \\ \tilde{S} &:= pPOL_2\{(0,1)^T, (1,0)^T\}, \\ \tilde{M} &:= pPOL_2\{(0,0)^T, (0,1)^T, (1,1)^T\}, \\ \tilde{L}_1 &:= pPOL_2\varrho_1, \\ \tilde{L}_2 &:= pPOL_2\varrho_2, \\ \tilde{C} &:= P_2 \cup C_\infty.\end{aligned}$$

Für jeden dieser maximalen partiellen Klone wird untersucht, ob  $f$  in diesem enthalten ist.

- Da  $f(0,1) = 1 \in E_2$  und  $f(1,1) = \infty \notin E_2$ , d.h.,  $\emptyset \subset \text{dom } f \subset E_2^2$ , gilt  $f \notin P_2 \cup C_\infty$ .
- Da  $f'(0) = f(0,0) = 1 \notin \{0, \infty\}$  (beziehungsweise wegen der äquivalenten Aussage  $f'(0) = 1 \in E_2 \setminus \{0\}$ ), gilt  $f \notin \tilde{T}_0$ .
- Da  $f'(1) = f(1,1) = \infty \in \{1, \infty\}$ , gilt

$$f \in \tilde{T}_1 = pPOL_2\{1\} = pPol_2\{1, \infty\}.$$

**Bemerkung:** Die Fälle  $f(\infty, \infty)$ ,  $f(\infty, x_2)$  und  $f(x_1, \infty)$  mit  $x_1, x_2 \in E_2$  können ignoriert werden, da  $\infty \notin E_2$ . Mit Hilfe einer Einpunkterweiterung lässt sich zwar  $\tilde{P}_k$  in  $P_{k+1}$  einbetten. Dabei identifiziert man  $\infty$  mit  $k$  und jeder Funktion  $f^n \in \tilde{P}_k$  kann man eine Funktion  $f_+$  zuordnen durch

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \text{dom } f, \\ k & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass damit ein Verband-Isomorphismus zwischen dem Verband der Klone von  $\tilde{P}_k$  und einem Unterverband von  $P_{k+1}$  beschrieben wird.<sup>2</sup> Da die Arbeit mit  $\tilde{P}_k$  jedoch einfacher ist als mit diesem Unterverband, werden wir weiterhin  $\tilde{P}_k$  betrachten.

- Da

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \infty \end{pmatrix} \in \{(0,1)^T\} \cup (\tilde{E}_2^2 \setminus E_2^2),$$

gilt  $f \in \tilde{Q}$ .

- Da

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \infty \end{pmatrix} \in \{(0,1)^T, (1,0)^T\} \cup (\tilde{E}_2^2 \setminus E_2^2)$$

<sup>2</sup>siehe [9], [11] und [14]

und

$$f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \{(0,1)^T, (1,0)^T\} \cup (\tilde{E}_2^2 \setminus E_2^2),$$

gilt  $f \in \tilde{S}$ .

• Da

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \{(0,0)^T, (0,1)^T, (1,1)^T\} \cup (\tilde{E}_2^2 \setminus E_2^2),$$

gilt  $f \notin \tilde{M}$ .

• Angenommen,  $f \notin \tilde{L}_1$ . Dann gibt es  $c^1, c^2 \in \varrho_1$  mit

$$f(c^1, c^2) = f \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} =: d \in E_2^4 \setminus \varrho_1.$$

D.h.,  $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \subseteq \text{dom } f = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ . Damit sind aber zwei der Zeilen gleich. Da  $\varrho_1$  kohärent ist, folgt  $d \in \varrho_1$  nach Lemma 9, im Widerspruch zur Voraussetzung an  $d$ .

Folglich haben wir  $f \in \tilde{L}_1$ .

• Analog gilt  $f \in \tilde{L}_2$ .

**Lemma 10.** Die Menge  $\mathcal{X} = \{\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{S}, P_2 \cup C_\infty\}$  ist die einzige minimale Überdeckung von  $p.\mathcal{M}_2$ .

*Beweis.* Angenommen,  $f^n \notin X$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ . Dann gilt  $f'(0) = 1$  und  $f'(1) = 0$ , da  $f \notin \tilde{T}_a$  für  $a \in E_2$ . Weiter gibt es  $c^1, c^2, \dots, c^n \in \{(0,1)^T, (1,0)^T\}$  mit

$$f \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \end{pmatrix} = d \in E_2^2 \setminus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also  $d = (a, a)$  mit  $a \in E_2$ . Es folgt

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h.,  $f \notin \tilde{Q}$  und  $f \notin \tilde{M}$ , und

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h.,  $f \notin \tilde{L}_i$  für  $i \in \{1, 2\}$ . Folglich gilt

$$\forall f \in \tilde{P}_2 : ([f] = \tilde{P}_2 \iff \forall A \in \mathcal{X} : f \notin A).$$

Dass  $\tilde{T}_0, \tilde{T}_1$  und  $P_2 \cup C_\infty$  zu jeder minimalen Überdeckung gehören, wird durch die Lemmata 17 und 18 gezeigt. Exemplarisch wird gezeigt, dass  $\tilde{S}$  zu jeder

minimalen Überdeckung gehört. Dafür wird eine Funktion  $f \in \tilde{S}$  konstruiert mit

$$\forall A \in p.\mathcal{M}_2 \setminus \{\tilde{S}\} : f \notin A. \quad (2.3)$$

Sei  $f^3$  folgendermaßen gegeben:

| $x$   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x)$   |
|-------|-------|-------|-------|----------|
| $a_1$ | 0     | 0     | 0     | 1        |
| $a_2$ | 1     | 1     | 1     | 0        |
| $a_3$ | 0     | 0     | 1     | 0        |
| $a_4$ | 0     | 1     | 0     | 0        |
| $a_5$ | 0     | 1     | 1     | 0        |
|       | sonst |       |       | $\infty$ |

Weiter sei

$$\varrho := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus  $f'(0) = 1$  folgt  $f \notin \tilde{T}_0$  und entsprechend  $f \notin \tilde{T}_1$  aus  $f'(1) = 0$ . Weiter gilt  $f \notin \tilde{Q}$  und  $f \notin \tilde{M}$  wegen

$$f \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie  $f \notin \tilde{L}_i$  für  $i \in \{1, 2\}$  wegen

$$f \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt (2.3).

Es bleibt  $f \in \tilde{S}$  zu zeigen. Angenommen,  $f \notin \tilde{S}$ . Dann existieren

$$c^1, c^2, c^3 \in \varrho$$

mit

$$f(c^1, c^2, c^3) =: \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} =: d \in E_2^2 \setminus \varrho.$$

Angenommen,  $\{c_1, c_2\} \subseteq \{a_1, a_3, a_4, a_5\}$  gilt. Dann folgt  $c_{11} = c_{21} = 0$  und somit auch  $c^1 \notin \varrho$ . Also muss  $a_2 \in \{c_1, c_2\}$  gelten. Angenommen, es gilt auch  $a_1 \notin \{c_1, c_2\}$ . Dann folgt analog wie vorher  $c^2 = (1, 1)^T \notin \varrho$  oder  $c^3 = (1, 1)^T \notin \varrho$ , im Widerspruch zu  $a_1 \notin \{c_1, c_2\}$ . Folglich gilt  $\{c_1, c_2\} = \{a_1, a_2\}$ .

- Sei  $c_1 = a_1$  und  $c_2 = a_2$ . Dann gilt  $c^1 = c^2 = c^3 = (0, 1)^T$  und  $d = (1, 0)^T \in \varrho$ , im Widerspruch zur Wahl von  $d$ .  
Im nächsten Fall beziehen wir uns auf  $c$  und  $d$  aus diesem Fall. Deshalb seien  $C^1 := c^1$ ,  $C^2 := c^2$ ,  $C^3 := c^3$  und  $D := d$ .
- Der Fall  $c_1 = a_2$  und  $c_2 = a_1$  muss nicht weiter untersucht werden, da dieser aus dem vorherigen hervorgeht. Es gilt mit  $(0, 1) \in S_2$

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} : c^i = (C^i)^{(0,1)}$$

und damit

$$d = f(c^1, c^2, c^3) = f\left((C^1)^{(01)}, (C^2)^{(01)}, (C^3)^{(01)}\right) = D^{(01)}.$$

Zur Schreibweise  $r^{(01)}$  siehe Seite 11. Angenommen,  $c^i \in \varrho$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Aus  $C^i \in \varrho$  folgt

$$(01) \in G_\varrho,$$

da  $\varrho$  eine kohärente Relation ist. Damit folgt aber weiter  $d = D^{(01)} \in \varrho$ , im Widerspruch zur Wahl von  $d$ .

Somit gilt  $f \in \tilde{S}$  und folglich liegt  $\tilde{S}$  in jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_2$ .  $\square$

## 2.5 Verschiedene Relationen – verschiedene Klone

Für die Begründung der Methode in Abschnitt 2.8 müssen wir zeigen, dass zwei verschiedene kohärente Relationen auch verschiedene maximale partielle Klone beschreiben. Dafür wird zunächst präzisiert, wann zwei Relationen als äquivalent aufgefasst werden.

**Lemma 11.** *Seien  $\varrho$  und  $\chi$  zwei  $h$ -stellige Relationen, für die eine Permutation  $\pi \in S_h$  mit*

$$\varrho^{(\pi)} = \chi$$

*existiert. Dann gilt*

$$pPOL_k \varrho = pPOL_k \chi.$$

*Beweis.* Es genügt,

$$pPOL_k \varrho \supseteq pPOL_k \chi$$

zu zeigen. Die andere Richtung folgt, indem man die Rollen von  $\varrho$  und  $\chi$  vertauscht und  $\pi^{-1}$  anstatt  $\pi$  betrachtet.

Seien  $f \in pPOL_k \chi$  und  $r^1, r^2, \dots, r^n \in \varrho$ . Dann gilt

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : (r^i)^{(\pi)} \in \chi$$

und damit

$$f\left((r^1)^{(\pi)}, (r^2)^{(\pi)}, \dots, (r^n)^{(\pi)}\right) \in \chi = \varrho^{(\pi)}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} f(r^1, r^2, \dots, r^n) &= \left(f\left((r^1)^{(\pi)}, (r^2)^{(\pi)}, \dots, (r^n)^{(\pi)}\right)\right)^{(\pi^{-1})} \\ &\in \chi^{(\pi^{-1})} = \varrho^{(\pi \square \pi^{-1})} = \varrho. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$f \in pPOL_k \varrho.$$

$\square$

Daher nennen wir zwei kohärente Relationen  $\varrho^{(h)}$  und  $\chi^{(h)}$  äquivalent, falls ein  $\pi \in S_h$  mit

$$\varrho^{(\pi)} = \chi$$

existiert. Wenn zwei Klone beziehungsweise die sie bestimmenden Relationen verglichen werden, so genügt es jeweils einen Vertreter der zugehörigen Äquivalenzklassen zu betrachten. Seien  $\varrho^{(h)}$  und  $\chi^{(h)}$  zwei  $h$ -stellige Relationen. Wird  $\varrho \cap \chi$  betrachtet, so sei  $\chi$  eine der Relationen  $\chi^{(\pi)}$  mit  $\pi \in S_h$ , für die  $|\varrho \cap \chi^{(\pi)}|$  maximal wird. D.h., man wählt  $\chi$  derart, dass

$$\chi \in \left\{ \chi' \in S \mid |\varrho \cap \chi'| = \max_{\chi'' \in S} |\varrho \cap \chi''| \right\}$$

mit

$$S = \left\{ \chi^{(\pi)} \mid \pi \in S_h \right\}$$

gilt.

Bezeichne  $W := \{ \varrho_1, \varrho_2, \iota_k^h \mid 3 \leq h \leq k \}$  die kohärenten Relationen ohne areflexiven Anteil.

**Lemma 12.** *Seien  $\varrho^{(h)}$  und  $\chi^{(\mu)}$  kohärente Relationen auf  $E_k$  mit  $\varrho \neq \sigma$  und  $\varrho, \sigma \notin W$ . Dann gilt  $pPOL_k \varrho \neq pPOL_k \sigma$ .*

*Beweis.* Zunächst wird der Fall  $\mu < h$  betrachtet und  $s = (s_1, \dots, s_\mu) \in \chi \setminus \iota_k^\mu$  sowie  $v = (v_1, \dots, v_\mu) \in E_k^\mu \setminus \chi$  werden beliebig gewählt. Damit definieren wir eine Funktion  $f^1 : E_k \rightarrow E_k$  folgendermaßen

$$f(x) := \begin{cases} v_i, & \text{falls } x = s_i \text{ für } i = 0, \dots, \mu - 1, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist  $f$  eindeutig definiert, da  $s_i \neq s_j$  für  $i \neq j$  gilt. Weiter folgt  $f \notin pPOL_k \chi$ , da  $f(s) = v \notin \chi$  und  $s \in \chi$ .

Angenommen,  $f \notin pPOL_k \varrho$ . Dann gibt es ein  $r \in \varrho$  mit  $f(r) \notin \varrho$ . Da  $f$  aber nur auf  $\mu$  verschiedenen Werten definiert ist, kann daher auch  $r$  nur  $\mu$  verschiedene Einträge enthalten. D.h., es folgt  $r \in \delta_\varepsilon$ , wobei  $\varepsilon$  eine Äquivalenzrelation auf  $E_h$  mit  $\varepsilon \neq \iota_h^2$  ist. Damit muss auch  $\delta_\varepsilon \subset \varrho$  gelten, wie aus der Definition einer kohärenten Relation hervorgeht. Aus  $r_i = r_j \implies f(r_i) = f(r_j)$  folgt  $f(r) \in \delta_\varepsilon \subseteq \varrho$ , im Widerspruch zur Annahme, d.h.,  $f \in pPOL_k \varrho$ .

Analog verhält sich dies im Fall  $h < \mu$ , so dass für  $\mu \neq h$  die Aussage  $pPOL_k \varrho \neq pPOL_k \chi$  folgt.

Sei nun  $\mu = h$ . Die Zeilen von  $\chi$  seien derart permutiert, dass  $|\varrho \cap \chi|$  maximal ist, wie durch Lemma 11 begründet wird. Dann gibt es folgende Fälle zu unterscheiden.

- $\varrho \cap \chi = \emptyset$ . Wähle  $s \in \chi \setminus \iota_k^h$  und  $v \in E_k^h \setminus \chi$  beliebig. Damit definieren wir eine Funktion  $f^1 : E_k \rightarrow E_k$  folgendermaßen

$$f(x) := \begin{cases} v_i, & \text{falls } x = s_i \text{ für } i = 0, \dots, \mu - 1, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist  $f$  eindeutig definiert, da  $s_i \neq s_j$  für  $i \neq j$  gilt. Weiter folgt  $f \notin pPOL_k\chi$ , da  $f(s) = v \notin \chi$  und  $s \in \chi$ .

Angenommen,  $f \notin pPOL_k\varrho$ . Dann gibt es ein  $r \in \varrho$  mit  $f(r) \notin \varrho$ . Das Tupel  $r$  hat weniger als  $h$  verschiedene Einträge, da es sonst eine Permutation von  $s$  wäre und somit eine Permutation der Zeilen von  $\chi$  existiert, so dass  $\varrho \cap \chi \neq \emptyset$  gilt. Damit folgt aber ein Widerspruch wie im Fall  $\mu < h$  oben, d.h.,  $pPOL_k\varrho \neq pPOL_k\chi$  gilt.

- $\varrho \cap \chi \neq \emptyset$ ,  $\varrho \not\subseteq \chi$ . Wähle  $s \in \chi \setminus \iota_k^h$  und  $v \in \varrho \setminus \chi$  beliebig. Damit definieren wir eine Funktion  $f^1 : E_k \rightarrow E_k$  folgendermaßen

$$f(x) := \begin{cases} v_i & \text{falls } x = s_i, \text{ für } i = 0, \dots, \mu - 1 \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist  $f$  eindeutig definiert, da  $s_i \neq s_j$  für  $i \neq j$  gilt. Weiter folgt  $f \notin pPOL_k\chi$ , da  $f(s) = v \notin \chi$  und  $s \in \chi$ .

Angenommen,  $f \notin pPOL_k\varrho$ . Dann gibt es ein  $r \in \varrho$  mit  $f(r) \notin \varrho$ . Hat  $r$  weniger als  $h$  verschiedene Einträge so folgt ein Widerspruch wie im Fall  $\mu < h$  oben. Also besitzt  $r$  genau  $h$  verschiedene Einträge, d.h., es gilt  $r = s^{(\alpha)}$  für ein  $\alpha$  aus der Symmetriegruppe von  $\varrho$ . Da  $\varrho$  kohärent ist, ist damit auch

$$f(r) = f\left(s^{(\alpha)}\right) = v^{(\alpha)} \in \varrho.$$

D.h., es gibt auch hier einen Widerspruch, womit  $f \in pPOL_k\varrho$  gilt, also auch  $pPOL_k\varrho \neq pPOL_k\chi$ .

- Der Fall  $\varrho \subset \chi$  ergibt sich aus dem vorherigen Fall, wenn man  $\chi$  und  $\varrho$  vertauscht.

Also gilt die Aussage des Lemmas. □

**Lemma 13.** *Seien  $\varrho^{(h)} \in W$  und  $\chi^{(\mu)} \notin W$  kohärente Relationen. Dann gilt  $pPOL_k\varrho \neq pPOL_k\chi$ .*

*Beweis.* Wir wählen ein  $s \in \chi \setminus \iota_k^\mu$  und ein  $v \in E_k^\mu \setminus \chi$  beliebig. Damit lässt sich eine Funktion  $f^1 : E_k \rightarrow E_k$  folgendermaßen definieren

$$f(x) := \begin{cases} v_i & \text{falls } x = s_i, \text{ für } i = 0, \dots, \mu - 1 \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen  $s_i \neq s_j$  für  $i \neq j$  ist  $f$  eindeutig definiert. Außerdem gilt  $f \notin pPOL_k\chi$ , da  $f(s) = v \notin \chi$  und  $s \in \chi$ .

Angenommen,  $f \notin pPOL_k\varrho$ . Dann gibt es ein  $r \in \varrho$  mit  $f(r) \notin \varrho$ . Aus  $\varrho = \bigcup_{\varepsilon \in E} \delta_\varepsilon$ , wobei  $E$  eine Menge von Äquivalenzrelationen auf  $E_h$  ist, folgt  $r \in \delta_\varepsilon$  für ein spezielles  $\varepsilon \neq \iota_k^2$ . Damit muss auch  $\delta_\varepsilon \subset \varrho$  gelten. Aus  $r_i = r_j \implies f(r_i) = f(r_j)$  folgt  $f(r) \in \delta_\varepsilon \subseteq \varrho$ , im Widerspruch zur Annahme, d.h.,  $f \in pPOL_k\varrho$ . □

**Lemma 14.** *Seien  $3 \leq \mu < h \leq k$ . Dann gilt  $pPOL_k\iota_k^\mu \neq pPOL_k\iota_k^h$ .*

*Beweis.* Sei die Funktion  $f^h$  durch

| $x^1$    | $x^2$    | $x^3$    | $\dots$  | $x^h$    | $f(x)$   |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0        | 0        | 0        | $\dots$  | 0        | 0        |
| 0        | 1        | 1        | $\dots$  | 1        | 1        |
| 1        | 1        | 2        | $\dots$  | 2        | 2        |
| 2        | 2        | 2        | $\dots$  | 3        | 3        |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $h-3$    | $h-3$    | $h-3$    | $\dots$  | $h-2$    | $h-2$    |
| $h-2$    | $h-2$    | $h-2$    | $\dots$  | $h-2$    | $h-1$    |
| sonst    |          |          |          |          | $\infty$ |

definiert. Dann folgt  $f \notin pPOL_k \iota_k^h$ , da die Spalten  $x^1$  bis  $x^h$  aus  $\iota_k^h$  sind, aber die Spalte  $f(x)$  nicht.

Angenommen,  $f \in \iota_k^\mu$ . Dann existieren  $c^1, \dots, c^h \in \iota_k^\mu$  mit  $f(c^1, \dots, c^h) =: d \notin \iota_k^\mu$ . Sind die Zeilen  $c_1, \dots, c_\mu$  paarweise verschieden, dann gibt es eine Spalte  $c^j$  mit  $|\omega(c^j)| = \mu$ , d.h., sie enthält  $\mu$  verschiedene Elemente. Damit sind zwei Zeilen gleich, d.h., es existiert eine nicht-triviale Äquivalenzrelation  $\varepsilon$  mit  $c^1, \dots, c^h \in \delta_\varepsilon^\mu$ . Aus  $c_i = c_{i'} \implies f(c_i) = f(c_{i'})$  folgt  $d \in \delta_\varepsilon^\mu \subseteq \iota_k^\mu$ , im Widerspruch zur Annahme, d.h.,  $f \in \iota_k^\mu$ .  $\square$

**Satz 15.** Die Relationen aus  $\tilde{R}_{max}$  beschreiben paarweise verschiedene maximale partielle Klone.

*Beweis.* Nach Satz 37 existiert  $f \in pPOL_k \varrho_i$  für  $i \in \{1, 2\}$  mit

$$\forall \varrho \in \tilde{R}_{max} \setminus \{\varrho_i\} : f \notin pPOL_k \varrho,$$

d.h.,  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  beschreiben maximale partielle Klone, die von anderen maximalen Klonen der Form  $pPOL_k \varrho$  verschieden sind. Weiter gilt natürlich  $pPOL_k \varrho_i \neq P_k \cup C_\infty$ .

Kombiniert man diese Aussage mit den Lemmata 12, 13 und 14, erhält man die Aussage des Satzes.  $\square$

## 2.6 Bestimmung von $p\mathcal{M}_4$

Mit Hilfe von Satz 4 lässt sich  $p\mathcal{M}_4$  bestimmen. Dies haben Haddad und Simons in [15] getan. Da die maximalen partiellen Klone beziehungsweise die zugehörigen kohärenten Relationen in [15] nur teilweise in Listen aufgeführt wurden, sind in dieser Arbeit die kohärenten Relationen für  $k = 4$  im Anhang A aufgelistet. Dabei werden nicht alle einzelnen kohärenten Relationen aufgeführt, sondern nur Vertreter von **Relationenklassen**. Zwei Relationen  $\varrho$  und  $\chi$  seien dabei in der selben Relationenklasse, falls es eine bijektive Abbildung  $f : E_k \rightarrow E_k$  mit  $f(\varrho) = \chi$  gibt. Dementsprechend wurde in den Tabellen im Anhang A in der Spalte *iso* die Anzahl der Relationen in der jeweiligen Relationenklasse angegeben.

Beispielsweise bilden die drei Relationen

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Relationenklasse, die im Anhang durch  $\varrho$  repräsentiert wird und die Nummer 12 hat.

Für die Zählung aller Relationen für  $\tilde{R}_{max}$  im Fall  $k = 4$  kam es in [15] leider zu kleinen Fehlern. Einmal haben die Autoren sich auf Seite 544 bei den aufgelisteten Relationen verzählt. Andererseits sei  $Q$  die Menge der kohärenten ternären quasi-diagonalen Relationen vom Typ  $\varrho = \sigma \cup \delta_{\{0,1\}}^3$  sowie

$$Q_1 := \left\{ \sigma \cup \delta_{\{0,1\}}^3 \mid G_\sigma = \{\text{id}\} \right\}$$

und

$$Q_2 := \left\{ \sigma \cup \delta_{\{0,1\}}^3 \mid G_\sigma = \{\text{id}, (01)\} \right\}.$$

Es wurden nur die Relationen aus  $Q_1$  aufgezählt und angenommen, dass die Abbildung  $q : Q_1 \rightarrow Q_2$

$$q(\varrho) := \left\{ v^{(\pi)} \mid v \in \varrho, \pi \in \{\text{id}, (01)\} \right\}$$

eine Bijektion darstellt, womit  $|Q_1| = |Q_2|$  wäre. Jedoch ist  $q$  nicht bijektiv. Beispielsweise werden

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cup \delta_{\{0,1\}}^3 \quad (\text{Nr. 65})$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cup \delta_{\{0,1\}}^3 \quad (\text{Nr. 68})$$

beide auf

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cup \delta_{\{0,1\}}^3 \quad (\text{Nr. 81})$$

abgebildet.

Daher haben wir die kohärenten Relation aus [15] in Relationenklassen zusammengefasst und die Größe dieser Relationenklassen überprüft. Damit wird gezeigt, dass es 1101 verschiedene kohärente Relationen auf  $E_4$  gibt.

**Satz 16.** *Es gibt 1102 maximale partielle Klone auf  $E_4$ .*

*Beweis.* Nach Satz 15 beschreiben die 1101 verschiedenen Relationen auch 1101 verschiedene maximale partielle Klone. Nach Satz 4 gibt es nur einen weiteren maximalen Klon,  $P_4 \cup C_\infty$ , so dass es insgesamt 1102 maximale partielle Klone auf  $E_4$  gibt.  $\square$

## 2.7 Unäre Relationen und $P_k \cup C_\infty$

**Lemma 17** (Lemma 4 [17]; ohne Beweis). *Der maximale partielle Klon*

$$P_k \cup C_\infty$$

gehört zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .

**Lemma 18.** *Sei  $\varrho \in \mathfrak{C}_k^1$ . Dann gehört  $pPOL_k\varrho$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .*

*Beweis.* Für  $|\varrho| \geq 2$  folgt die Aussage aus Lemma 5 in [17] und für  $|\varrho| = 1$  aus Lemma 7 in [17].  $\square$

## 2.8 Bestimmung und Eindeutigkeit einer minimalen Überdeckung

Im Folgenden werden zunächst diejenigen maximalen partiellen Klone behandelt, die in keiner minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$  liegen. Sei  $\text{ar} : p\mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{N}$  definiert durch

$$\text{ar}(X) := \begin{cases} 1, & \text{falls } X = P_k \cup C_\infty, \\ h, & \text{falls } X = pPOL_k\varrho \text{ mit } \varrho^{(h)} \in \tilde{R}_{max}. \end{cases}$$

Aus dem Satz von Haddad und Rosenberg folgt, dass  $\text{ar}$  für jeden maximalen partiellen Klon definiert ist, und aus Satz 15 folgt, dass  $\text{ar}$  wohldefiniert ist.

**Satz 19.** *Sei  $\mathcal{O} : p\mathcal{M}_k \rightarrow 2^{p\mathcal{M}_k}$  eine Abbildung mit*

$$\mathcal{O}(X) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } X \text{ zu jeder minimalen Überdeckung} \\ & \text{von } p\mathcal{M}_k \text{ gehört,} \\ \{X_1, \dots, X_{n_X}\}, & \text{falls } \forall f \in X \exists i \in \{1, \dots, n_X\} : f \in X_i, \end{cases}$$

und

$$\forall Y \in \mathcal{O}(X) : \text{ar}(Y) < \text{ar}(X).$$

Dann ist

$$\mathcal{X} = \{X \in p\mathcal{M}_k \mid \mathcal{O}(X) = \emptyset\}$$

die einzige minimale Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .

*Beweis.* Sei  $\Omega : p\mathcal{M}_k \rightarrow 2^{p\mathcal{M}_k}$  wie folgt definiert.

$$\Omega(X) := \begin{cases} \{X\}, & \text{falls } \mathcal{O}(X) = \emptyset, \\ \bigcup_{Y \in \mathcal{O}(X)} \Omega(Y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\forall X \in p\mathcal{M}_k : \Omega(X) \subseteq \mathcal{X} \tag{2.4}$$

und

$$\forall X \in p\mathcal{M}_k \forall f \in X \exists Y \in \Omega(X) : f \in Y. \tag{2.5}$$

## 2.8 Bestimmung und Eindeutigkeit einer minimalen Überdeckung 26

Dies wird per Induktion nach  $\text{ar}(X)$  für  $X \in p\mathcal{M}_k$  gezeigt.

Nach den Lemmata 17 und 18 gehören alle  $X \in p\mathcal{M}_k$  mit  $\text{ar}(X) = 1$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ , d.h.,  $\Omega(X) = \{X\} \subseteq \mathcal{X}$ .

Sei  $X \in p\mathcal{M}_k$  beliebig mit  $\text{ar}(X) = a > 1$ . Gehört  $X$  zu jeder minimalen Überdeckung, so folgt  $\Omega(X) = \{X\} \subseteq \mathcal{X}$ . Andernfalls gilt

$$\Omega(X) = \bigcup_{Y \in \mathcal{O}(X)} \Omega(Y) \underbrace{\subseteq}_{\text{ar}(Y) < a} \mathcal{X}.$$

Sei nun  $f \in X$  beliebig. Nach Voraussetzung an  $\mathcal{O}$  existiert ein  $Y \in \mathcal{O}(X)$  mit  $f \in Y$  und mit  $\text{ar}(Y) < a$  folgt weiter

$$\exists Z \in \Omega(Y) : f \in Z,$$

also

$$\exists Z \in \bigcup_{Y \in \mathcal{O}(X)} \Omega(Y) = \Omega(X) : f \in Z.$$

Sei nun  $\mathcal{Y}$  eine beliebige minimale Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ . Nach Voraussetzung gilt dann  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ . Angenommen, es gibt ein  $Y \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{X}$ . Dann gilt wie gezeigt

$$\forall f \in Y \exists Z \in \Omega(Y) \subseteq \mathcal{X} : f \in Z.$$

Damit ist  $\mathcal{Y}$  keine minimale Überdeckung und somit ist  $\mathcal{X}$  die einzige minimale Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .  $\square$

Im Laufe dieser Arbeit wird eine Funktion  $\mathcal{O}$  für den Fall  $k = 4$  angegeben, die die Bedingungen des obigen Satzes erfüllt. Für jeden maximalen partiellen Klon  $X$ , der in jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$  liegt, wird  $\mathcal{O}(X) = \emptyset$  gesetzt.

Wie wir später zeigen werden, gibt es nur eine minimale Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$ . Daher wird eine Relation  $\varrho \in \tilde{R}_{max}$  **überflüssig** genannt, falls  $pPOL_4\varrho$  nicht in dieser minimalen Überdeckung liegt. Die anderen Relationen aus  $\tilde{R}_{max}$  werden entsprechend **benötigt** genannt.

## Kapitel 3

# Überflüssige Relationen

In diesem Kapitel werden diejenigen maximalen partiellen Klone behandelt, die in keiner minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$  sind. Dafür wird die Funktion  $\mathcal{O}$  für den Fall  $k = 4$  derart definiert, dass dieses  $\mathcal{O}$  den Bedingungen aus Satz 19 genügt.

### 3.1 Relationen in allgemeiner Produktdarstellung

**Satz 20.** Sei  $\varrho^{(h+l)}$  eine nicht-leere Relation, die die folgenden Bedingungen erfüllt

$$\varrho = \bigcup_{i=0}^{m-1} (\chi_i \times \sigma_i) \quad (3.1)$$

$$\exists C \subseteq E_m, C \neq \emptyset : \Sigma := \bigcap_{i \in C} \sigma_i \supseteq \bigcup_{i \in E_m \setminus C} \sigma_i \quad (3.2)$$

mit  $\chi_i \in E_k^h$ ,  $\sigma_i \in E_k^l$  und  $m, h, l \geq 1$ .

Dann gilt für jedes  $f \in pPOL_k \varrho$  mindestens eine der folgenden Aussagen

$$f \in pPOL_k \chi \text{ mit } \chi := \bigcup_{i \in C} \chi_i \quad (3.3)$$

$$\exists a \in E_k : f \in pPOL_k \{a\} \quad (3.4)$$

$$\exists j \in E_m \setminus C \forall \varsigma, \sigma_j \subseteq \varsigma \subseteq \Sigma : f \in pPOL_k \varsigma \quad (3.5)$$

Gibt es zu jedem  $j \in E_m \setminus C$  ein  $\varsigma_j \in \tilde{R}_{max}$  mit  $\sigma_j \subseteq \varsigma_j \subseteq \Sigma$ , dann genügt

$$\mathcal{O}(pPOL_k \varrho) = \left\{ pPOL_k \gamma \mid \gamma \in \{ \chi \} \cup \{ \varsigma_j \mid j \in E_m \setminus C \} \cup \{ \{a\} \mid a \in E_k \} \right\} \quad (3.6)$$

den Bedingungen von Satz 19.

*Beweis.* Sei

$$f^n \in pPOL_k \varrho \quad (3.7)$$

beliebig.

Angenommen, (3.3) gilt nicht. Dann gibt es  $x^1, \dots, x^n \in \chi$  mit

$$y := f(x^1, \dots, x^n) \in E_k^l \setminus \chi.$$

Sei weiter angenommen, dass auch (3.4) nicht gilt. Dann gilt  $f' \in P_k^1$ . Sei  $S \in \Sigma$  beliebig. Aus

$$f \begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \\ S & \dots & S \end{pmatrix} \in E_k^{h+l}$$

und (3.7) folgt

$$f \begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \\ S & \dots & S \end{pmatrix} \in \varrho.$$

Falls  $C = E_m$  gilt, so existiert ein  $j \in C$  mit  $y \in \chi_j \subseteq \chi$ , im Widerspruch zur Wahl von  $y$ . Andernfalls existiert nach (3.1) und (3.2) ein  $j \in E_m \setminus C$  mit  $y \in \chi_j$ .

Angenommen,  $f \notin pPOL_k \varsigma$  für  $\sigma_j \subseteq \varsigma \subseteq \Sigma$ , dann existieren  $s^1, \dots, s^n \in \varsigma \subseteq \Sigma$  mit

$$t := f(s^1, \dots, s^n) \in E_k^h \setminus \varsigma \subseteq E_k^h \setminus \sigma_j.$$

Damit ergibt

$$f \begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \\ s^1 & \dots & s^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} \in \chi_j \times (E_k^h \setminus \sigma_j) \subseteq E_k^{h+1} \setminus \varrho$$

einen Widerspruch zu (3.7). Also gilt  $f \in pPOL_k \varsigma$ .

Somit gilt für jedes  $f \in pPOL_k \varrho$  wenigstens eine der Aussagen (3.3), (3.4) oder (3.5). Damit genügt die Wahl von  $\varrho$  in (3.6) unter den genannten Bedingungen den Voraussetzungen von Satz 19.  $\square$

In Tabelle B.1 sind für  $k = 4$  diejenigen kohärenten Relationen angegeben, auf die Satz 20 anwendbar ist.<sup>1</sup> Die Spalten Nr.,  $\delta$  und  $\sigma$  sind den Tabellen A.3 bis A.18 entnommen. Befindet sich in der Spalte  $\alpha$  ein Eintrag, so wird anstatt der Relation  $\varrho^{(h)} = \sigma \cup \delta$  die Relation  $(\sigma \cup \delta)^{(\alpha)}$  mit  $\alpha \in S_h$  betrachtet. Zum Beispiel wird anstatt

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cup \delta_{\{0,1\}}^4$$

die Relation

$$\varrho^{((20)(31))} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cup \delta_{\{2,3\}}^4$$

<sup>1</sup>Relationen, die mit anderen, (meist) einfacheren Kriterien behandelt werden können, werden hier nicht erwähnt.

betrachtet und darauf Satz 20 angewendet.

Die Spalten  $m, h, l, C, \chi_i$  und  $\sigma_i$  geben eine Wahl der Parameter für Satz 20 an. Daraus ergibt sich dann die Spalte  $\chi$ , wobei auch die Nummer aus den Tabellen A.3 bis A.18 angegeben wird. Die Spalte  $\varsigma$  gibt kohärente Relationen an, so dass für jedes  $j$  die Bedingung in (3.5) erfüllt ist, zusammen mit ihrer Nummer.

**Satz 21.** Sei  $\varrho^{(h)} = (\sigma_1^{(l)} \times \sigma_2^{(h-l)}) \cup \delta_{E_h}$  eine Relation auf  $E_k$  mit

- $\omega(\sigma_1) \cup \omega(\sigma_2) = E_k$  und
- $\sigma_1, \sigma_2 \neq \emptyset$  reflexiv.

Sei

$$U := \{\sigma_1, \sigma_2\} \cup \{\{a\} \mid a \in E_k\}.$$

Dann gilt

$$\forall f \in pPOL_k \varrho \exists \chi \in U : f \in pPOL_k \chi. \quad (3.8)$$

Falls  $\sigma_1, \sigma_2 \in \tilde{R}_{max}$ , so genügt

$$\mathcal{O}(pPOL_k \varrho) = \{pPOL_k \chi \mid \chi \in U\}$$

den Bedingungen von Satz 19.

*Beweis.* Angenommen, (3.8) gilt nicht. Dann existiert ein  $f^n \in pPOL_k \varrho$  mit

$$\forall \chi \in U : f \notin pPOL_k \chi.$$

Dann existieren  $s^1, s^2, \dots, s^n \in \sigma_1$  und  $t^1, t^2, \dots, t^n \in \sigma_2$  mit

$$f(s^1, s^2, \dots, s^n) \in E_k^l \setminus \sigma_1$$

und

$$f(t^1, t^2, \dots, t^n) \in E_k^{h-l} \setminus \sigma_2.$$

Da  $f \in pPOL_k \varrho$  ist, folgt

$$\mathbf{y} := f \begin{pmatrix} s^1 & s^2 & \cdots & s^n \\ t^1 & t^2 & \cdots & t^n \end{pmatrix} \in \varrho \setminus (\sigma_1 \times \sigma_2) = \delta_{E_h}$$

Somit ist

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ \vdots \\ y \end{pmatrix}$$

für ein  $y \in E_k$ .

Falls  $y \in \omega(\sigma_1)$ , existiert ein  $s \in \sigma_1$  mit  $y \in \omega(s)$ . Folglich gilt

$$f \begin{pmatrix} s & s & \cdots & s \\ t^1 & t^2 & \cdots & t^n \end{pmatrix} = \mathbf{y}$$

und damit auch  $f \in pPOL_k \{y\}$ , im Widerspruch zur Annahme.

Andernfalls gilt  $y \in E_k \setminus \omega(\sigma_1) \subseteq \omega(\sigma_2)$  und es existiert ein  $t \in \sigma_2$  mit  $y \in \omega(t)$ .  
Damit folgt

$$f \begin{pmatrix} s^1 & s^2 & \dots & s^n \\ t & t & \dots & t \end{pmatrix} = \mathbf{y},$$

also  $f \in pPOL_k\{y\}$ , im Widerspruch zur Annahme.

Damit gilt (3.8). Falls  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  kohärent sind, genügt damit die Wahl von  $\mathcal{O}$  den Bedingungen von Satz 19.  $\square$

In Tabelle B.2 sind für  $k = 4$  diejenigen kohärenten Relationen angegeben, auf die Satz 21 anwendbar ist. Die Spalten  $Nr.$ ,  $\delta$  und  $\sigma$  sind wie beim vorherigen Satz und die Spalten  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  geben die Parameter für die Anwendung von Satz 21 an.

## 3.2 Zentrierte Relationen

Mit der folgenden Definition wird der Begriff einer partiellen Ordnung mit größtem beziehungsweise kleinstem Element (in [17] mit  $\mathfrak{M}_{k,e}$  beziehungsweise  $\mathfrak{M}_{k,o}$  zusammengefasst) verallgemeinert auf den Begriff einer zentrierten Ordnungsrelation (durch  $\mathfrak{M}_{k,c}$  bezeichnet). Insbesondere gilt  $\mathfrak{M}_{k,e} \cup \mathfrak{M}_{k,o} \subseteq \mathfrak{M}_{k,c}$ . Damit werden die Aussagen aus Lemma 13(a-c) in [17] durch den folgenden Satz erweitert, der dann auch Lemma 20 in [17] abdeckt.

**Definition 22.** Eine Ordnungsrelation  $\varrho$  auf  $E_k$  heiße **zentriert** durch  $c \in E_k$ , falls

$$\forall x \in E_k : (x, c)^T \in \varrho \vee (c, x)^T \in \varrho$$

gilt.  $\mathfrak{M}_{k,c}$  bezeichne alle Ordnungsrelationen auf  $E_k$ , die durch  $c$  zentriert sind.

Sei

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

eine Relation auf  $E_4$ . Der transitive Abschluss von  $\varrho$

$$\leq = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ist eine zentrierte Relation auf  $E_4$ . Es gilt  $\leq \in \mathfrak{M}_{4,0}$  und  $\leq \in \mathfrak{M}_{4,1}$ , d.h., das zentrierende Element ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Dagegen ist die Ordnungsrelation  $\varrho'$  auf  $E_4$  gegeben durch

$$\varrho' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

keine zentrierte Relation. Angenommen,  $\varrho' \in \mathfrak{M}_{4,c}$  für ein  $c \in E_4$ . O.B.d.A. sei  $c = 0$ . Dann ist  $(0, 1)^T \notin \varrho'$ , im Widerspruch zur Annahme.

**Satz 23.** Sei  $\varrho$  eine binäre Relation auf  $E_k$ . Gehört der transitive Abschluss von  $\varrho$  zu  $\mathfrak{M}_{k,c}$ , dann gilt

$$\forall f \in pPOL_k \varrho \exists a \in E_k : f \in pPOL_k \{a\} \quad (3.9)$$

und

$$\mathcal{O}(pPOL_k \varrho) = \{pPOL_k \{a\} \mid a \in E_k\}$$

genügt den Bedingungen von Satz 19.

*Beweis.* Sei  $\leq$  der transitive Abschluss von  $\varrho$ . Angenommen, (3.9) gilt nicht. Dann existiert ein  $f \in pPOL_k \varrho$  mit  $f \notin pPOL_k \{a\}$  für jedes  $a \in E_k$ . Damit gilt  $f' \in P_k$  und  $f'(a) \neq a$  für jedes  $a \in E_k$ .

Sei  $p := f'(c)$ . O.B.d.A. kann  $c < p$  angenommen werden, sonst betrachte man  $f$  für die Relation

$$\varrho' := \{(a, b)^T \mid (b, a)^T \in \varrho\}.$$

Ein  $(m+1)$ -Tupel  $K = (x_0, \dots, x_m)$  heiße *zulässige Kette* bzgl.  $\varrho$ , falls

$$\forall 0 < i \leq m : (x_{i-1}, x_i)^T \in \varrho \setminus \iota_k^2$$

und  $m \geq 1$  sowie  $f'(x_0) = x_m$  gilt.

Da  $\leq$  der transitive Abschluss von  $\varrho$  ist und  $c < p$  gilt, existiert eine zulässige Kette  $K = (x_0, \dots, x_m)$  bzgl.  $\varrho$  mit  $x_0 = c$  und  $x_m = p$ .

Von dieser Kette ausgehend bilden wir die Menge

$$M := M(K) := \{x_0, x_1, \dots, x_m\} \cup \{x \in E_k : x_m < x\}$$

und durch Induktion über  $|M|$  zeigen wir

$$\exists x \in M : f'(x) = x. \quad (3.10)$$

Falls  $|M| = 1$ , so folgt  $x_0 = x_m = f'(x_0)$ , also (3.10).

Sei nun  $|M| > 1$  und für jede zulässige Kette  $K'$  mit  $M(K') \subset M$  gelte (3.10). Dann wird  $d := f'(x_1)$  betrachtet. Da  $f \in pPOL_k \varrho$  gilt, folgt  $(x_m, d)^T = (f'(x_0), f'(x_1))^T \in \varrho$  aus  $(x_0, x_1)^T \in \varrho$ .

- Falls  $d = x_m$  und  $m = 1$ , folgt  $f'(x_1) = d = x_1$ , also (3.10).
- Falls  $d = x_m$  und  $m > 1$ , kann man

$$K' := (x'_0, \dots, x'_{m'}) := (x_1, \dots, x_m)$$

und

$$M' := \{x_1, \dots, x_m\} \cup \{x \in E_k : x_m < x\}$$

mit  $m' = m - 1 \geq 1$  setzen. Dann ist  $K'$  eine zulässige Kette und aus  $M(K') = M' \subset M$  folgt (3.10).

- Falls  $d \neq x_m$ , dann gilt  $x_m < d$ , d.h.,  $d \in M$ . Man setze

$$K' := (x'_0, \dots, x'_{m'}) := (x_1, \dots, x_m, d)$$

und

$$M' := \{x_1, \dots, x_m, d\} \cup \{x \in E_k : d < x\}$$

mit  $m' = m$ . Dann ist  $K'$  eine zulässige Kette und aus  $M(K') = M' \subseteq M \setminus \{x_0\}$  folgt (3.10).

Damit gilt (3.10) für die Funktion  $f$ , also

$$\exists a \in M \subseteq E_k : f \in pPOL_k\{a\},$$

im Widerspruch zur Wahl von  $f$ .  $\square$

Alle Relationen für  $k = 4$ , auf die sich obiger Satz anwenden lässt, finden sich in Tabelle A.6 und der transitive Abschluss gehört jeweils zu  $\mathfrak{M}_{4,0}$ .

### 3.3 Binäre symmetrische reflexive Relationen

**Definition 24.** Sei  $\varrho \in R_k$  eine binäre kohärente reflexive und symmetrische Relation. Dann sei

$$G(\varrho) := (V, E) \text{ mit } V = E_k, E := \left\{ xy \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \varrho \setminus \iota_k^2 \right\}$$

der zugehörige Graph. Sei

$$\forall x \in V = E_k : d(x) := |\{xy \in E \mid y \in V \setminus \{x\}\}|,$$

d.h.,  $d(x)$  gibt den Grad des Knoten  $x$  an.

**Lemma 25.** Sei  $\varrho \in R_k$  eine binäre kohärente reflexive und symmetrische Relation und  $f^{(l)} \in pPOL_k\varrho$  mit  $f'(U) = U$  für ein  $U \leq G(\varrho)$  und  $U \cong K_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Außerdem sei  $G(\varrho)$  zusammenhängend. Dann gibt es ein  $\emptyset \subset C \subset E_k$  mit

$$f \in pPOL_k C.$$

*Beweis.* Sei  $G := G(\varrho)$ . O.B.d.A. sei

$$U = \left( E_n, \begin{pmatrix} E_n \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Angenommen, es gilt

$$\forall \emptyset \subset C \subset E_k : f \notin pPOL_k C \quad (3.11)$$

Wir zeigen zunächst

$$\forall x \in E_n \forall y \in E_k \setminus E_n : xy \in G. \quad (3.12)$$

Sei

$$M := \{y \in E_k \mid \forall x \neq y \in E_n : xy \in G\}.$$

Angenommen  $|M| < k$ . Dann existieren  $m_1, \dots, m_l \in M$  mit

$$m' := f(m_1, \dots, m_l) \notin M.$$

Dann gilt

$$\forall x \in E_k \forall i \in \{1, 2, \dots, l\} : \begin{pmatrix} x \\ m_i \end{pmatrix} \in \varrho$$

also auch

$$\forall x \in E_k : \begin{pmatrix} f'(x) \\ m' \end{pmatrix} \in \varrho.$$

Da  $f'(U) = U$  gilt, folgt somit

$$\forall x \in E_n : xm' \in G,$$

also  $m' \in M$  im Widerspruch zur Annahme an  $M$ . Damit gilt (3.12).

Sei  $U' \leq G$  ein maximaler Untergraph von  $G$  mit  $U \leq U'$  und  $U' \cong K_{n'}$  sowie

$$\forall x \in V(U') \forall y \in E_k \setminus V(U') : xy \in G. \quad (3.13)$$

Da  $U \cong K_n$  und (3.13), gilt  $n \leq n' \leq k - 2$ . O.B.d.A. gilt

$$U' = \left( E_{n'}, \binom{E_{n'}}{2} \right).$$

Es existieren  $p_1, \dots, p_l \in E_{n'}$  mit

$$p' := f(p_1, \dots, p_l) \notin E_{n'}.$$

Sei  $N := E_k \setminus (E_{n'} \cup \{p'\})$ . Dann gilt

$$\forall x \in N \exists q_{x,1}, \dots, q_{x,l} \in E_k \setminus \{x\} : f(q_{x,1}, \dots, q_{x,l}) = x.$$

Da weiter

$$\forall x \in N \forall i \in \{1, 2, \dots, l\} : \begin{pmatrix} q_{x,i} \\ p_i \end{pmatrix} \in \varrho$$

gilt

$$\forall x \in E_k \setminus \{p'\} : xp' \in G,$$

also  $p' \in E_{n'}$  im Widerspruch zur Annahme und (3.11).  $\square$

**Satz 26.** Sei  $\varrho \in R_k$  eine binäre kohärente reflexive und symmetrische Relation und  $G := G(\varrho)$  sei ein Baum. Dann gilt

$$\forall f \in pPOL_k \varrho \exists C \in \mathfrak{C}_k^1 : f \in pPOL_k C \quad (3.14)$$

und

$$\mathcal{O}(pPOL_k \varrho) = \{pPOL_k C \mid C \in \mathfrak{C}_k^1\}$$

genügt den Bedingungen von Satz 19.

*Beweis.* Sei  $f^n \in pPOL_k \varrho$  beliebig. Gilt  $f'(x) = \infty$  für ein  $x \in E_k$ , so gilt  $f \in pPOL_k \{x\}$  und (3.14) ist erfüllt. Sei  $H \leq G$  ein Baum mit  $f'(H) = H$  und

$$|V(H)| = \min \{|V(H')| \mid f'(H') = H' \leq G, H' \text{ Baum}\}.$$

Für  $|V(H)| \in \{1, 2\}$  gilt  $H \cong K_1$  bzw.  $H \cong K_2$ , also folgt die Behauptung aus Lemma 25.

Sei also  $|V(H)| \geq 3$ .  $f'$  ist ein Graphen-Isomorphismus von  $H$  nach  $H$ . Insbesondere gilt dann

$$\forall x \in V(H) : d(f'(x)) = d(x).$$

Sei

$$B := \{x \in V(H) \mid d(x) = 1\},$$

also bezeichnet  $B$  die Blattknoten. Es gilt nun

$$f'(B) = B \text{ und } f'(V(H) \setminus B) = V(H) \setminus B.$$

Setze

$$H' := (V', E') \text{ mit } V' := V(H) \setminus B, E' := \{xy \in E(H) \mid x, y \in V'\}.$$

Dann ist  $H'$  ein Baum und  $H' \leq H \leq G$ . Aus  $|V(H')| < |V(H)|$  ergibt sich ein Widerspruch zur Minimalitätsvoraussetzung. □

### 3.4 Total-symmetrische total-reflexive Relationen

Das folgende Lemma erweitert die Aussagen von Lemma 13(d) sowie Lemma 14(b) aus [17] auf weitere total-symmetrische und total-reflexive Relationen.

**Lemma 27.** Sei  $\varrho^{(h)} = \sigma \dot{\cup} \iota_k^h$  eine nicht-triviale, total-symmetrische und total-reflexive Relation auf  $E_k$ , für die

(a)  $h \geq 4$  oder

(b)  $h = 3$  und

$$\exists x \in E_k^2 \setminus \iota_k^2 \forall a \in E_k \setminus \omega(x) \exists y \in \sigma : \omega(x) \cup \{a\} = \omega(y) \quad (3.15)$$

gilt. Dann gilt

$$\forall f \in pPOL_k \varrho \exists \gamma \in \mathfrak{C}_k^1 \cup \{\chi\} : f \in pPOL_k \gamma \quad (3.16)$$

mit

$$\chi := \{x \in E_k^{h-1} \setminus \iota_k^{h-1} \mid \forall a \in E_k \setminus \omega(x) \exists y \in \sigma : \omega(x) \cup \{a\} = \omega(y)\} \cup \iota_k^{h-1}$$

und

$$\mathcal{O}(pPOL_k \varrho) = \{pPOL_k \gamma \mid \gamma \in \mathfrak{C}_k^1 \cup \{\chi\}\}.$$

genügt den Bedingungen von Satz 19.

*Beweis.* Aus der Definition von  $\chi$  folgt, dass  $\chi$  total-symmetrisch und total-reflexiv ist. Zu zeigen bleibt, dass  $\chi$  nicht-trivial ist. Für  $h = 3$  ist  $\chi \neq \iota_k^2$  wegen (3.15). Angenommen,  $\chi = E_k^{h-1}$  und  $\varrho \neq E_k^h$ . Dann existiert ein  $x = (x_1, x_2, \dots, x_h)^T \in E_k^h \setminus \varrho$ . Das ergibt aber einen Widerspruch zur Konstruktion von  $\chi$ , da  $(x_1, x_2, \dots, x_{h-1})^T \in \chi$  und  $x \notin \varrho$  gilt. Daher ist auch  $\chi$  eine nicht-triviale total-symmetrische, total-reflexive Relation und beschreibt damit einen maximalen partiellen Klon. Für  $h = 3$  ist  $\chi$  auch eine kohärente quasi-diagonale Relation.

Sei  $f^n \in pPOL_k \varrho$  beliebig. Angenommen,

$$\forall \gamma \in \mathfrak{C}_k^1 \cup \{\chi\} : f \notin pPOL_k \gamma.$$

Dann existieren  $c^1, \dots, c^n \in \chi$ , so dass

$$c := f(c^1, \dots, c^n) \in E_k^{h-1} \setminus \chi.$$

D.h.,

$$\exists q \in E_k \setminus \omega(c) \forall y \in \sigma : \omega(c) \cup \{q\} \neq \omega(y).$$

Da  $f \notin pPOL_k(E_k \setminus \{q\})$  gilt, existieren  $q_1, \dots, q_n \in E_k \setminus \{q\}$  mit  $f(q_1, \dots, q_n) = q$ . Daraus folgt dann

$$f \begin{pmatrix} c^1 & \dots & c^n \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ q \end{pmatrix} =: t,$$

wobei  $|\omega(t)| = h$ , also  $t \notin \iota_k^h$  gilt. Da aber auch  $\omega(t) \neq \omega(y)$  für alle  $y \in \sigma$  nach Konstruktion gilt, ist  $t \notin \varrho$ . Jedoch gilt nach der Wahl von  $c^1, \dots, c^n$ , dass

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \begin{pmatrix} c^i \\ q_i \end{pmatrix} \in \varrho$$

ist. Somit ergibt sich ein Widerspruch zu der Voraussetzung  $f \in pPOL_k \varrho$ .  $\square$

### 3.5 Weitere überflüssige Relationen für $k = 4$

**Lemma 28.** *Sei die Relation*

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann gilt

$$\forall f \in pPOL_4 \varrho \exists a \in E_4 : f \in pPOL_4 \{a\} \quad (3.17)$$

und

$$\mathcal{O}(pPOL_4 \varrho) = \{pPOL_4 \{a\} \mid a \in E_4\}$$

genügt den Bedingungen von Satz 19.

*Beweis.* Sei  $f \in pPOL_4\varrho$  beliebig. Gibt es ein  $a \in E_4$  mit  $f'(a) = \infty$ , dann gilt  $f \in pPOL_4\{a\}$ . Ansonsten gibt es für  $f'$  die folgenden Möglichkeiten

| $f'(0)$ | $f'(1)$ | $f'(2)$ | $f'(3)$ | $a$ | $c$    |
|---------|---------|---------|---------|-----|--------|
| 0       | $u$     | $v$     | $w$     | 0   |        |
| 1       | 0       | $v$     | $w$     |     | (0, 1) |
| 1       | 1       | $v$     | $w$     | 1   |        |
| 1       | 2       | $v$     | $w$     |     | (0, 1) |
| 1       | 3       | $v$     | $w$     |     | (0, 1) |
| 2       | 0       | $v$     | $w$     |     | (0, 1) |
| 2       | 1       | $v$     | $w$     | 1   |        |
| 2       | 2       | 0       | $w$     |     | (2, 1) |
| 2       | 2       | 1       | $w$     |     | (2, 1) |
| 2       | 2       | 2       | $w$     | 2   |        |
| 2       | 2       | 3       | $w$     |     | (2, 1) |
| 2       | 3       | 0       | $w$     |     | (2, 1) |
| 2       | 3       | 1       | $w$     |     | (2, 1) |
| 2       | 3       | 2       | $w$     | 2   |        |
| 2       | 3       | 3       | 0       |     | (2, 3) |
| 2       | 3       | 3       | 1       |     | (2, 3) |
| 2       | 3       | 3       | 2       |     | (2, 3) |
| 2       | 3       | 3       | 3       | 3   |        |
| 3       | 0       | $v$     | $w$     |     | (0, 1) |
| 3       | 1       | $v$     | $w$     |     | (0, 1) |
| 3       | 2       | $v$     | $w$     |     | (0, 1) |
| 3       | 3       | 0       | $w$     |     | (2, 1) |
| 3       | 3       | 1       | $w$     |     | (2, 1) |
| 3       | 3       | 2       | $w$     | 2   |        |
| 3       | 3       | 3       | 0       |     | (2, 3) |
| 3       | 3       | 3       | 1       |     | (2, 3) |
| 3       | 3       | 3       | 2       |     | (2, 3) |
| 3       | 3       | 3       | 3       | 3   |        |

Dabei seien  $u, v, w \in E_4$  beliebig. Ein Eintrag in der Spalte  $a$  bedeutet  $f'(a) = a$ , also  $f \in pPOL_4\{a\}$ . Andernfalls steht ein Eintrag in der Spalte  $c$  mit  $c \in \varrho$  und  $f'(c) \notin \varrho$ , d.h.,  $f \notin pPOL_4\varrho$ , im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

**Lemma 29.** Sei  $\varrho = \sigma \cup \varrho_i$  eine kohärente Relation auf  $E_4$  mit  $\sigma \neq \emptyset$  areflexiv und  $i = 1, 2$ . Dann gilt

$$\forall f \in pPOL_4\varrho \exists \chi^{(\mu)} \in \tilde{R}_{max, \mu \leq 2} : f \in pPOL_4\chi \quad (3.18)$$

und

$$\mathcal{O}(pPOL_4\varrho) = \left\{ pPOL_4\chi \mid \chi^{(\mu)} \in \tilde{R}_{max, \mu \leq 2} \right\}$$

genügt den Bedingungen von Satz 19.

*Beweis.* O.B.d.A. gilt  $\eta_4 = (0, 1, 2, 3)^T \in \varrho$ . Sei  $f^n \in pPOL_4\varrho$  beliebig. Angenommen, (3.18) gilt nicht. Dann gilt  $f \notin pPOL_4\{x\}$  für alle  $x \in E_4$ , insbesondere bedeutet das, dass  $f'$  keine Fixpunkte hat.

- Falls  $|f'(E_4)| = 1$ , hat  $f'$  einen Fixpunkt, im Widerspruch zur Annahme.

- Falls  $|f'(E_4)| = 2$ , gibt es  $a, b \in E_4, a \neq b$  mit  $f'(a) = b$  und  $f'(b) = a$ . Sei

$$\chi := \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \middle| \left( \begin{array}{c} a \\ x \\ b \\ y \end{array} \right) \in \varrho \right\}.$$

Dann ist  $\chi$  eine binäre symmetrische areflexive Relation mit

$$\chi \subseteq \left( \begin{array}{cccc} a & b & a' & b' \\ b & a & b' & a' \end{array} \right)$$

für  $\{a, b, a', b'\} = E_4$  und somit kohärent. Nach Voraussetzung gilt  $f \notin pPOL_4\chi$ , d.h., es existieren Zeilen  $c_1, c_2$  mit

$$f \left( \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array} \right) =: \left( \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \end{array} \right) \in E_4^2 \setminus \chi \quad (3.19)$$

und  $c^j \in \chi$  für alle  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Aus

$$C^j := \left( \begin{array}{c} a \\ c_{1,j} \\ b \\ c_{2,j} \end{array} \right) \in \varrho$$

und  $f \in pPOL_4\varrho$  folgt

$$f(C^1, C^2, \dots, C^n) = \left( \begin{array}{c} b \\ d_1 \\ a \\ d_2 \end{array} \right) \in \varrho.$$

Da  $(0 \ 2) \in G_\sigma$ , gilt also

$$\left( \begin{array}{c} a \\ d_1 \\ b \\ d_2 \end{array} \right) \in \varrho,$$

d.h.,  $\left( \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \end{array} \right) \in \chi$ , im Widerspruch zu (3.19).

- Falls  $|f'(E_4)| = 3$ , gilt  $|\omega(f'(\eta_4))| = 3$ , also  $f'(\eta_4) \notin \varrho$ , im Widerspruch zur Annahme.
- Falls  $|f'(E_4)| = 4$ , ist  $f'$  eine fixpunktfreie Permutation von  $E_4$ , d.h., entweder  $f' = (ab)(a'b') \in S_4$  mit  $\{a, b, a', b'\} = E_4$  oder  $f' = (aa'bb') \in S_4$  mit  $\{a, a', b, b'\} = E_4$ . Im ersten Fall gilt  $f'(a) = b$  und  $f'(b) = a$  mit  $a \neq b$ , wie im Fall  $|f'(E_4)| = 2$ .

Andernfalls ist

$$\chi := \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \middle| \left( \begin{array}{c} a \\ x \\ b \\ y \end{array} \right) \in \varrho \right\} = \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \middle| \left( \begin{array}{c} a' \\ x \\ b' \\ y \end{array} \right) \in \varrho \right\}.$$

Dann ist  $\chi$  eine binäre symmetrische areflexive Relation mit

$$\chi \subseteq \begin{pmatrix} a & b & a' & b' \\ b & a & b' & a' \end{pmatrix}$$

und somit kohärent. Nach Voraussetzung gilt  $f \notin pPOL_4\chi$ , d.h., es existieren Zeilen  $c_1, c_2$  mit

$$f \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in E_4^2 \setminus \chi \quad (3.20)$$

und  $c^j \in \chi$  für alle  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Da  $(0\ 2) \in G_\sigma$  liefern die Tupel

$$C^j := \begin{pmatrix} a \\ c_{1,j} \\ b \\ c_{2,j} \end{pmatrix} \in \varrho$$

aus

$$f(C^1, C^2, \dots, C^n) = \begin{pmatrix} a' \\ d_1 \\ b' \\ d_2 \end{pmatrix} \in \varrho,$$

dass  $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \chi$  gelten muss, im Widerspruch zu (3.20). Aus

$$C^j := \begin{pmatrix} a \\ c_{1,j} \\ b \\ c_{2,j} \end{pmatrix} \in \varrho$$

und  $f \in pPOL_4\varrho$  folgt

$$f(C^1, C^2, \dots, C^n) = \begin{pmatrix} a' \\ d_1 \\ b' \\ d_2 \end{pmatrix} \in \varrho.$$

D.h., es gilt  $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \chi$ , im Widerspruch zu (3.20). □

## Kapitel 4

# Benötigte Relationen

### 4.1 Blockfunktionen

Sei

$$B_k := \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{w=1}^{\infty} E_k^{h \times w}$$

die Menge aller Matrizen über  $E_k$ , die im folgenden **Blöcke** genannt werden. Weiter sei  $V_k^h := \mathfrak{P}(E_k^h)$  und

$$V_k := \bigcup_{h=1}^{\infty} V_k^h$$

Gebe  $H : B_k \rightarrow \mathbb{N}$  die Höhe und  $W : B_k \rightarrow \mathbb{N}$  die Breite eines Blocks an, d.h.,

$$H(B) = h \iff \exists w \in \mathbb{N} : B \in E_k^{h \times w}$$

und

$$W(B) = w \iff \exists h \in \mathbb{N} : B \in E_k^{h \times w}.$$

Dann heißt  $\Phi : B_k^3 \rightarrow V_k$  eine **Blockfunktion**, falls  $\Phi$  die folgende Bedingungen erfüllt.

$$\forall (X, Y, Z) \in \text{dom } \Phi : (h = H(X) = H(Y) = H(Z) \wedge \Phi(X, Y, Z) \in V_k^h) \quad (4.1)$$

$$|\text{dom } \Phi| < \infty \quad (4.2)$$

$$\forall (X, Y, Z), (X', Y', Z') \in \text{dom } \Phi : (W(X) \mid W(Y')) \wedge (W(Z) \mid W(Y')) \quad (4.3)$$

Falls  $\Phi$  eine Blockfunktion ist, dann bezeichne  $\widehat{\Phi}$  eine Korrespondenz derart, dass

$$\widehat{\Phi} := \left\{ ((X, Y, Z), v) \in B_k^3 \times \bigcup_{h=1}^{\infty} E_k^h \mid (X, Y, Z) \in \text{dom } \Phi \wedge v \in \Phi(X, Y, Z) \right\}$$

gilt. Aus (4.1) und (4.2) sowie  $|V_k^h| < \infty$  folgt  $|\widehat{\Phi}| < \infty$ . Daher kann man  $\widehat{\Phi} =: \{((X_1, Y_1, Z_1), v_1), \dots, ((X_n, Y_n, Z_n), v_n)\}$  setzen. Sei noch  $\Phi_0 : E_k \rightarrow E_k$

gegeben. Dann sei  $\bar{\Phi} : E_k^m \rightarrow E_k$  für ein genügend großes  $m$  folgendermaßen definiert.

|             |          |             |           |             |                          |
|-------------|----------|-------------|-----------|-------------|--------------------------|
| $x_1$       | ...      |             |           | $x_m$       | $\bar{\Phi}(\mathbf{x})$ |
| 0           | ...      |             |           | 0           | $\Phi_0(0)$              |
| 1           | ...      |             |           | 1           | $\Phi_0(1)$              |
| $\vdots$    |          |             |           | $\vdots$    | $\vdots$                 |
| $k-1$       | ...      |             |           | $k-1$       | $\Phi_0(k-1)$            |
| $Y_1$       | $Z_1^*$  | $Z_1^*$     | ...       | $Z_1^*$     | $v_1$                    |
| $X_2^*$     | $Y_2$    | $Z_2^*$     | ...       | $Z_2^*$     | $v_2$                    |
| $\vdots$    | $\ddots$ | $\ddots$    | $\ddots$  | $\vdots$    | $\vdots$                 |
| $X_{n-1}^*$ | ...      | $X_{n-1}^*$ | $Y_{n-1}$ | $Z_{n-1}^*$ | $v_{n-1}$                |
| $X_n^*$     | ...      | $X_n^*$     | $X_n^*$   | $Y_n$       | $v_n$                    |
| sonst       |          |             |           |             | $\infty$                 |

Dabei bedeutet ein  $B^*$ , dass der Block  $B$  so oft wiederholt ist, so dass die Breite von  $B^*$  mit der Breite von dem  $Y_i$  in der selben Spalte übereinstimmt. Aus der Bedingung (4.3) folgt, dass dies immer möglich ist.

Die zu einem Tupel  $((X_i, Y_i, Z_i), v_i)$  gehörenden Zeilen seien mit **Zeilenblock** bezeichnet. Die Zeilen, die aus  $\Phi_0$  erzeugt wurden, bilden hierbei einen weiteren Zeilenblock.

Zunächst wird ein Beispiel für eine Blockfunktion angegeben. Sei  $k = 4$  und

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei

$$\Phi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit wird für jedes  $v$  der Block  $\Gamma(v) := ( \Phi_0(v) \quad \Phi_0^2(v) )$  definiert.

Für eine unäre Funktion  $f$  sei  $f^2 = f \square f$ ,  $f^3 = f \square f \square f$ , usw.

Dann wird  $\Phi$  als Blockfunktion folgendermaßen angegeben.

|                                             |     |       |       |             |                       |
|---------------------------------------------|-----|-------|-------|-------------|-----------------------|
|                                             | $t$ | $X_t$ | $Y_t$ | $Z_t$       | $\Phi(X_t, Y_t, Z_t)$ |
|                                             | 1   | 0     | 0     | $\Gamma(0)$ | 0                     |
| $\forall v \in \varrho \setminus \iota_4^2$ | 2   | $v$   | $v$   | $\Gamma(v)$ | $v$                   |
|                                             | 3   | 0     | 0     | 2           | 0                     |
|                                             |     | 1     | 1     | 3           | 1                     |

Dann ist  $\bar{\Phi}$  auf folgenden Tupeln definiert:

| $t$ | $x_1$ | $x_2$ | ... |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | $x_{20}$ | $\bar{\Phi}(x_1, \dots, x_{20})$ |          |   |   |
|-----|-------|-------|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----------|----------------------------------|----------|---|---|
| 0   | 0     | 0     | 0   | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0        | 0                                | 0        | 2 |   |
| 0   | 1     | 1     | 1   | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1        | 1                                | 1        | 1 | 3 |
| 0   | 2     | 2     | 2   | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2        | 2                                | 2        | 2 | 0 |
| 0   | 3     | 3     | 3   | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3        | 3                                | 3        | 3 | 1 |
| 1.1 | 0     | 2     | 0   | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0        | 0                                | 0        | 0 | 0 |
| 1.2 | 0     | 0     | 0   | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0        | 0                                | 0        | 0 | 1 |
| 1.3 | 0     | 0     | 0   | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0        | 0                                | 0        | 0 | 2 |
| 1.4 | 0     | 0     | 0   | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0        | 0                                | 0        | 0 | 3 |
| 2.1 | 0     | 0     | 0   | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0        | 0                                | 0        | 0 | 2 |
| 2.1 | 1     | 1     | 1   | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1        | 1                                | 1        | 1 | 3 |
| 2.2 | 2     | 2     | 2   | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2        | 2                                | 2        | 0 | 0 |
| 2.2 | 3     | 3     | 3   | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3        | 3                                | 3        | 1 | 1 |
| 3   | 0     | 0     | 0   | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0        | 0                                | 0        | 0 | 0 |
| 3   | 1     | 1     | 1   | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1        | 1                                | 1        | 1 | 3 |
|     | sonst |       |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |          |                                  | $\infty$ |   |   |

Hier sieht man die verschiedenen Zeilenblöcke, jeweils durch Linien voneinander getrennt. Der Zeilenblock  $t = 0$  entspringt der Funktion  $\Phi_0$ , die Zeilenblöcke 1.1, 1.2, 1.3 und 1.4 entstammen der rechten Seite von  $\Phi$  bei  $t = 1$ , da  $E_4$  vier Elemente hat. Weiter kommen die Zeilenblöcke 2.1 und 2.2 aus  $t = 2$  auf Grund der Vorbedingung  $\forall v \in \varrho \setminus \iota_4^2$ .

Durch die senkrechte Abgrenzung innerhalb der Zeilenblöcke sind jeweils die Stellen gekennzeichnet, an denen  $Y_t$  liegt.

## 4.2 Eine universelle Blockfunktion

**Definition 30.** Sei  $\Phi_0 : E_k \rightarrow E_k$  gegeben. Dann sei für einen Vektor  $v$

$$\Gamma_{\Phi_0}(v) := \Gamma(v) := (\Phi_0^1(v) \Phi_0^2(v) \dots \Phi_0^n(v))$$

ein Block. Dabei sei  $n$  maximal mit der Bedingung

$$\forall 1 \leq i < j \leq n : \Phi_0^i(\eta_k) \neq \Phi_0^j(\eta_k).$$

Sei  $h \geq 2$  und  $M \geq 2$  beliebig. Seien für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, h\}$  ein  $j_i \in \{0, 1, \dots, M\}$  sowie ein  $x_{i0} \in E_k$  gegeben. Wenigstens für ein  $i$  sei dabei  $j_i \neq 0$ . Für jedes  $j \in \{0, 1, \dots, M\}$  sei ein  $i_j \geq 1$  gegeben.

Dann sei für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, h\}$  und jedes  $j \in \{1, 2, \dots, M\}$

$$Q_{ij} := \begin{cases} \underbrace{(x_{i0}, \dots, x_{i0})}_{i_j+n}, & \text{falls } j \neq j_i, \\ (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_j}, \Gamma(x_{i0})) & \text{sonst, } x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_j} \in E_k \text{ beliebig,} \end{cases}$$

mit  $Q_{ij} \neq Q_{i'j'}$ , falls  $i \neq i'$  und  $j = j_i = j_{i'} = j'$ . Dann sei

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_h \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1M} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{h1} & Q_{h2} & \cdots & Q_{hM} \end{pmatrix}$$

mit  $c_i \neq c_{i'}$  für  $i \neq i'$ . Dann heißt  $\Gamma_{\Phi_0}$  **Zeilenblock-trennend** bezüglich  $\varrho^{(h)}$ , falls ein  $j_0$  mit  $c^{j_0} \notin \varrho$  für jede Wahl der  $Q_{ij}$  existiert.

Da die Zeilen, auf denen  $\bar{\Phi}$  aus dem folgenden Satz definiert ist, von der Form wie in dieser Definition sind, bedeutet Zeilenblock-trennend, dass die Zeilen  $c_1, \dots, c_h$  aus einem Zeilenblock stammen müssen, da sonst ein  $j_0$  mit  $c^{j_0} \notin \varrho$  existiert.

**Satz 31.** Sei  $\varrho^{(h)}$  eine kohärente Relation, die areflexiv oder quasi-diagonal ist, und sei  $\Phi_0 \in pPOL_k^1 \varrho$  derart gegeben, dass  $\Gamma_{\Phi_0}$  Zeilenblöcke bezüglich  $\varrho$  trennt. Dann gehört  $pPOL_k \varrho$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .

*Beweis.* Da  $\varrho$  areflexiv oder quasi-diagonal ist, lässt es sich schreiben als

$$\varrho = \sigma \cup \delta,$$

wobei  $\sigma$  areflexiv ist und  $\delta = \emptyset$  oder  $\delta = \delta_\varepsilon$  für eine Äquivalenzrelation  $\varepsilon$  ist.

Setze zunächst  $\sigma_0 := \sigma$  und definiere dann rekursiv  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$ , so lange bis  $\sigma_l = \emptyset$  und  $\sigma_{l-1} \neq \emptyset$ .

Sei also  $\emptyset \subset \sigma_i \subseteq \sigma$  gegeben. Da  $\varrho$  kohärent ist, gibt es einen relationalen Homomorphismus  $\varphi_i : E_k \rightarrow E_h$  von  $\sigma_i$  nach  $M(\varrho)$  und ein  $s_i \in \sigma_i$  mit  $\varphi_i(s_i) = \eta_h$ . Setze nun  $\sigma_{i+1} := \{s \in \sigma_i \mid \varphi_i(s) \in \delta \cap E_h^h\}$ . Wegen  $\varphi_i(s_i) = \eta_h \notin \delta \cap E_h^h$  gilt  $|\sigma_{i+1}| < |\sigma_i|$ . Da weiter  $|\sigma| < \infty$  gilt, existiert ein  $l \in \mathbb{N}$  mit  $\sigma_l = \emptyset$ .

Sei  $\varphi_\star : E_h \rightarrow E_k$  durch  $\varphi_\star(\eta_h) := s_0$  definiert. Damit definiere für  $i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$  die Funktion  $q_i : E_k \rightarrow E_k$  mit  $q_i := \varphi_i \square \varphi_\star$  sowie für  $v \in E_k^\mu$  den Block

$$P_i(v) := \left\{ \left( \begin{array}{c} x_{v_0} \\ x_{v_1} \\ \vdots \\ x_{v_{\mu-1}} \end{array} \right) \in E_k^\mu \mid \varphi_i(a) = \varphi_i(b) \implies x_a = x_b \right\}.$$

Sei  $P_i := P_i(\eta_k)$ . Da  $|\varphi_i(E_k)| = h$  ist, gilt auch

$$\forall x \in P_i : |\omega(x)| \leq h.$$

Definiere  $\Phi$  als Blockfunktion folgendermaßen.

|                                                               | $t$ | $X_t$        | $Y_t$                                                             | $Z_t$        | $\Phi(X_t, Y_t, Z_t)$ |
|---------------------------------------------------------------|-----|--------------|-------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------------|
| $\forall \mu < h \forall v \in E_k^\mu \setminus \iota_k^\mu$ | 1   | $v$          | $v \quad \Gamma(v)$                                               | $v$          | $E_k^\mu$             |
|                                                               | 2   | $s_0$        | $s_0 \quad \Gamma(s_0)$                                           | $s_0$        | $\varrho$             |
| $\forall v \in E_k^h \setminus \varrho$                       | 3   | $v$          | $\varrho \quad v \quad \Gamma(v)$                                 | $v$          | $E_k^h$               |
| $\forall i \in \{0, \dots, l-1\}$                             | 4   | $\eta_k$     | $P_0 \quad \dots \quad P_{i-1} \quad \eta_k \quad \Gamma(\eta_k)$ | $\eta_k$     | $q_i(\eta_k)$         |
|                                                               | 5   | $\eta_k$     | $P_0 \quad \dots \quad P_{l-1} \quad \eta_k \quad \Gamma(\eta_k)$ | $\eta_k$     | $E_k^k$               |
| $\forall 3 \leq \mu \leq k$                                   | 6   | $\mathbf{0}$ | $\iota_k^\mu \quad \Gamma(\mathbf{0})$                            | $\mathbf{0}$ | $E_k^\mu$             |
|                                                               | 7   | $\mathbf{0}$ | $\varrho_2 \quad \Gamma(\mathbf{0})$                              | $\mathbf{0}$ | $E_k^4$               |

Zunächst beweisen wir

$$\forall \chi \neq \varrho, \chi \text{ kohärent} : \overline{\Phi} \notin pPOL_4\chi. \quad (4.4)$$

*Beweis.* Angenommen, (4.4) gilt nicht. Dann existiert eine kohärente Relation  $\chi^{(\mu)} \neq \varrho$  mit

$$\overline{\Phi} \in pPOL_k\chi. \quad (4.5)$$

Da  $\chi$  nicht-trivial ist, gilt

$$\chi \subseteq E_k^\mu. \quad (4.6)$$

- Für  $\iota_k^\mu \subseteq \chi$  folgt  $E_k^\mu \subseteq \chi$  mit  $t = 6$ , im Widerspruch zu (4.6).
- Für  $\mu = 4$  und  $\varrho_2 \subseteq \chi$  folgt  $E_k^4 \subseteq \chi$  mit  $t = 7$ , im Widerspruch zu (4.6).
- Für  $\mu < h$  folgt mit  $t = 1$  mittels  $v \in \chi \setminus \iota_k^\mu \neq \emptyset$  die Aussage  $E_k^\mu \subseteq \chi$ , im Widerspruch zu (4.6).
- Für  $\mu > h$  wähle ein  $v \in \chi \setminus \iota_k^\mu$  beliebig. Induktiv beweisen wir

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, l-1\} : P_i(v) \subseteq \chi. \quad (4.7)$$

*Beweis.* Aus  $t = 4$  mit  $i = 0$  folgt  $q_0(v) \in \chi$ . Da  $|q_0(v)| \leq h < \mu$ , gilt  $q_0(v) \in \delta_{\varepsilon_0} \subset \chi$  für ein gewisses  $\varepsilon_0$ . Damit gilt dann aber auch  $P_0(v) \subseteq \delta_{\varepsilon_0} \subset \chi$ .

Zu zeigen ist  $P_i(v) \in \chi$ . Sei also  $P_j(v) \subseteq \chi$  für alle  $j$  mit  $0 \leq j < i$ . Aus  $t = 4$  folgt  $q_i(v) \in \chi$ . Da  $|q_i(v)| \leq h < \mu$ , gilt  $q_i(v) \in \delta_{\varepsilon_i} \subset \chi$  für ein gewisses  $\varepsilon_i$ . Damit gilt dann aber auch  $P_i(v) \subseteq \delta_{\varepsilon_i} \subset \chi$ .  $\square$

Aus (4.7) und  $t = 5$  folgt nun  $E_k^\mu \subseteq \chi$ , im Widerspruch zu (4.6).

- $\mu = h$ . Wie üblich wird  $\varrho \cap \chi$  maximal angenommen, d.h., die Zeilen von  $\chi$  sind entsprechend permutiert.

Gibt es ein  $v \in \chi \setminus \iota_k^h$ , so dass  $|q_i(v)| < h$  für alle  $i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$  gilt, so folgt  $P_i(v) \subseteq \chi$  für alle  $i$  und damit folgt nach  $t = 5$  ein Widerspruch wegen  $E_k^h \subseteq \chi$ .

Andernfalls wähle  $v \in \chi \setminus \iota_k^h$  beliebig und  $i_v$  sei das kleinste  $i$ , für das  $|q_i(v)| = h$  gilt. Für  $i < i_v$  ist wieder  $P_i(v) \subseteq \chi$  und damit nach  $t = 4$  auch  $q_i(v) = s_0^{(\beta)} \in \chi$  für eine Permutation  $\beta$ . Mit  $t = 2$  folgt dann weiter  $\varrho^{(\beta)} \subseteq \chi$  und damit nach Voraussetzung an  $\chi$  genauer  $\varrho \subset \chi$ . Nun kann man ein  $v' \in \chi \setminus \varrho$  wählen und erhält mit  $t = 3$  einen Widerspruch wegen  $E_k^h \subseteq \chi$ .

Also gilt (4.4). ■

Nun zeigen wir

$$\overline{\Phi}^m \in pPOL_k\varrho. \quad (4.8)$$

Angenommen, es gilt  $\bar{\Phi} \notin pPOL_k \varrho$ . Dann existieren Zeilen  $c_1, \dots, c_h$  mit  $c_i := (c_{i1}, \dots, c_{im})$ ,

$$\bar{\Phi} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_h \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_h \end{pmatrix} =: d \notin \varrho \quad (4.9)$$

und

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : c^j \in \varrho. \quad (4.10)$$

Nach Voraussetzung an  $\Phi_0$  beziehungsweise  $\Gamma$  müssen die Zeilen aus einem Zeilenblock stammen. Daher bleibt also zu zeigen, dass die Zeilen  $c_1, \dots, c_h$  mit den genannten Bedingungen nicht aus einem Zeilenblock kommen können. Dafür werden die einzelnen Definitionen  $t = 0$  bis  $t = 7$  geprüft.

Sind zwei Zeilen gleich, so gilt  $d \in \varrho$  nach Lemma 9, im Widerspruch zu (4.9).

- Für  $t = 0$  (definiert durch  $\Phi_0$ ) folgt  $d \in \varrho$  aus  $\Phi_0 \in pPOL_k \varrho$ , im Widerspruch zu (4.9).
- Für  $t = 1$  stehen maximal  $h - 1$  Zeilen zur Verfügung, also müssen zwei der Zeilen  $c_i$  gleich sein, im Widerspruch zu (4.9) nach Lemma 9.
- Es müssen bei  $t = 2$  alle  $h$  verschiedenen Zeilen genommen werden. Dann gilt  $c^j \in \Gamma(s_0)^{(\pi)}$  für ein  $\pi \in G_\sigma$  und damit  $d \in \varrho^{(\pi)} = \varrho$ , im Widerspruch zu (4.9).
- Auch bei  $t = 3$  müssen alle  $h$  verschiedenen Zeilen genommen werden. Dann folgt aus dem Block  $(\varrho v)$  und  $v \notin \varrho$ , dass mindestens  $|\varrho| + 1$  verschiedene Spalten existieren, d.h., es existiert ein  $j$  mit  $c^j \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.10).
- Sei für  $t = 4$  ein  $i \in \{0, 1, 2, \dots, l - 1\}$  beliebig und für  $t = 5$  sei  $i = l$ . Aus der Definition der Blöcke  $P_0$  bis  $P_{i-1}$  folgt, dass  $c^j \in \sigma_i \cup \delta$  gelten muss. Dann ist aber nach Definition von  $q_i$  auch  $d \in \varrho$  beziehungsweise für  $t = 5$  ist  $\sigma_l = \emptyset$  und damit  $c^j \in \delta$  und folglich  $d \in \delta$ , im Widerspruch zu (4.9).
- Sei  $t = 6$ .
  - Falls  $\mu < h$  gilt, dann sind zwei der Zeilen  $c_i$  gleich, im Widerspruch zu (4.9) nach Lemma 9.
  - Falls  $\mu = h$  gilt, müsste  $l_k^h \subseteq \varrho$  gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung an  $\varrho$ , denn  $\varrho$  ist areflexiv oder quasi-diagonal.
  - Falls  $\mu > h$  gilt, dann gibt es für jedes  $x \in E_k^h$  ein  $j$  mit  $c^j = x$  nach Definition von  $l_k^\mu$ . Daher müsste  $E_k^h \subseteq \varrho$  gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung an  $\varrho$ .

Also existiert ein  $j$  mit  $c^j \notin \varrho$  im Widerspruch zu (4.10).

- Sei  $t = 7$ .
  - Falls  $h > 4$  gilt, dann sind zwei der Zeilen  $c_i$  gleich, im Widerspruch zu (4.9) nach Lemma 9.

- Falls  $h = 4$  gilt, müsste  $\varrho_2 \subseteq \varrho$  gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung an  $\varrho$ , denn  $\varrho$  ist areflexiv oder quasi-diagonal.
- Falls  $h = 3$  gilt, dann gibt es  $j, j'$  mit  $c^j = (0, 0, 1)^T$  und  $c^{j'} = (0, 1, 1)^T$ . Jedoch gilt  $\{c^j, c^{j'}\} \not\subseteq \delta$ , im Widerspruch zu (4.10). Daher müsste  $E_k^h \subseteq \varrho$  gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung an  $\varrho$ .
- Falls  $h = 2$  gilt, dann gibt es für jedes  $x \in E_k^2$  ein  $j$  mit  $c^j = x$  nach Definition von  $\varrho_2$ . Daher müsste  $E_k^2 \subseteq \varrho$  gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung an  $\varrho$ .

Also existiert ein  $j$  mit  $c^j \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.10).

Somit gilt (4.8).

Damit ist nun gezeigt, dass  $\bar{\Phi} \in pPOL_k\varrho$  und  $\bar{\Phi} \notin pPOL_k\chi$  für jede kohärente Relation  $\chi \neq \varrho$ .  $\square$

### 4.3 Anwendung der universellen Blockfunktion

Die Lemmata 9 und 10 aus [17] zeigen

$$\exists f \in \tilde{P}_k : [f] = pPOL_k\varrho$$

für alle Relationen  $\varrho \in p\mathfrak{S}_h$  für  $2 \leq h \leq k$ . Damit gehören diese Relationen zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ . Der folgende Satz zeigt für eine größere Menge von Relationen, die  $p\mathfrak{S}_h$  umfasst, dass die von diesen beschriebenen maximalen partiellen Klone zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$  gehören. Speziell werden damit auch die Lemmata 24, 26, 27 und 28 aus [17] bewiesen.

**Satz 32.** *Sei  $\varrho^{(h)} = \sigma \cup \delta$  eine kohärente Relation mit  $\sigma$  areflexiv und gelte*

- $\delta = \emptyset$ , d.h.,  $\varrho$  ist areflexiv, oder
- $h \geq 3$  und  $\delta = \delta_{E_h}$ , d.h.,  $\varrho$  ist quasi-diagonal.

Weiter enthalte  $G_\sigma$  eine fixpunktfreie Permutation  $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$  mit disjunkten Zyklen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  und es gilt

$$\forall \emptyset \neq I \subset \{1, 2, \dots, n\} : \prod_{i \in I} \alpha_i \notin G_\sigma.$$

Dann gehört  $pPOL_k\varrho$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .

*Beweis.* Es wird Satz 31 verwendet. Es genügt also ein  $\Phi_0$  mit den gegebenen Bedingungen zu konstruieren.

Da  $\varrho$  kohärent ist, gibt es einen relationalen Homomorphismus  $\varphi : E_k \rightarrow E_h$  von  $\sigma$  nach  $M(\varrho)$  und ein  $s_0 \in \sigma$  mit  $\varphi(s_0) = \eta_h$ . Sei  $\varphi_* : E_h \rightarrow E_k$  durch

$\varphi_*(\eta_h) := s_0$  definiert. Damit ist  $\varphi_*$  ein relationaler Homomorphismus von  $M(\varrho)$  nach  $\varrho$ , denn

$$\begin{aligned}\varphi_*(M(\varrho)) &= \varphi_*\left(\left\{\eta_h^{(\pi)} \mid \pi \in G_\sigma\right\} \cup (\delta \cap E_h^h)\right) \\ &= \left\{s_0^{(\pi)} \mid \pi \in G_\sigma\right\} \cup \varphi_*(\delta \cap E_h^h) \\ &\subseteq \left\{s_0^{(\pi)} \mid \pi \in G_\sigma\right\} \cup \delta \\ &\subseteq \sigma \cup \delta \\ &= \varrho.\end{aligned}$$

Weiter gilt  $\varphi_* \square \varphi = \text{id}_{E_h}$ .

Sei weiter  $\gamma_i := \varphi \square \alpha^i \square \varphi_*$  für  $i \in \{0, 1, \dots, o(\alpha)\}$  und

$$\Gamma(v) := (\gamma_1(v) \dots \gamma_{o(\alpha)}(v)).$$

Hierbei gilt die Beziehung  $\gamma_{i+1} = \gamma_i \square \gamma_0$  und  $\gamma_{o(\alpha)} = \gamma_0 = \varphi \square \varphi_*$ .

Nach Konstruktion ist  $\Phi_0 := \gamma_1 \in pPOL_k \varrho$ . Damit wird  $\overline{\Phi}^m$  wie in Satz 31 definiert.

Angenommen,  $\overline{\Phi} \notin pPOL_k \varrho$ . So gibt es Zeilen  $c_1, \dots, c_h$  mit  $c_i := (c_{i1} \dots c_{im})$ ,

$$\overline{\Phi} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_h \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_h \end{pmatrix} =: d \notin \varrho$$

und

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : c^j \in \varrho.$$

Es genügt nun zu zeigen, dass  $\Gamma$  Zeilenblöcke trennt. Daher kann angenommen werden, dass die Zeilen  $c_i$  nicht alle aus dem selben Zeilenblock stammen. Das heißt, wenigstens eine Zeile ist nicht konstant und enthält damit für ein  $x \in E_k$  den Abschnitt  $\Gamma(x)$  in den Spalten  $j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, j_0 + o(\alpha)$ . Sei dies die Zeile  $c_{i_0}$ . Dann betrachte man nur diese Spalten, d.h. die Tupel

$$\begin{pmatrix} c_{1,j_0+1} \\ \vdots \\ c_{h,j_0+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{1,j_0+2} \\ \vdots \\ c_{h,j_0+2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} c_{1,j_0+o(\alpha)} \\ \vdots \\ c_{h,j_0+o(\alpha)} \end{pmatrix}.$$

Seien

$$I_0 := \{i \in \{1, 2, \dots, h\} \mid c_i, c_{i_0} \text{ aus dem selben Zeilenblock}\}$$

und

$$I_1 := \{1, \dots, h\} \setminus I_0.$$

Dann gibt es für jedes  $i \in I_0$  ein  $x_i \in E_k$  mit

$$(c_{i,j_0+1} \ c_{i,j_0+2} \ \dots \ c_{i,j_0+o(\alpha)}) = \Gamma(x_i).$$

Ist dagegen  $i \in I_1$ , so gilt nach der Konstruktion von  $\overline{\Phi}$  die Beziehung

$$c_{i,j_0+1} = c_{i,j_0+2} = \dots = c_{i,j_0+o(\alpha)}.$$

Nach Konstruktion von  $\Phi_0 = \gamma_1$  gilt dann auch

$$\forall j \in \{1, \dots, o(\alpha)\} : C^j := \begin{pmatrix} C_1^j \\ C_2^j \\ \vdots \\ C_h^j \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Phi_0(c_{1,j_0+j}) \\ \Phi_0(c_{2,j_0+j}) \\ \vdots \\ \Phi_0(c_{h,j_0+j}) \end{pmatrix} \in \varrho$$

und

$$\forall i \in I_0 \exists y_i \in \omega(s_0) : (C_i^1, C_i^2, \dots, C_i^{o(\alpha)}) = \Gamma(y_i)$$

sowie

$$\forall i \in I_1 \exists y_i \in \omega(s_0) : C_i^1 = C_i^2 = \dots = C_i^{o(\alpha)} = y_i.$$

Für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, o(\alpha)\}$  gilt  $|\omega(C^j)| = |\omega(s_0)| = h$  oder falls  $h \geq 3$  auch  $|\omega(C^j)| = 1$ . Angenommen, es existiert ein  $j'$  mit  $|\omega(C^{j'})| = 1$ , d.h.,  $C^{j'} = (z, z, \dots, z)$  für ein gewisses  $z$ . Dann gilt

$$\left( \forall i \in I_0 : C_i^{j'+1 \bmod o(\alpha)} = \Phi_0(z) \neq z \right) \wedge \left( \forall i \in I_1 : C_i^{j'+1 \bmod o(\alpha)} = z \right),$$

also  $|\omega(C^{j'+1 \bmod o(\alpha)})| = 2$ , im Widerspruch zur Voraussetzung an  $\varrho$  für  $h \geq 3$ .

Somit gilt  $|\omega(C^j)| = |\omega(s_0)| = h$  für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, o(\alpha)\}$ .

Zu jedem  $\alpha_i$  für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sei  $A_i$  die Menge derjenigen Elemente, die  $\alpha_i$  bewegt, d.h.,

$$A_i := \{\varphi_\star(x) \mid x \in E_h, \alpha_i(x) \neq x\}.$$

Da die Zyklen  $\alpha_i$  paarweise disjunkt sind, gilt auch  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  für  $i \neq j$ , und da  $\alpha$  fixpunktfrei ist, gilt  $E_h = \bigcup_{i=1}^n \varphi(A_i)$  und  $|A_i| \geq 2$ .

Angenommen, es gibt ein  $u \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \in I_0$  und  $i' \in I_1$  mit  $A_u \cap \{C_i^1, C_i^2, \dots, C_i^{o(\alpha)}\} \neq \emptyset$  und  $A_u \cap \{C_{i'}^1, C_{i'}^2, \dots, C_{i'}^{o(\alpha)}\} \neq \emptyset$ . Folglich gibt es ein  $j \in \{1, \dots, o(\alpha)\}$  mit  $C_i^j \in A_u$ . Dann ist  $D := \varphi(C_i^j) \in \varphi(A_u)$  und es gilt

$$\begin{aligned} \forall j' \in \{1, \dots, o(\alpha)\} : C_i^{j+j' \bmod o(\alpha)} &= (\varphi \square \alpha^{j'} \square \varphi_\star)(C_i^j) \\ &= (\alpha^{j'} \square \varphi_\star)(D) \\ &= (\alpha_u^{j'} \square \varphi_\star)(D) \\ &\in A_u. \end{aligned}$$

Folglich gilt  $A_u = \{C_i^1, C_i^2, \dots, C_i^{o(\alpha)}\}$ , da auch  $|A_u| \leq o(\alpha)$ . Somit gilt  $C_{i'}^1 = C_{i'}^2 = \dots = C_{i'}^{o(\alpha)} \in A_u = \{C_i^1, C_i^2, \dots, C_i^{o(\alpha)}\}$ . Das heißt, es existiert eine Spalte  $j''$  mit  $|\omega(C^{j''})| < h$ , ein Widerspruch zu  $|\omega(C^{j''})| = h$ .

Da  $\omega(C^1) = \omega(C^2) = \omega(s_0)$  ist, gibt es Permutationen  $\beta_1, \beta_2, \theta \in S_h$  mit  $C^1 = s_0^{(\beta_1)}$ ,  $C^2 = s_0^{(\beta_2)}$  und  $C^2 = (C^1)^{(\theta)}$ .

Aus dem vorhergehenden folgt für  $\theta$ , dass für ein  $u \in \{1, 2, \dots, n\}$  entweder alle Elemente aus  $A_u$  festgelassen werden, d.h.,

$$C_i^1 \in A_u \implies C_i^2 = C_i^1,$$

oder alle Elemente aus  $A_u$  werden bewegt, d.h.,

$$C_i^1 \in A_u \implies C_i^2 = \Phi_0(C_i^1).$$

Sei  $U$  die Menge aller  $u \in \{1, 2, \dots, n\}$ , so dass alle Elemente aus  $A_u$  bewegt werden. Da  $C_i^1 = C_i^2$  für  $i \in I_1$ , gilt  $U \subset \{1, 2, \dots, n\}$  und da  $C_i^1 \neq C_i^2$  für  $i \in I_0$ , gilt  $U \neq \emptyset$ . Folglich gilt

$$\prod_{u \in U} \alpha_u = \beta_1 \theta \beta_2^{-1} \in G_\sigma$$

mit  $\emptyset \subset U \subset \{1, 2, \dots, n\}$ . Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung an  $\alpha$ , d.h., die Zeilen  $c_1, \dots, c_h$  können nicht aus verschiedenen Zeilenblöcken kommen.

Damit sind  $\Phi_0$  beziehungsweise  $\Gamma$  Zeilenblock-trennend. Das heißt, Satz 31 ist anwendbar und damit also  $pPOL_k \varrho$  in jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .  $\square$

In Tabelle B.3 sind für  $k = 4$  diejenigen kohärenten Relationen angegeben, auf die Satz 32 anwendbar ist. Die Spalten  $Nr.$ ,  $\delta$  und  $\sigma$  sind den Tabellen A.3 bis A.18 entnommen. Die Spalte  $\alpha$  gibt eine Wahl des Parameters für die Anwendung von 32 an und die Spalte  $B$  gibt ein Erzeugendensystem für  $G_\sigma$  an.

In [17] wird in Lemma 8 gezeigt, dass alle durch nicht-triviale Äquivalenzrelationen gegebenen partiellen Klone zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$  gehören. Der folgende Satz 34 erweitert diese Aussage auf gewisse kohärente Relationen, bei denen die Elemente von  $E_k$  durch die Relation in mindestens zwei verschiedene Klassen eingeteilt werden können. Speziell wird damit auch Lemma 25 aus [17] bewiesen.

**Lemma 33.** *Sei  $\varrho^{(h)} = \sigma \cup \delta$  eine kohärente Relation auf  $E_k$  und  $A \subseteq E_k$  mit  $|A| \geq h$  und  $(A^h \setminus \iota_k^h) \cap \varrho \neq \emptyset$ . Dann gibt es einen relationalen Homomorphismus  $\varphi : E_k \rightarrow E_k$  von  $\varrho$  nach  $\chi := A^h \cap \varrho$ .*

*Beweis.* Da  $\varrho$  kohärent, gibt es einen relationalen Homomorphismus  $\varphi_0 : E_k \rightarrow E_h$  von  $\varrho$  nach  $M(\varrho)$ . Dann sei

$$\varphi_*(\eta_h) := s \in (A^h \setminus \iota_k^h) \cap \varrho.$$

Dann ist  $\varphi_* : E_h \rightarrow E_k$  ein relationaler Homomorphismus, da

$$\forall \pi \in G_\sigma : \varphi_*(\eta_h^{(\pi)}) = s^{(\pi)} \in \varrho$$

und

$$\varphi_*(\delta \cap E_h^h) \subseteq \delta \subseteq \varrho.$$

Dann ist  $\varphi := \varphi_0 \square \varphi_*$  der gesuchte relationale Homomorphismus.  $\square$

**Satz 34.** *Sei  $\varrho^{(h)} = \sigma_1 \cup \sigma_2$  eine kohärente Relation mit  $\omega(\sigma_1) \cap \omega(\sigma_2) = \emptyset$  und  $\sigma_i \neq \emptyset$  für  $i = 1, 2$ . Weiter sei  $\varrho$  areflexiv oder quasi-diagonal. Dann gehört  $pPOL_k \varrho$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .*

*Beweis.* Bezeichne  $\omega_1 := \omega(\sigma_1)$  und  $\omega_2 := E_k \setminus \omega_1$ .

- Falls  $\varrho$  areflexiv, seien  $a_1 \in \sigma_1$  und  $a_2 \in \sigma_2$  beliebig. Da  $\varrho$  kohärent ist, gibt es nach Lemma 33 relationale Homomorphismen  $\kappa_i : E_k \rightarrow \omega(a_i)$  von  $\varrho$  nach  $\sigma_i$  für  $i = 1, 2$ . Dann setze

$$\begin{aligned}\forall x \in \omega_1 : \Phi_0(x) &:= \kappa_2(x) \in \omega_2 \\ \forall x \in \omega_2 : \Phi_0(x) &:= \kappa_1(x) \in \omega_1.\end{aligned}$$

- Falls  $\varrho$  quasi-diagonal, seien  $a_i \in \omega(\sigma_i)$  für  $i = 1, 2$  beliebig. Dann setze

$$\begin{aligned}\forall x \in \omega_1 : \Phi_0(x) &:= a_2 \in \omega_2 \\ \forall x \in \omega_2 : \Phi_0(x) &:= a_1 \in \omega_1.\end{aligned}$$

Dann ist  $\Phi_0$  wohldefiniert und  $\Phi_0 \in pPOL_k\varrho$ .

Definiere  $\Gamma(v) := (\Phi_0(v) \Phi_0^2(v))$ . Damit wird  $\bar{\Phi}^m$  wie in Satz 31 definiert.

Angenommen, es gilt  $\bar{\Phi} \notin pPOL_k\varrho$ . Dann existieren Zeilen  $c_1, \dots, c_h$  mit  $c_i := (c_{i1} \dots c_{im})$ ,

$$\bar{\Phi} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_h \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_h \end{pmatrix} =: d \notin \varrho$$

und

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : c^j \in \varrho.$$

Es genügt nun zu zeigen, dass  $\Gamma$  Zeilenblöcke trennt. Also seien die Zeilen  $c_i$  aus verschiedenen Zeilenblöcken, d.h., wenigstens eine Zeile ist nicht konstant und enthält damit für ein  $x \in E_k$  den Abschnitt  $\Gamma(x)$  in den Spalten  $j_0+1, j_0+2$ . Sei dies die Zeile  $i_0$ . Dann gibt es aber noch wenigstens eine Zeile  $i_1$ , die nicht in dem Zeilenblock ist, d.h.,  $c_{i_1, j_0+1} = c_{i_1, j_0+2} =: y$ . Dann ist  $\{\Phi_0(x), y\} \subseteq \omega(c^{j_0+1})$  und  $\{\Phi_0^2(x), y\} \subseteq \omega(c^{j_0+2})$ . O.B.d.A. ist  $\Phi_0(x) \in \omega_1$  und damit dann  $\Phi_0^2(x) \in \omega_2$ . Da  $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$  und  $\omega(c^{j_0+1}) \subseteq \omega_i$  für ein  $i = 1, 2$ , folgt  $\{\Phi_0(x), y\} \subseteq \omega(c^{j_0+1}) \subseteq \omega_1$  und damit  $y \in \omega_1$ . Analog folgt  $y \in \omega_2$ . Damit ist aber  $y \in \omega_1 \cap \omega_2$ , also ergibt sich ein Widerspruch.

Damit sind  $\Phi_0$  beziehungsweise  $\Gamma$  Zeilenblock-trennend. Das heißt, Satz 31 ist anwendbar und damit also  $pPOL_k\varrho$  in jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .  $\square$

In Tabelle B.4 sind für  $k = 4$  diejenigen kohärenten Relationen angegeben, auf die Satz 34 anwendbar ist. Die Spalten  $Nr.$ ,  $\delta$  und  $\sigma$  sind den Tabellen A.3 bis A.18 entnommen. Die Spalten  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  geben eine Wahl der Parameter für die Anwendung von Satz 34 an.

**Satz 35.** Sei  $\varrho^{(h)} = \sigma \cup \delta_\varepsilon$  eine kohärente quasi-diagonale Relation und habe  $\varepsilon$  mindestens 2 Äquivalenzklassen, die alle jeweils mindestens 2 Elemente haben. Dann gehört  $pPOL_k\varrho$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .

*Beweis.* Es wird Satz 31 verwendet. Es genügt also ein  $\Phi_0$  mit den gegebenen Bedingungen zu konstruieren.

Sei  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  die Menge der Äquivalenzklassen von  $\varepsilon$ . Da  $|A_i| \geq 2$  für alle  $i$  gilt, ist  $2n \leq h$  sowie  $n \geq 2$  nach Voraussetzung. Insbesondere gilt

$$E_h = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

und

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Da  $\varrho$  kohärent ist, gibt es einen relationalen Homomorphismus  $\varphi : E_k \rightarrow E_h$  von  $\sigma$  nach  $M(\varrho)$  und ein  $s_0 \in \varrho$  mit  $\varphi(s_0) = \eta_h$ . Damit bilde man die Mengen

$$B_i := \{x \in E_k \mid \varphi(x) \in A_i\}$$

für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  und wähle  $b_i \in B_i$  beliebig. Dann definiere  $\varphi_* : E_h \rightarrow E_k$  durch  $\varphi_*(y) := b_{(i+1) \bmod n}$  für  $y \in A_i$ . Damit ist dann  $\Phi_0 := \varphi \square \varphi_* : E_k \rightarrow E_k$  ein relationaler Homomorphismus von  $\sigma$  nach  $\varrho$ , genauer gilt  $\Phi_0(\sigma) \subseteq \delta_\varepsilon$ , da  $\omega(\Phi_0(\sigma)) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  und  $n < h$  gilt.

Angenommen,  $\Phi_0 \notin pPOL_k \varrho$ . Dann existiert  $s \in \varrho$  mit  $\Phi_0(s) \notin \varrho$ . Da für  $s \in \delta_\varepsilon$  auch  $\Phi_0(s) \in \delta_\varepsilon$  gilt, kann  $s \in \sigma$  angenommen werden. Aus  $|\omega(\Phi_0(s))| < h$  folgt  $\Phi_0(s) \notin \sigma$ .

Sei also  $s = (s_0, s_1, \dots, s_{h-1}) \in \sigma$  mit  $\Phi_0(s) \notin \delta_\varepsilon$ . Folglich gibt es ein  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  und  $a, b \in A_i$ , so dass  $\Phi_0(s_a) \neq \Phi_0(s_b)$  gilt. Somit ist aber auch  $\varphi(s_a) \neq \varphi(s_b)$  und folglich  $q := \varphi(s) \in (\eta_h)(G_\sigma)$ , d.h., es existiert ein  $\alpha \in G_\sigma$  mit  $q = \eta_h^{(\alpha)} = \alpha(\eta_h)$ .

Da  $\Phi_0(s_a) \neq \Phi_0(s_b)$ , gilt  $\varphi_*(\alpha(a)) \neq \varphi_*(\alpha(b))$  und somit

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \{\alpha(a), \alpha(b)\} \not\subseteq A_i.$$

Da  $\alpha : E_h \rightarrow E_h$  bijektiv und  $E_h$  endlich ist, gibt es nach dem Schubfachprinzip somit  $i', i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$  mit  $i_1 \neq i_2$  und

$$\exists a' \in A_{i_1} : \alpha(a') \in A_{i'}$$

sowie

$$\exists b' \in A_{i_2} : \alpha(b') \in A_{i'}.$$

Sei  $c := (c_0, c_1, \dots, c_{h-1})$  mit

$$c_l := \begin{cases} 0 & \text{für } l \in A_{i_1} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt  $c \in \delta_\varepsilon$  und  $c' := c^{(\alpha)} \in \delta_\varepsilon$ , da  $|\omega(c')| = |\omega(c)| < h$ . Jedoch ist dann  $c'_{\alpha(a')} \neq c'_{\alpha(b')}$  mit  $\{\alpha(a'), \alpha(b')\} \subseteq A_{i'}$  ein Widerspruch zu der Definition von

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon = \delta_{\{A_1, \dots, A_n\}} &= \left\{ \left( \begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{h-1} \end{array} \right) \mid (u, v) \in \varepsilon \implies x_u = x_v \right\} \\ &= \left\{ \left( \begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{h-1} \end{array} \right) \mid (\exists l \in \{1, \dots, n\} : \{u, v\} \subseteq A_l) \implies x_u = x_v \right\}. \end{aligned}$$

Also gilt  $\Phi_0 \in pPOL_k \varrho$ . Damit wird  $\bar{\Phi}^m$  wie in Satz 31 definiert.

Angenommen, es gilt  $\bar{\Phi} \notin pPOL_k \varrho$ . Dann existieren Zeilen  $c_1, \dots, c_h$  mit  $c_i := (c_{i1} \dots c_{im})$ ,

$$\bar{\Phi} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_h \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_h \end{pmatrix} =: d \notin \varrho$$

und

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : c^j \in \varrho.$$

Es genügt nun zu zeigen, dass  $\Gamma$  Zeilenblöcke trennt. Also seien die Zeilen  $c_i$  aus verschiedenen Zeilenblöcken, d.h., wenigstens eine Zeile ist nicht konstant und enthält damit für ein  $x \in E_k$  den Abschnitt  $\Gamma(x)$  in den Spalten  $j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, j_0 + n$ . Sei dies die Zeile  $c_{i_0}$ . Dann betrachte nur diese Spalten, d.h., man betrachtet nur die Tupel

$$\begin{pmatrix} c_{0,j_0+1} \\ \vdots \\ c_{h-1,j_0+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{0,j_0+2} \\ \vdots \\ c_{h-1,j_0+2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} c_{0,j_0+n} \\ \vdots \\ c_{h-1,j_0+n} \end{pmatrix}.$$

Seien

$$I_0 := \{i \in E_h \mid c_i, c_{i_0} \text{ aus dem selben Zeilenblock}\}$$

und

$$I_1 := E_h \setminus I_0.$$

Dann gibt es für jedes  $i \in I_0$  ein  $x_i \in E_k$  mit

$$(c_{i,j_0+1} c_{i,j_0+2} \dots c_{i,j_0+n}) = \Gamma(x_i).$$

Falls dagegen  $i \in I_1$  ist, so gilt nach der Konstruktion von  $\bar{\Phi}$  die Beziehung

$$c_{i,j_0+1} = c_{i,j_0+2} = \dots = c_{i,j_0+n}.$$

Sei  $C_i := \Phi_0(c_i)$  und seien  $C^j$  die entsprechenden Spalten.

Angenommen, es existiert ein  $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$  sowie ein  $a \in A_\nu \cap I_0 \neq \emptyset$  und  $b \in A_\nu \cap I_1 \neq \emptyset$ . Dann ist  $C_a^{j'} \neq C_b^{j'}$  für ein  $j' \in \{1, 2, \dots, n\}$ , also  $C^{j'} \notin \delta_\varepsilon$ . Damit ergibt  $c^{j'} \notin \varrho$  einen Widerspruch.

Also sind für ein  $A_\nu$  die zugehörigen Zeilen in einem Zeilenblock. Angenommen, es existieren  $\nu, \nu' \in \{1, 2, \dots, n\}$ , so dass die Zeilen zu  $A_\nu$  und diejenigen zu  $A_{\nu'}$  aus verschiedenen Zeilenblöcken stammen. Dabei seien die Zeilen aus  $A_\nu$  diejenigen, die in den Spalten  $j_0 + 1$  bis  $j_0 + n$  den  $\Gamma$ -Block haben. Die Spalte  $c^{j_0+1}$  ist aus  $\delta_\varepsilon$  und damit gilt  $c_{a',j_0+1} = c_{b',j_0+1}$  für zwei beliebige  $a', b' \in A_{\nu'}$  mit  $a' \neq b'$ . Für  $a, b \in A_\nu$  mit  $a \neq b$  existiert in dem zu dem  $Y_t$  gehörenden Abschnitt eine Spalte  $j_1$  mit  $c_{a,j_1} \neq c_{b,j_1}$ , woraus  $c^{j_1} \in \sigma$  folgt. Jedoch ist  $c_{a',j_1} = c_{b',j_1}$  nach Konstruktion von  $\bar{\Phi}$ , also  $|\omega(c^{j_1})| < h$ . Damit führt  $c^{j_1} \notin \sigma$  zum Widerspruch.

Damit erfüllt  $\Phi_0$  die Bedingungen von Satz 31 und  $pPOL_k \varrho$  ist in jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .  $\square$

**Lemma 36.** Sei

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gehört  $pPOL_4\varrho$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$ .

*Beweis.* Es wird Satz 31 verwendet.

Sei  $\Phi_0(x) := x + 1 \pmod{4}$ , dann ist  $\Phi_0 \in pPOL_4\varrho$  und  $\Gamma$  mit

$$\Gamma(x) = (x + 1 \pmod{4}, x + 2 \pmod{4}, x + 3 \pmod{4}, x)$$

trennt Zeilenblöcke. Dies folgt aus

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \notin \varrho$$

für jedes  $x \in E_4$ .

Also gehört  $pPOL_4\varrho$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$ . □

#### 4.4 Die Relationen $\varrho_1, \varrho_2$ und $\iota_k^3$

**Satz 37.** Für  $k \geq 3$  sei

$$\varrho \in \{\varrho_1, \varrho_2, \iota_k^3\}.$$

Dann gehört  $pPOL_k\varrho$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$ .

*Beweis.* Sei

$$\forall x \in E_k : \Phi_0(x) := x + 1 \pmod{k}.$$

Sei für einen Vektor  $v$

$$\gamma_0(v) := (v \ v \ v \ v \ v \ v),$$

$$\gamma_1(v) := (v \ v \ v \ \Phi_0(v) \ \Phi_0(v) \ \Phi_0(v)),$$

$$\gamma_2(v) := (v \ \Phi_0(v) \ \Phi_0^2(v) \ v \ \Phi_0(v) \ \Phi_0^2(v)).$$

Ist  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  eine Relation, dann sei

$$\gamma_2(V) := (\gamma_2(v_1) \ \gamma_2(v_2) \ \dots \ \gamma_2(v_n)).$$

Sei  $\Phi$  als Blockfunktion folgendermaßen definiert.

|                                                                           | $t$ | $X_t$                  | $Y_t$                   | $Z_t$                  | $\Phi(X_t, Y_t, Z_t)$                            |
|---------------------------------------------------------------------------|-----|------------------------|-------------------------|------------------------|--------------------------------------------------|
| $\forall 1 \leq \mu \leq k \ \forall v \in E_k^\mu \setminus \iota_k^\mu$ | 1   | $\gamma_1(v)$          | $\gamma_2(v)$           | $\gamma_0(v)$          | $E_k^\mu$                                        |
| $\forall 4 \leq \mu \leq k$                                               | 2   | $\gamma_1(\mathbf{0})$ | $\gamma_2(\iota_k^\mu)$ | $\gamma_0(\mathbf{0})$ | $E_k^\mu$                                        |
| $\varrho = \iota_k^3$                                                     | 3   | $\gamma_1(\mathbf{0})$ | $\gamma_2(\varrho_2)$   | $\gamma_0(\mathbf{0})$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| $\varrho = \varrho_1$                                                     | 4   | $\gamma_1(\mathbf{0})$ | $\gamma_2(\varrho_2)$   | $\gamma_0(\mathbf{0})$ | $\varrho_1$                                      |
| $\varrho = \varrho_2$                                                     | 5   | $\gamma_1(\mathbf{0})$ | $\gamma_2(\varrho_1)$   | $\gamma_0(\mathbf{0})$ | $E_k^4$                                          |
| $\varrho \in \{\varrho_1, \varrho_2\}$                                    | 6   | $\gamma_1(\mathbf{0})$ | $\gamma_2(\iota_k^3)$   | $\gamma_0(\mathbf{0})$ | $E_k^3$                                          |

Zunächst zeigen wir

$$\forall \chi \neq \varrho, \chi \text{ kohärent} : \bar{\Phi} \notin pPOL_4\chi. \quad (4.11)$$

*Beweis.* Angenommen, (4.11) gilt nicht. Dann existiert eine kohärente Relation  $\chi^{(\mu)} \neq \varrho$  mit

$$\bar{\Phi} \in pPOL_k\chi. \quad (4.12)$$

Da  $\chi$  nicht-trivial ist, gilt

$$\chi \subset E_k^\mu. \quad (4.13)$$

- Falls ein  $v \in \chi \setminus \iota_k^\mu$  existiert, dann folgt  $E_k^\mu \subseteq \chi$  mit  $t = 1$ , im Widerspruch zu (4.13).
- Falls  $\mu \geq 4$  und  $\chi = \iota_k^\mu$  ist, folgt  $E_k^\mu \subseteq \chi$  mit  $t = 2$ , im Widerspruch zu (4.13).
- Damit sind nur noch die Relationen aus  $\{\iota_k^3, \varrho_1, \varrho_2\} \setminus \{\varrho\}$  übrig.
  - Für  $\varrho = \iota_k^3$  folgt  $(0, 0, 0, 1)^T \in \chi$  für  $\chi \in \{\varrho_1, \varrho_2\}$  mit  $t = 3$ , da  $\varrho_2 \subset \varrho_1$ . Da aber  $(0, 0, 0, 1)^T \notin \varrho_i$  für  $i = 1, 2$  gilt, ist dies ein Widerspruch zu (4.12).
  - Sei  $\varrho = \varrho_1$ . Für  $\chi = \varrho_2$  folgt  $\varrho_1 \subseteq \varrho_2$  mit  $t = 4$ . Aber es gilt  $\varrho_2 \subset \varrho_1$ , im Widerspruch zu (4.12). Für  $\chi = \iota_k^3$  folgt  $E_k^3 \subseteq \chi$  mit  $t = 6$ , im Widerspruch zu (4.13).
  - Sei  $\varrho = \varrho_2$ . Für  $\chi = \varrho_1$  folgt  $E_k^4 \subseteq \varrho_1$  mit  $t = 5$ , im Widerspruch zu (4.13). Für  $\chi = \iota_k^3$  folgt  $E_k^3 \subseteq \chi$  mit  $t = 6$ , im Widerspruch zu (4.13).

Damit ist (4.11) gezeigt. ■

Nun wird  $\bar{\Phi}^m \in pPOL_k\varrho$  bewiesen. Angenommen, dies gilt nicht. Dann gibt es Zeilen  $c_1, c_2, \dots, c_h$  mit  $c_i := (c_{i1}, \dots, c_{im})$ ,

$$\bar{\Phi} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_h \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_h \end{pmatrix} =: d \notin \varrho \quad (4.14)$$

und

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : c^j \in \varrho. \quad (4.15)$$

Aus der Definition von  $\varrho_1, \varrho_2$  und  $\iota_k^3$  folgt

$$\forall v \in \varrho : |\omega(v)| \leq 2. \quad (4.16)$$

Sind zwei Zeilen gleich, so gilt  $d \in \varrho$  nach Lemma 9, im Widerspruch zu (4.14).

Angenommen, drei dieser Zeilen kommen aus drei verschiedenen Zeilenblöcken. O.B.d.A. seien dies die Zeilen  $c_1, c_2, c_3$ . Dann gibt es einen Unterblock von

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

der Form

$$\begin{pmatrix} \gamma_0(x) \\ \gamma_2(y) \\ \gamma_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ y & y+1 & y+2 & y & y+1 & y+2 \\ z & z & z & z+1 & z+1 & z+1 \end{pmatrix}$$

für  $x, y, z \in E_k$  und  $+$  bezüglich  $\text{mod } k$ . Es wird gezeigt, dass eine dieser Spalten drei verschiedene Elemente besitzt. Dafür werden für  $\{x, y, z\}$  die folgenden Fälle unterschieden.

- Für  $x = y = z$  ist  $|\{x, y+2, z+1\}| = 3$ .
- Für  $x = y$  und  $x \neq z$  gilt  $|\{x, y+1, z\}| = 3$  oder  $|\{x, y+2, z\}| = 3$ .
- Für  $x \neq y$  und  $x = z$  gilt  $|\{x, y, z+1\}| = 3$  oder  $|\{x, y+1, z+1\}| = 3$  oder  $|\{x, y+2, z+1\}| = 3$ .
- Für  $x \neq y$  und  $y = z$  gilt  $|\{x, y+1, z\}| = 3$  oder  $|\{x, y+2, z\}| = 3$ .
- Sonst gilt  $|\{x, y, z\}| = 3$ .

Damit gibt es also ein  $j_0$  mit  $|\omega(c^{j_0})| \geq 3$ , im Widerspruch zu (4.16).

Seien nun die drei Zeilen aus genau zwei verschiedenen Zeilenblöcken. Dann gibt es einen Unterblock von

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

mit einer der Formen

$$\begin{pmatrix} x & x & x \\ y & y & y \\ z & z+1 & z+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z & z & z \\ x & x+1 & x+2 \\ y & y+1 & y+2 \end{pmatrix}$$

für  $x, y, z \in E_k$ ,  $x \neq y$  und  $+$  bezüglich  $\text{mod } k$ . Dann gilt aber für eine dieser Spalten  $|\omega(c^j)| \geq 3$ , im Widerspruch zu (4.16).

Also müssen die Zeilen  $c_i$  aus genau einem Zeilenblock kommen.

- Für  $t = 0$  gilt dann  $|\omega(c^j)| \geq 3$  für jedes  $j$ , im Widerspruch zu (4.16).
- Für  $t = 1$  gibt es entweder maximal zwei verschiedene Zeilen ( $\mu \leq 2$ ), oder eine Spalte  $c^j = v \in E_k^t \setminus \iota_k^t$ , also  $|\omega(c^j)| \geq 3$  für ein  $j$ , im Widerspruch zu (4.16).
- Für  $t = 2$  gibt es nach Definition von  $\iota_k^\mu$  für  $\mu \geq 4$  zu je drei verschiedenen Zeilen ein Spalte  $v$  mit  $|\omega(v)| = 3$ . Also gibt es eine Spalte  $c^j$  mit  $|\omega(c^j)| \geq 3$ , im Widerspruch zu (4.16).
- Der Fall  $t = 3$  tritt nur für  $\varrho = \iota_k^3$  ein. Dann ist aber  $\omega(d) \subseteq \{0, 1\}$ , also  $|\omega(d)| \leq 2$ . Damit ist  $d \in \iota_k^3$ , im Widerspruch zu (4.14).
- Der Fall  $t = 4$  tritt nur für  $\varrho = \varrho_1$  auf. Da  $G_{\varrho_1} = S_4$ , gilt  $d \in \varrho_1$  für jede Wahl der vier Zeilen.

- Der Fall  $t = 5$  tritt nur für  $\varrho = \varrho_2$  auf. Da  $|\varrho_1| > |\varrho_2|$ , gibt es ein Spalte  $c^j \notin \varrho_2$ , im Widerspruch zu (4.15).
- Im Fall  $t = 6$  stehen nur drei Zeilen zur Verfügung, jedoch ist  $h = 4$ . Also sind zwei Zeilen gleich, womit sich ein Widerspruch ergibt.

Damit ist gezeigt, dass  $\bar{\Phi} \in pPOL_{k\varrho}$  gilt. Somit gehört  $pPOL_{k\varrho}$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$  für  $\varrho \in \{\iota_k^3, \varrho_1, \varrho_2\}$ .  $\square$

## 4.5 Weitere benötigte Relationen für $k = 4$

**Lemma 38.** *Sei die total-symmetrische total-reflexive Relation*

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cup \iota_4^3$$

gegeben. Dann gehört  $pPOL_{4\varrho}$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$ .

*Beweis.* Sei

$$s_0 := (0, 1, 2)^T, s_1 := (0, 2, 3)^T.$$

Sei

$$\Gamma(\eta_4) := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Seien

$$\begin{aligned} \theta(\varrho_2) &:= (\Gamma((0, 0, 1, 1)^T) \Gamma((0, 1, 1, 0)^T)), \\ \theta(\iota_4^4) &:= (\Gamma((0, 2, 3, 3)^T) \Gamma((0, 2, 2, 3)^T) \Gamma((0, 0, 2, 3)^T)) \end{aligned}$$

und

$$\theta(\iota_4^3) := (\Gamma((0, 0, 1)^T) \Gamma((0, 1, 1)^T)).$$

Sei

$$\begin{aligned} \gamma_0(v) &:= (v \ v \ v \ v \ v \ v), \\ \gamma_1(v) &:= (\Phi_0(v) \ \Phi_0(v) \ \Phi_0(v) \ \Phi_0^2(v) \ \Phi_0^2(v) \ \Phi_0^2(v)), \\ \gamma_2(v) &:= (\Phi_0(v) \ \Phi_0^2(v) \ \Phi_0^3(v) \ \Phi_0(v) \ \Phi_0^2(v) \ \Phi_0^3(v)). \end{aligned}$$

Setze

$$\Phi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und definiere  $\Phi$  als Blockfunktion folgendermaßen.

|                                                               | $t$ | $X_t$                  | $Y_t$              |                        |                     |                        | $Z_t$ | $\Phi(X_t, Y_t, Z_t)$ |           |                    |   |
|---------------------------------------------------------------|-----|------------------------|--------------------|------------------------|---------------------|------------------------|-------|-----------------------|-----------|--------------------|---|
|                                                               | 1   | $\gamma_1(\eta_4)$     | $\gamma_2(\eta_4)$ | 0                      | 0                   | 0                      | 2     | 3                     | 0         | $\gamma_0(\eta_4)$ | 2 |
|                                                               |     |                        |                    | 1                      | 1                   | 1                      | 2     | 3                     | 0         |                    | 3 |
|                                                               |     |                        |                    | 2                      | 2                   | 2                      | 3     | 0                     | 2         |                    | 3 |
|                                                               |     |                        |                    | 3                      | 3                   | 3                      | 0     | 2                     | 3         |                    | 0 |
| $\forall \mu < 3 \forall v \in E_4^\mu \setminus \iota_4^\mu$ | 2   | $\gamma_1(v)$          | $\gamma_2(v)$      | $\gamma_0(v)$          | $\Gamma(v)$         | $\gamma_0(v)$          |       |                       | $E_4^\mu$ |                    |   |
|                                                               | 3   | $\gamma_1(s_0)$        | $\gamma_2(s_0)$    | $\gamma_0(s_0)$        | $\Gamma(s_0)$       | $\gamma_0(s_0)$        |       |                       | $\varrho$ |                    |   |
|                                                               | 4   | $\gamma_1(s_1)$        | $\gamma_2(s_1)$    | $\gamma_0(s_1)$        | $\Gamma(s_1)$       | $\gamma_0(s_1)$        |       |                       | $E_4^3$   |                    |   |
|                                                               | 5   | $\gamma_1(\mathbf{0})$ |                    | $\gamma_2(\mathbf{0})$ | $\theta(\iota_4^3)$ | $\gamma_0(\mathbf{0})$ |       |                       | $\varrho$ |                    |   |
|                                                               | 6   | $\gamma_1(\mathbf{0})$ |                    | $\gamma_2(\mathbf{0})$ | $\theta(\iota_4^4)$ | $\gamma_0(\mathbf{0})$ |       |                       | $E_4^4$   |                    |   |
|                                                               | 7   | $\gamma_1(\mathbf{0})$ |                    |                        |                     |                        |       |                       |           | 0                  |   |
|                                                               |     |                        |                    |                        |                     |                        |       |                       |           | 0                  |   |
|                                                               |     |                        |                    |                        |                     |                        |       |                       |           | 1                  |   |
|                                                               |     |                        |                    |                        |                     |                        |       |                       |           | 2                  |   |

Zunächst beweisen wir

$$\forall \chi \neq \varrho, \chi \text{ kohärent} : \bar{\Phi} \notin pPOL_4\chi. \quad (4.17)$$

*Beweis.* Angenommen, (4.17) gilt nicht. Dann existiert eine kohärente Relation  $\chi^{(\mu)} \neq \varrho$  mit

$$\bar{\Phi} \in pPOL_4\chi. \quad (4.18)$$

Da  $\chi$  nicht-trivial ist, gilt

$$\chi \subset E_4^\mu. \quad (4.19)$$

Für jedes  $v \in \chi$  folgt aus  $t = 0$  und  $t = 1$ , dass auch

$$\Gamma(v) \subseteq \chi \text{ und } \forall i \in \{0, 1, 2\} : \gamma_i(v) \subseteq \chi$$

gelten.

- Für  $\mu = 1, 2$  folgt  $E_4^\mu \subseteq \chi$  aus  $t = 2$ , im Widerspruch zu (4.19).
- Sei  $\mu = 3$ . Für  $\chi = \iota_4^3$  folgt  $\varrho \subseteq \chi$  aus  $t = 5$ , im Widerspruch zu  $\iota_4^3 \subset \varrho$ . Andernfalls gilt o.B.d.A.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cap \chi \neq \emptyset.$$

Für  $(0, 1, 2)^T \in \chi$  folgt  $\varrho \subset \chi$  aus  $t = 3$ . Somit gilt auch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cap \chi \neq \emptyset$$

und aus  $t = 0$  und  $t = 1$  folgt somit

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \chi.$$

Dann folgt aber aus  $t = 4$  weiter  $E_4^3 \subseteq \chi$ , im Widerspruch zu (4.19).

- Sei  $\mu = 4$ . Für  $\chi \setminus \iota_4^4 \neq \emptyset$  gilt o.B.d.A.  $(0, 1, 2, 3)^T \in \chi$ . Dann folgt  $\delta_{\{0,1\}}^4 \subseteq \chi$  aus  $t = 0$  sowie  $\delta_{\{1,2\}}^4 \subseteq \chi$  aus  $t = 1$  und damit  $\iota_4^4 \subseteq \chi$ .  
Für  $\iota_4^4 \subseteq \chi$  folgt  $E_4^4 \subseteq \chi$  aus  $t = 6$ , im Widerspruch zu (4.19).  
Für  $\chi \in \{\varrho_1, \varrho_2\}$  folgt  $(0, 0, 1, 2)^T \in \chi$ , im Widerspruch zur Definition von  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ .

Damit ist (4.17) gezeigt. ■

Nun wird  $\bar{\Phi}^m \in pPOL_4\varrho$  gezeigt. Angenommen, dies gilt nicht. Dann gibt es Zeilen  $c_1, c_2, c_3$  mit  $c_i := (c_{i1} \dots c_{im})$ ,

$$\bar{\Phi} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \notin \varrho \quad (4.20)$$

und

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ c_{3j} \end{pmatrix} \in \varrho. \quad (4.21)$$

Sind zwei Zeilen gleich, so gilt  $d \in \varrho$  nach Lemma 9, im Widerspruch zu (4.20).

Angenommen, diese drei Zeilen sind aus verschiedenen Blöcken, dann gibt es  $x, y, z \in E_4$  und ein  $j$  mit

$$(c^{j+1} \ c^{j+2} \ c^{j+3} \ c^{j+4} \ c^{j+5} \ c^{j+6}) = \begin{pmatrix} \gamma_0(x) \\ \gamma_1(y) \\ \gamma_2(z) \end{pmatrix}.$$

Da  $\Phi_0 \in pPOL_4\varrho$  ist, gilt auch

$$\forall l \in \{1, 2, \dots, 6\} : C^l := \Phi_0(c^{j+l}) \in \varrho$$

und damit existieren  $x', y', z' \in \{0, 2, 3\}$  mit

$$\begin{aligned} (C^1 \ \dots \ C^6) &= \begin{pmatrix} \gamma_0(x') \\ \gamma_1(y') \\ \gamma_2(z') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' & x' & x' & x' & x' & x' \\ \Phi_0(y') & \Phi_0(y') & \Phi_0(y') & \Phi_0^2(y') & \Phi_0^2(y') & \Phi_0^2(y') \\ \Phi_0(z') & \Phi_0^2(z') & \Phi_0^3(z') & \Phi_0(z') & \Phi_0^2(z') & \Phi_0^3(z') \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In den beiden sich ergebenden Fällen wird  $\{\Phi_0(z'), \Phi_0^2(z'), \Phi_0^3(z')\} = \{0, 2, 3\}$  benutzt.

- Aus  $x' = \Phi_0(y')$  folgt  $x' \neq \Phi_0^2(y')$  und damit existiert ein  $j \in \{4, 5, 6\}$  mit  $\omega(C^j) = \{0, 2, 3\}$ , im Widerspruch zu (4.21).
- Wegen  $x' \neq \Phi_0(y')$  existiert ein  $j \in \{1, 2, 3\}$  mit  $\omega(C^j) = \{0, 2, 3\}$ , im Widerspruch zu (4.21).

Also können die Zeilen aus höchstens zwei verschiedenen Blöcken kommen.

Angenommen, die ersten beiden Zeilen seien aus einem Block  $T$  und die dritte Zeile aus einem anderen Block  $T'$ . Dann kann man folgende Fälle unterscheiden:

- $T \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ . Bei den Blöcken mit  $t \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$  existiert jeweils mindestens ein Block  $\Gamma$ , so dass zwei verschiedene Zeilen sich in dem Block  $\Gamma$  unterscheiden. Damit existieren Spalten  $c^{l+1}, c^{l+2}, c^{l+3}$  mit

$$\begin{pmatrix} c_{1,l+1} & c_{1,l+2} & c_{1,l+3} \\ c_{2,l+1} & c_{2,l+2} & c_{2,l+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_0(x) & \Phi_0^2(x) & \Phi_0^3(x) \\ \Phi_0(y) & \Phi_0^2(y) & \Phi_0^3(y) \end{pmatrix}$$

und  $\Phi_0(x) \neq \Phi_0(y)$  sowie  $c_{3,l+1} = c_{3,l+2} = c_{3,l+3} = z$ . Bilde wieder  $C^j := \Phi_0(c^{l+j}) \in \varrho$  für  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Dann gilt

$$\begin{pmatrix} C^1 & C^2 & C^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_0(x') & \Phi_0^2(x') & \Phi_0^3(x') \\ \Phi_0(y') & \Phi_0^2(y') & \Phi_0^3(y') \\ z' & z' & z' \end{pmatrix}$$

mit  $x', y', z' \in \{0, 2, 3\}$  und  $x' \neq y'$ . Dann folgt für ein  $j \in \{1, 2, 3\}$  aber  $\omega(C^j) = \{0, 2, 3\}$ , im Widerspruch zu  $C^j \in \varrho$ .

- $T \in \{0, 1\}$  und  $T' \notin \{0, 1\}$  beziehungsweise  $T = 0$  und  $T' = 1$ . Dann gibt es Spalten  $c^{l+1}, c^{l+2}, c^{l+3}$  mit

$$\begin{pmatrix} c^{l+1} & c^{l+2} & c^{l+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x & x \\ y & y & y \\ \Phi_0(z) & \Phi_0^2(z) & \Phi_0^3(z) \end{pmatrix}$$

und  $x \neq y$ . Dann existiert ein  $j \in \{1, 2, 3\}$  mit  $|\omega(c^{l+j})| = 3$ . Falls  $\omega(c^{l+j}) \neq \{0, 1, 2\}$ , dann ist  $c^{l+j} \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.21). Andernfalls ist o.B.d.A.  $y = 1$ . Es existiert ein  $j' \in \{1, 2, 3\}$  mit  $c_{3,l+j'} = 3$ , also  $\omega(c^{l+j'}) \in \{\{0, 1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ , im Widerspruch zu (4.21).

- $(T, T') = (1, 0)$ . Wiederum führen wir eine Fallunterscheidung durch.
  - Falls  $c_1, c_2$  die ersten beiden Zeilen aus  $t = 1$  sind und  $c_3$  eine der ersten drei Zeilen aus  $t = 0$  ist, dann ist  $\{d_1, d_2, d_3\} \subseteq \{2, 3\}$ , also  $(d_1, d_2, d_3)^T \in \varrho$ , im Widerspruch zu (4.20).
  - Falls  $c_1, c_2$  die ersten beiden Zeilen aus  $t = 1$  sind und  $c_3$  die vierte Zeile aus  $t = 0$  ist, dann ist  $\omega(c^j) = \{0, 1, 3\}$  für ein  $j$ , also  $c^j \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.21).
  - Wenigstens eine der Zeilen  $c_1, c_2$  ist nicht eine der ersten beiden Zeilen aus  $t = 1$ . Dann existieren Spalten  $c^{l+1}, c^{l+2}, c^{l+3}$  mit

$$\begin{pmatrix} c_{1,l+1} & c_{1,l+2} & c_{1,l+3} \\ c_{2,l+1} & c_{2,l+2} & c_{2,l+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_0(x) & \Phi_0^2(x) & \Phi_0^3(x) \\ \Phi_0(y) & \Phi_0^2(y) & \Phi_0^3(y) \end{pmatrix}$$

und  $\Phi_0(x) \neq \Phi_0(y)$  sowie  $c_{3,l+1} = c_{3,l+2} = c_{3,l+3} = z$ . Dies ist wie im Fall  $T \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$  und führt somit auch zum Widerspruch.

Damit müssen die Zeilen  $c_1, c_2, c_3$  aus genau einem Block stammen.

- $t = 0$ . Da  $\bar{\Phi} \in pPOL_4 \varrho$ , gilt  $d \in \varrho$ , im Widerspruch zu (4.20).
- $t = 1$ . Aus dem Block  $Y_1$  ist ersichtlich, dass nur die ersten drei Zeilen aus diesem Block in Frage kommen, womit aber  $\{d_1, d_2, d_3\} \subseteq \{2, 3\}$  gilt. Also  $d \in \varrho$ , im Widerspruch zu (4.20).
- $t = 2$ . Es existieren maximal zwei verschiedene Zeilen, Widerspruch.
- $t \in \{3, 5\}$ . Es ergibt sich ein Widerspruch aus  $d \in \varrho$  zu (4.20).
- $t \in \{4, 6\}$ . Es existiert ein  $j$  mit  $\omega(c^j) = \omega(s_1) = \{0, 2, 3\}$ , im Widerspruch zu (4.21).
- $t = 7$ . Es gilt  $\{d_1, d_2, d_3\} \subseteq \{0, 1, 2\}$ , im Widerspruch zu (4.20).

Damit ist gezeigt, dass  $\bar{\Phi} \in pPOL_4 \varrho$  gilt. Somit gehört  $pPOL_4 \varrho$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$ .  $\square$

**Lemma 39.** Sei  $\varrho = \sigma \cup \delta_{\{0,1\}}^3$  mit

$$\sigma \in \left\{ \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{array} \right), \right. \\ \left. \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \right\}.$$

Dann gehört  $pPOL_4 \varrho$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$ .

*Beweis.* Sei

$$\sigma^R := \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \in E_4^2 \setminus \iota_4^2 \mid \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ 3 \end{array} \right) \in \sigma \right\}$$

$$\sigma^L := \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \in E_4^2 \setminus \iota_4^2 \mid \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ 2 \end{array} \right) \in \sigma \right\}$$

$$\sigma^C := \{v \in E_4^2 \setminus \iota_4^2 \mid \forall w \in \sigma^R \cup \sigma^L : \omega(v) \neq \omega(w)\}$$

und  $s^L \in \sigma^L$  sowie  $s^R \in \sigma^R$  beliebig.

Sei  $\Phi_0 : E_4 \rightarrow E_4$  gegeben durch

$$\Phi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und  $\Gamma$  durch

$$\Gamma(v) := (\Phi_0(v) \Phi_0^2(v)).$$

Damit wird die Blockfunktion  $\Phi$  folgendermaßen definiert.

|                                                                | $t$ | $X_t$            | $Y_t$                                       | $Z_t$            | $\Phi(X_t, Y_t, Z_t)$                                                   |
|----------------------------------------------------------------|-----|------------------|---------------------------------------------|------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $\forall v \in E_4$                                            | 1   | $v$              | $v \quad \Gamma(v)$                         | $v$              | $E_4$                                                                   |
| $\forall v \in \sigma^L$                                       | 2   | $v$              | $v \quad \Gamma(v)$                         | $v$              | $\sigma^R$                                                              |
| $\forall v \in \sigma^R$                                       | 3   | $v$              | $v \quad \Gamma(v)$                         | $v$              | $\sigma^L$                                                              |
| $\forall v \in \sigma^C$                                       | 4   | $v$              | $v \quad \Gamma(v)$                         | $v$              | $E_4^2$                                                                 |
|                                                                | 5   | $s^L$            | $\sigma^L \quad \sigma^R \quad \Gamma(s^L)$ | $s^L$            | $E_4^2$                                                                 |
| $\forall v \in E_4^3 \setminus (\varrho \cup \iota_4^3)$       | 7   | $v$              | $v \quad \varrho \quad \Gamma(v)$           | $v$              | $E_4^3$                                                                 |
|                                                                | 8   | 0<br>1<br>2<br>3 | 0 3 2<br>1 3 2<br>2 3 2<br>3 2 3            | 0<br>1<br>2<br>3 | 0<br>0<br>1<br>2                                                        |
|                                                                | 9   | 0<br>1<br>2<br>3 | 0<br>1<br>2<br>3                            | 0<br>1<br>2<br>3 | $\sigma^R \times \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ |
| $\forall \chi^{(\mu)} \in \{\iota_4^3, \iota_4^4, \varrho_2\}$ | 10  | $\mathbf{0}$     | $\chi$                                      | $\mathbf{0}$     | $E_4^\mu$                                                               |

Zunächst beweisen wir

$$\forall \chi \neq \varrho, \chi \text{ kohärent} : \bar{\Phi} \notin pPOL_4\chi. \quad (4.22)$$

*Beweis.* Angenommen, (4.22) gilt nicht. Dann existiert eine kohärente Relation  $\chi^{(\mu)} \neq \varrho$  mit

$$\bar{\Phi} \in pPOL_4\chi. \quad (4.23)$$

Da  $\chi$  nicht-trivial ist, gilt

$$\chi \subset E_4^\mu. \quad (4.24)$$

- Für  $\mu = 1$  folgt  $E_4 \subseteq \chi$  mit  $t = 1$  für ein  $v \in \chi$ , im Widerspruch zu (4.24).
- Für  $\mu = 2$  existiert ein  $v \in \chi$  mit  $v \in \sigma^R \cup \sigma^L \cup \sigma^C$ , da die Zeilen von  $\chi$  o.B.d.A. entsprechend permutiert sind.
  - Falls  $v \in \sigma^R$ , dann folgt mit  $t = 3$  auch  $\sigma^L \subseteq \chi$ . Dann folgt mit  $t = 2$  weiter  $\sigma^R \subseteq \chi$  und somit  $E_4^2 \subseteq \chi$  mit  $t = 5$ , im Widerspruch zu (4.24).
  - Falls  $v \in \sigma^L$ , dann folgt mit  $t = 2$  auch  $\sigma^R \subseteq \chi$ . Dann folgt mit  $t = 3$  weiter  $\sigma^L \subseteq \chi$  und somit  $E_4^2 \subseteq \chi$  mit  $t = 5$ , im Widerspruch zu (4.24).
  - Falls  $v \in \sigma^C$  gilt, dann folgt  $E_4^2 \subseteq \chi$  mit  $t = 4$ , im Widerspruch zu (4.24).
- Sei  $\mu = 3$ . Falls  $\chi = \iota_4^3$  gilt, folgt  $E_4^3 \subseteq \chi$  mit  $t = 10$ , im Widerspruch zu (4.24). Daher kann o.B.d.A.

$$\chi' := \chi \cap \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \neq \emptyset$$

angenommen werden. Sei  $v' \in \chi'$  beliebig. Gilt  $v' = (0, 1, 2)^T$ , so folgt  $\delta_{\{0,1\}}^3 \subseteq \chi$  mit  $t = 8$ , andernfalls folgt dies mit  $t = 0$ . Aus  $t = 8$  folgt  $(0, 1, 2)^T \in \chi$  für  $v' \in \{(0, 2, 3)^T, (1, 2, 3)^T\}$ . Daher kann man  $v' \in \{(0, 1, 2)^T, (0, 1, 3)^T\}$  annehmen. Dann folgt  $\sigma^R \times \{3\} \subseteq \chi$  mit  $t = 9$ . Damit folgt mit  $t = 0$  und  $t = 3$  durch

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} s^R & s^R & \Gamma(s^R) & s^R \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{c} \sigma^L \\ 2 \end{array} \right),$$

dass auch  $\sigma^L \times \{2\} \subseteq \chi$  gilt. Da

$$\varrho = (\sigma^L \times \{2\}) \cup (\sigma^R \times \{3\}) \cup \delta_{\{0,1\}}^3$$

gilt, ist somit  $\varrho \subset \chi$ . Falls ein  $v \in (\chi \setminus \delta_{\{0,1\}}^3) \cap \iota_4^3$  existiert, so muss  $\iota_4^3 \subseteq \chi$  gelten. Das heißt wiederum, mit  $t = 10$  folgt  $E_4^3 \subseteq \chi$ , im Widerspruch zu (4.24). Ansonsten existiert ein  $v \in \chi \setminus (\varrho \cup \iota_4^3)$  und mit  $t = 7$  folgt der Widerspruch zu (4.24).

- Sei  $\mu = 4$ . Falls  $\chi \in \{\iota_4^4, \varrho_1, \varrho_2\}$  gilt, folgt  $E_4^4 \subseteq \chi$  mit  $t = 10$ , im Widerspruch zu (4.24). Daher kann o.B.d.A.  $(0, 1, 2, 3)^T \in \chi$  angenommen werden. Dann folgt  $\delta_{\{0,1,2\}}^4 \subseteq \chi$  mit  $t = 0$ . Damit liefert  $t = 8$  weiter  $\delta_{\{0,1\}}^4 \subseteq \chi$  und dann folgt  $\delta_{\{2,3\}}^4 \subseteq \chi$ . Da aber  $\delta_{\{0,1\}}^4 \not\subseteq \delta_{\{2,3\}}^4$  und  $\delta_{\{2,3\}}^4 \not\subseteq \delta_{\{0,1\}}^4$  gilt, muss  $\iota_4^4 \subseteq \chi$  gelten. Das liefert aber mit  $t = 10$  einen Widerspruch zu (4.24).

Also gilt (4.22). ■

Nun zeigen wir

$$\bar{\Phi} \in pPOL_4\varrho. \quad (4.25)$$

Angenommen,  $\bar{\Phi}^m \notin pPOL_4\varrho$ . Dann existieren Zeilen  $c_1, c_2, c_3$  mit

$$\bar{\Phi} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} =: d \notin \varrho \quad (4.26)$$

und

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : c^j \in \varrho. \quad (4.27)$$

Sind zwei Zeilen gleich, so gilt  $d \in \varrho$  nach Lemma 9, im Widerspruch zu (4.26).

Angenommen,  $c_1$  und  $c_2$  kommen aus verschiedenen Zeilenblöcken. Dann existieren zwei Spalten  $c^{j'}$  und  $c^{j'+1}$  mit

$$\begin{pmatrix} c_{1,j'} & c_{1,j'+1} \\ c_{2,j'} & c_{2,j'+1} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ \Gamma(y) & \Gamma(y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma(y) & \\ x & x \end{pmatrix} \right\}.$$

O.B.d.A. gilt  $c_{1,j'} = c_{1,j'+1} = x$ ,  $c_{2,j'} = 3$  und  $c_{2,j'+1} = 2$ . Da in  $\sigma$  die 3 nicht in den ersten beiden Zeilen vorkommt, muss  $c^{j'} \in \delta_{\{0,1\}}^3$  gelten, also  $x = 3$ . Dann ist aber

$$c^{j'+1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ z \end{pmatrix} \notin \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.27). Also sind die ersten beiden Zeilen aus demselben Zeilenblock.

Angenommen,  $c_1, c_2, c_3$  sind aus demselben Zeilenblock.

- $t = 0$ . Da

$$\forall v' \in \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} : \Phi_0(v') = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gilt, folgt auch

$$c^1 \in \sigma : d = \Phi_0(c^1) \in \delta_{\{0,1\}}^3 \subset \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.26).

- $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Da jeweils maximal zwei verschiedene Zeilen existieren, gilt

$$(\forall j \in \{1, \dots, m\} : c^j \in \varrho) \implies d \in \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.26).

- $t = 7$ . Es gibt genau drei verschiedene Zeilen, jedoch existieren Spalten

$$(c^{j'} \dots c^{j'+|\varrho|}) = (v \varrho)^{(\alpha)}$$

für ein  $v \notin \varrho$  und eine Permutation  $\alpha$ . Dann sind aber diese Spalten alle voneinander verschieden, d.h., für ein  $j''$  gilt  $c^{j''} \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.27).

- Falls  $t = 8$  ist, betrachte eine Spalte  $c^j \in \sigma$ . Es gelten

$$c^j \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \implies d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \varrho,$$

$$c^j \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \implies d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \varrho,$$

$$c^j \in \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \wedge c^j \in \varrho \implies d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \varrho.$$

Daraus ergibt sich in allen Fällen ein Widerspruch zu (4.26).

- Falls  $t = 9$  ist, betrachte eine Spalte  $c^j \in \sigma$ . Es gilt

$$c^j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies d \in \sigma^R \times \{3\} \subset \varrho,$$

$$c^j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \sigma \implies d \in (\sigma^R \times \{3\})^{(0\ 1)} \subset \varrho.$$

Falls

$$c^j \in \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt, dann existiert wegen des Blockes  $\delta_{\{0,1\}}^3$  ein  $j'$  mit

$$c^{j'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.27).

- $t = 10$ . Es existiert eine Spalte  $c^{j'} = (x, y, y)^T$  mit  $x \neq y$ . Also gilt  $c^{j'} \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.27).

Damit ist gezeigt, dass  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  nicht aus demselben Zeilenblock kommen können. Der einzige Fall, der übrig bleibt, ist, dass  $c_1$  und  $c_2$  aus demselben Zeilenblock kommen und  $c_3$  aus einem anderen. Sei  $T$  der Zeilenblock, aus dem  $c_1$  und  $c_2$  kommen. Sei  $T'$  der Zeilenblock, aus dem  $c_3$  stammt.

Falls  $T' \neq 0$ , existieren Spalten  $c^j$  und  $c^{j'}$  mit

$$(c^j \ c^{j'}) = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \notin \varrho,$$

da  $x \neq y$  gilt, im Widerspruch zu (4.27).

Damit muss also  $T \neq 0$  und  $T' = 0$  gelten.

- Da bei  $T = 1$  nur eine Zeile für  $c_1$  und  $c_2$  zur Verfügung steht, ergibt sich ein Widerspruch.

- $T = 2$ . Da

$$\forall x \in \{0, 1, 3\} : (\sigma^L \times \{x\}) \cap \varrho = \emptyset$$

gilt, muss  $c_3 = (2 \dots 2)$  sein. Damit gilt dann aber

$$d \in \sigma^R \times \{3\} \subseteq \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.26).

- $T = 3$ . Da

$$\forall x \in \{0, 1, 2\} : (\sigma^R \times \{x\}) \cap \varrho = \emptyset$$

gilt, muss  $c_3 = (3 \dots 3)$  sein. Damit gilt dann aber

$$d \in \sigma^L \times \{2\} \subseteq \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.26).

- $T = 4$ . Wegen  $(2, 3) \in \sigma^C$  gibt es eine Spalte  $c^j$  mit

$$c^j \in \{(2, 3)\} \times E_4.$$

Da

$$(\{(2, 3)\} \times E_4) \cap \varrho = \emptyset,$$

gilt  $c^j \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.27).

- $T \in \{5, 7, 10\}$ . Wählt man zwei verschiedene Zeilen  $c_1$  und  $c_2$  aus, so existieren Spalten  $c^{j_1}, \dots, c^{j_b}$  mit

$$\begin{pmatrix} c_{1,j_1} & \cdots & c_{1,j_b} \\ c_{2,j_1} & \cdots & c_{2,j_b} \end{pmatrix} = (\sigma^L \ \sigma^R).$$

Da aber  $c_3$  konstant ist und

$$\forall x \in E_4 : (\sigma^L \cup \sigma^R) \times \{x\} \not\subseteq \varrho$$

gilt, gibt es ein  $j$  mit  $c^j \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.27).

- $T = 8$ .
  - Falls eine der Zeilen die letzte aus dem Block  $t = 8$  ist, dann existiert eine Spalte  $c^j = (2, 3, z)^T \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.27).
  - Falls  $c_1$  und  $c_2$  die ersten beiden Zeilen aus  $t = 8$  sind, so ist  $d = (0, 0, z)^T \in \varrho$ , im Widerspruch zu (4.26).
  - In allen anderen Fällen existiert eine Spalte  $c^j$  mit

$$\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ c_{2,j} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann muss aber  $c_3 = (3 \dots 3)$  sein. Damit ist aber  $d = (0, 1, 2)^T \in \varrho$  (beziehungsweise  $d = (1, 0, 2)^T \in \varrho$  falls  $c^j = (2, 0, 3)^T \in \sigma$  oder  $c^j = (2, 1, 3)^T \in \sigma$ ), im Widerspruch zu (4.26).

- $T = 9$ . Falls  $c_1$  und  $c_2$  die ersten beiden Zeilen sind, so existiert eine Spalte  $c^j \in \sigma^L \times \{2\}$ , d.h.,  $c_3 = (2 \dots 2)$  und damit  $d \in \sigma^R \times \{3\} \subseteq \varrho$ , im Widerspruch zu (4.26).

Andernfalls existiert eine Spalte  $c^j$  mit

$$\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ c_{2,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

im Widerspruch zu (4.27).

Somit gelten (4.25) und (4.22). Das bedeutet, dass  $pPOL_4\varrho$  in jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$  liegt.  $\square$

**Lemma 40.** Sei  $\varrho = \sigma \cup \delta_{\{0,1\}}^3$  mit

$$\sigma \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dann gehört  $pPOL_4\varrho$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$ .

*Beweis.* Sei

$$\begin{aligned}\sigma^R &:= \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \in E_4^2 \setminus \iota_4^2 \mid \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ 0 \end{array} \right) \in \sigma \right\} \\ \sigma^L &:= \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \in E_4^2 \setminus \iota_4^2 \mid \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ 2 \end{array} \right) \in \sigma \right\} \\ \sigma^C &:= \{v \in E_4^2 \setminus \iota_4^2 \mid \forall w \in \sigma^R \cup \sigma^L : \omega(v) \neq \omega(w)\}\end{aligned}$$

und  $s^L \in \sigma^L$  beliebig.

Sei  $\Phi_0 : E_4 \rightarrow E_4$  definiert durch

$$\Phi_0 \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right).$$

Damit sei wie vorher

$$\Gamma(v) := (\Phi_0(v) \ \Phi_0^2(v))$$

und  $\Phi$  folgendermaßen definiert.

|                                                                     | $t$ | $X_t$                                           | $Y_t$                                                                                | $Z_t$                                           | $\Phi(X_t, Y_t, Z_t)$                                                   |
|---------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $\forall v \in E_4$                                                 | 1   | $v$                                             | $v \ \Gamma(v)$                                                                      | $v$                                             | $E_4$                                                                   |
| $\forall v \in \sigma^L$                                            | 2   | $v$                                             | $v \ \Gamma(v)$                                                                      | $v$                                             | $\sigma^R$                                                              |
| $\forall v \in \sigma^R$                                            | 3   | $v$                                             | $v \ \Gamma(v)$                                                                      | $v$                                             | $\sigma^L$                                                              |
| $\forall v \in \sigma^C$                                            | 4   | $v$                                             | $v \ \Gamma(v)$                                                                      | $v$                                             | $E_4^2$                                                                 |
|                                                                     | 5   | $s^L$                                           | $\sigma^L \ \sigma^R \ \Gamma(s^L)$                                                  | $s^L$                                           | $E_4^2$                                                                 |
|                                                                     | 6   | $\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$      | $\sigma^L \times \{0\} \ \sigma^R \times \{2\} \ \delta_{\{0,1\}}^3$                 | $\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$      | $\varrho$                                                               |
| $\forall v \in E_4^3 \setminus (\varrho \cup \iota_4^3)$            | 7   | $v$                                             | $v \ \varrho \ \Gamma(v)$                                                            | $v$                                             | $E_4^3$                                                                 |
| $\sigma \neq \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ | 8.1 | $\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$ | $\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{array}$    | $\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{array}$                         |
| $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$    | 8.2 | $\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$ | $\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{array}$    | $\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array}$                         |
|                                                                     | 9   | $\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$ | $\begin{array}{ccc} 0 & & \\ 1 & & \\ 2 & \delta_{\{0,1\}}^4 & \\ 3 & & \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$ | $\sigma^R \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ |
| $\forall \chi^{(\mu)} \in \{\iota_4^3, \iota_4^4, \varrho_2\}$      | 10  | $\mathbf{0}$                                    | $\chi$                                                                               | $\mathbf{0}$                                    | $E_4^\mu$                                                               |

Zunächst beweisen wir

$$\forall \chi \neq \varrho, \chi \text{ kohärent} : \bar{\Phi} \notin pPOL_4\chi. \quad (4.28)$$

*Beweis.* Angenommen, (4.28) gilt nicht. Dann existiert eine kohärente Relation  $\chi^{(\mu)} \neq \varrho$  mit

$$\overline{\Phi} \in pPOL_4\chi. \quad (4.29)$$

Da  $\chi$  nicht-trivial ist, gilt

$$\chi \subseteq E_4^\mu. \quad (4.30)$$

- Falls  $\mu = 1$ , so folgt mit  $t = 1$  mit einem beliebigen  $v \in \chi$  dann  $E_4 \subseteq \chi$ , im Widerspruch zu (4.30).
- Falls  $\mu = 2$ , so existiert ein  $v \in \chi$  mit  $v \in \sigma^R \cup \sigma^L \cup \sigma^C$ , da die Zeilen von  $\chi$  o.B.d.A. entsprechend permutiert sind.
  - Falls  $v \in \sigma^R$ , dann folgt mit  $t = 3$  auch  $\sigma^L \subseteq \chi$ . Dann folgt mit  $t = 2$  weiter  $\sigma^R \subseteq \chi$  und somit  $E_4^2 \subseteq \chi$  mit  $t = 5$ , im Widerspruch zu (4.30).
  - Falls  $v \in \sigma^L$ , dann folgt mit  $t = 2$  auch  $\sigma^R \subseteq \chi$ . Dann folgt mit  $t = 3$  weiter  $\sigma^L \subseteq \chi$  und somit  $E_4^2 \subseteq \chi$  mit  $t = 5$ , im Widerspruch zu (4.30).
  - Falls  $v \in \sigma^C$ , dann folgt  $E_4^2 \subseteq \chi$  mit  $t = 4$ , im Widerspruch zu (4.30).
- Sei  $\mu = 3$ . Falls  $\chi = \iota_4^3$  gilt, folgt  $E_4^3 \subseteq \chi$  mit  $t = 10$ , im Widerspruch zu (4.30). Daher kann o.B.d.A.

$$\chi' := \chi \cap \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \emptyset$$

angenommen werden. Sei  $v' \in \chi'$  beliebig. Aus  $t = 0$  folgt  $\delta_{\{0,1\}}^3 \subseteq \chi$ . Für  $v' \in \{(2, 3, 0)^T, (2, 3, 1)^T\}$  folgt  $(0, 1, 2)^T \in \chi$  beziehungsweise  $(1, 0, 2)^T \in \chi$  mit  $t = 8$ . Daher kann o.B.d.A.  $v' \in \{(0, 1, 2)^T, (0, 1, 3)^T\}$  angenommen werden. Dann folgt  $\sigma^R \times \{0\} \subseteq \chi$  mit  $t = 9$ . Damit folgt mit  $t = 0$  und  $t = 3$  durch

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} s^R & s^R & \Gamma(s^R) & s^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \sigma^L \\ 2 \end{pmatrix},$$

dass auch  $\sigma^L \times \{2\} \subseteq \chi$  gilt. Also gilt

$$(\sigma^L \times \{2\}) \cup (\sigma^R \times \{0\}) \cup \delta_{\{0,1\}}^3 \subseteq \chi$$

und mit  $t = 6$  folgt somit  $\varrho \subseteq \chi$ . Falls ein  $v \in (\chi \setminus \delta_{\{0,1\}}^3) \cap \iota_4^3$  existiert, so muss  $\iota_4^3 \subseteq \chi$  gelten. Das heißt wiederum, mit  $t = 10$  folgt  $E_4^3 \subseteq \chi$ , im Widerspruch zu (4.30). Ansonsten existiert ein  $v \in \chi \setminus (\varrho \cup \iota_4^3)$  und mit  $t = 7$  folgt der Widerspruch zu (4.30).

- Sei  $\mu = 4$ . Falls  $\chi \in \{\iota_4^4, \varrho_1, \varrho_2\}$  gilt, folgt  $E_4^4 \subseteq \chi$  mit  $t = 10$ , im Widerspruch zu (4.30). Daher kann o.B.d.A.  $(0, 1, 2, 3)^T \in \chi$  angenommen werden. Dann folgt  $\delta_{\{0,1,2\}}^4 \subseteq \chi$  mit  $t = 0$ . Damit liefert  $t = 8$  weiter  $\delta_{\{0,1\}}^4 \subseteq \chi$  und dann folgt  $\delta_{\{2,3\}}^4 \subseteq \chi$ . Da aber  $\delta_{\{0,1\}}^4 \not\subseteq \delta_{\{2,3\}}^4$  und  $\delta_{\{2,3\}}^4 \not\subseteq \delta_{\{0,1\}}^4$  gilt, muss  $\iota_4^4 \subseteq \chi$  gelten. Das liefert aber mit  $t = 10$  einen Widerspruch zu (4.30).

Damit ist (4.28) gezeigt. ■

Angenommen,  $\overline{\Phi}^m \notin pPOL_4\varrho$ . Dann existieren Zeilen  $c_1, c_2, c_3$  mit

$$\overline{\Phi} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} =: d \notin \varrho \quad (4.31)$$

und

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : c^j \in \varrho. \quad (4.32)$$

Sind zwei Zeilen gleich, so gilt  $d \in \varrho$  nach Lemma 9, im Widerspruch zu (4.31).

Angenommen,  $c_1$  und  $c_2$  kommen aus verschiedenen Zeilenblöcken. Dann existieren zwei Spalten  $c^{j'}$  und  $c^{j'+1}$  mit

$$\begin{pmatrix} c_{1,j'} & c_{1,j'+1} \\ c_{2,j'} & c_{2,j'+1} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ \Gamma(y) & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma(y) \\ x & x \end{pmatrix} \right\}.$$

O.B.d.A. gilt  $c_{1,j'} = c_{1,j'+1} = x$ ,  $c_{2,j'} = 0$  und  $c_{2,j'+1} = 2$ . Dann liefert

$$\forall y \in E_4 : \begin{pmatrix} x & 2 \\ x & 0 \\ y & y \end{pmatrix} \notin \varrho$$

aber einen Widerspruch. Also sind die ersten beiden Zeilen aus demselben Zeilenblock. Dann gilt

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : \begin{pmatrix} c_{1,j} \\ c_{2,j} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Angenommen,  $c_1, c_2, c_3$  sind aus demselben Zeilenblock.

- $t = 0$ . Da

$$\forall v' \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \Phi_0(v') = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\forall v' \in \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} : \Phi_0(v') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt auch

$$c^1 \in \sigma : d = \Phi_0(c^1) \in \delta_{\{0,1\}}^3 \subset \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.31).

- $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Da jeweils maximal zwei verschiedene Zeilen existieren, gilt

$$(\forall j \in \{1, \dots, m\} : c^j \in \varrho) \implies d \in \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.31).

- $t = 6$ . Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cup (\sigma^L \times \{0\}) \cup (\sigma^R \times \{2\}) \cup \delta_{\{0,1\}}^3 \subseteq \varrho$$

und Kohärenz gilt

$$(\forall j \in \{1, \dots, m\} : c^j \in \varrho) \implies d \in \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.31).

- $t = 7$ . Es gibt genau drei verschiedene Zeilen, jedoch existieren Spalten

$$(c^{j'} \dots c^{j'+|e|}) = (v \varrho)^{(\alpha)}$$

für ein  $v \notin \varrho$  und eine Permutation  $\alpha$ . Dann sind aber diese Spalten alle voneinander verschieden, d.h., für ein  $j''$  gilt  $c^{j''} \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.32).

- Falls  $t = 8.1$  ist, betrachte eine Spalte  $c^j \in \sigma$ . Es gelten

$$\begin{aligned} c^j \in \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} &\implies d \in \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq \varrho, \\ c^j \in \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\implies d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \varrho, \\ c^j \in \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge c^j \in \varrho &\implies d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \varrho. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich in allen Fällen ein Widerspruch zu (4.31).

- Falls  $t = 8.2$  ist, betrachte eine Spalte  $c^j \in \sigma$ . Es gelten

$$\begin{aligned} c^j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &\implies d = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \varrho, \\ c^j = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &\implies d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \varrho. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich in allen Fällen ein Widerspruch zu (4.31).

- Falls  $t = 9$  ist, betrachte eine Spalte  $c^j \in \sigma$ . Es gilt

$$\begin{aligned} c^j \in \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &\implies d \in \sigma^R \times \{3\} \subset \varrho, \\ c^j \in \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \subseteq \sigma &\implies d \in (\sigma^R \times \{3\})^{(0,1)} \subset \varrho. \end{aligned}$$

Falls

$$c^j \in \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt, dann existiert wegen des Blockes  $\delta_{\{0,1\}}^3$  ein  $j'$  mit

$$c^{j'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.32).

- $t = 10$ . Es existiert eine Spalte  $c^{j'} = (x, y, y)^T$  mit  $x \neq y$ . Also gilt  $c^{j'} \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.32).

Damit ist gezeigt, dass  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  nicht aus demselben Zeilenblock kommen können. Der einzige Fall, der übrig bleibt, ist, dass  $c_1$  und  $c_2$  aus demselben Zeilenblock kommen und die  $c_3$  aus einem anderen. Sei  $T$  der Zeilenblock, aus dem  $c_1$  und  $c_2$  kommen. Sei  $T'$  der Zeilenblock, aus dem  $c_3$  stammt.

Falls  $T' \neq 0$ , existieren Spalten  $c^j$  und  $c^{j'}$  mit

$$(c^j \ c^{j'}) = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \not\subseteq \varrho,$$

da  $x \neq y$ , im Widerspruch zu (4.32).

Damit muss also  $T \neq 0$  und  $T' = 0$  gelten.

- Da bei  $T = 1$  nur eine Zeile für  $c_1$  und  $c_2$  zur Verfügung steht, ergibt sich ein Widerspruch.
- $T = 2$ . Da

$$\forall x \in \{2, 3\} : (\sigma^L \times \{x\}) \cap \varrho = \emptyset$$

gilt, muss  $c_3 = (0 \ \dots \ 0)$  oder  $c_3 = (1 \ \dots \ 1)$  sein. Damit gilt dann aber

$$d \in \sigma^R \times \{2\} \subseteq \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.31).

- $T = 3$ . Da

$$\forall x \in \{0, 1\} : (\sigma^R \times \{x\}) \cap \varrho = \emptyset$$

gilt, muss  $c_3 = (3 \ \dots \ 3)$  oder  $c_3 = (2 \ \dots \ 2)$  sein. Damit gilt dann aber

$$d \in \sigma^L \times \{0\} \subseteq \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.31).

- $T = 4$ . Wegen  $(2, 0) \in \sigma^C$  gibt es eine Spalte  $c^j$  mit

$$c^j \in \{(2, 0)\} \times E_4.$$

Da

$$(\{(2, 0)\} \times E_4) \cap \varrho = \emptyset,$$

gilt  $c^j \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.32).

- $T \in \{5, 6, 7, 10\}$ . Wählt man zwei verschiedene Zeilen  $c_1$  und  $c_2$  aus, so existieren Spalten  $c^{j_1}, \dots, c^{j_b}$  mit

$$\begin{pmatrix} c_{1,j_1} & \dots & c_{1,j_b} \\ c_{2,j_1} & \dots & c_{2,j_b} \end{pmatrix} = (\sigma^L \ \sigma^R).$$

Da aber  $c_3$  konstant ist und

$$\forall x \in E_4 : (\sigma^L \cup \sigma^R) \times \{x\} \not\subseteq \varrho$$

gilt, gibt es ein  $j$  mit  $c^j \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.32).

- $T = 8.1$ . Sei die Spalte  $j$  die erste Spalte von  $Y_{8,1}$ .

- Falls  $\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ c_{2,j} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , dann ist  $d = (2, 2, z)^T \in \varrho$ , im Widerspruch zu (4.31).
- Falls  $\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ c_{2,j} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , dann muss  $c_3 = (0 \dots 0)$  oder  $c_3 = (1 \dots 1)$  sein, da sonst ein  $j'$  mit

$$c^{j'} \in \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \{2, 3\} \subseteq E_4^3 \setminus \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.32) existiert. Damit ist aber  $d = (0, 1, 2)^T \in \varrho$  (beziehungsweise  $d = (1, 0, 2)^T \in \varrho$  falls  $c^j = (3, 2, 0)^T \in \sigma$  oder  $c^j = (3, 2, 1)^T \in \sigma$ ), im Widerspruch zu (4.31).

- $T = 8.2$ . Sei die Spalte  $j$  die erste Spalte von  $Y_{8,2}$ .

- Falls  $\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ c_{2,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , dann ist  $d = (2, 2, 0)^T \in \varrho$ , im Widerspruch zu (4.31).
- Falls  $\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ c_{2,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , dann muss  $c_3 = (0 \dots 0)$  sein. Damit ist aber  $d = (0, 1, 2)^T \in \varrho$ , im Widerspruch zu (4.31).

- $T = 9$ . Falls  $c_1$  und  $c_2$  die ersten beiden Zeilen sind, so existiert eine Spalte  $c^j \in \sigma^L \times \{0\}$ , d.h.,  $c_3 = (0 \dots 0)$  oder  $c_3 = (1 \dots 1)$  und damit  $d \in \sigma^R \times \{0\} \subseteq \varrho$ , im Widerspruch zu (4.31).

Andernfalls existiert eine Spalte  $c^j$  mit

$$\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ c_{2,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

im Widerspruch zu (4.32).

Damit ist  $\bar{\Phi} \in pPOL_4\varrho$  gezeigt. Somit liegt  $pPOL_4\varrho$  in jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$ .  $\square$

**Lemma 41.** *Sei*

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cup \delta_{\{0,1\}}^4.$$

Dann gehört  $pPOL_4\varrho$  zu jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$ .

*Beweis.* Seien

$$\begin{aligned} \sigma^R &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma^L &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^C &:= E_4^2 \setminus \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cup \iota_4^2 \right) \end{aligned}$$

sowie  $s^L \in \sigma^L$  beliebig.

Sei

$$\Gamma(v) := (\Phi_0(v) \ \Phi_0^2(v)).$$

Sei

$$\Phi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und  $\Phi$  definiert durch

|                                                                | $t$ | $X_t$            | $Y_t$                            | $Z_t$            | $\Phi(X_t, Y_t, Z_t)$ |
|----------------------------------------------------------------|-----|------------------|----------------------------------|------------------|-----------------------|
| $\forall v \in E_4$                                            | 1   | $v$              | $v \ \Gamma(v)$                  | $v$              | $E_4$                 |
|                                                                | 2   | 0<br>1           | 0 2 3<br>1 2 3                   | 0<br>1           | 1<br>0                |
| $\forall v \in \sigma^C$                                       | 4   | $v$              | $v \ \Gamma(v)$                  | $v$              | $E_4^2$               |
|                                                                | 5   | 0<br>1           | 0 1 2 3<br>1 0 2 3               | 0<br>1           | $E_4^2$               |
|                                                                | 6   | 0<br>1<br>2      | 0 1 2 3<br>1 0 2 3<br>2 3 3 2    | 0<br>1<br>2      | $E_4^3$               |
|                                                                | 8   | 0<br>1<br>2<br>3 | 0 3 2<br>1 3 2<br>2 3 2<br>3 2 3 | 0<br>1<br>2<br>3 | 0<br>0<br>1<br>2      |
| $\forall v \in E_4^4 \setminus \varrho$                        | 9   | $\eta_4$         | $v \ \varrho \ \Gamma(\eta_4)$   | $\eta_4$         | $E_4^4$               |
| $\forall \chi^{(\mu)} \in \{\iota_4^3, \iota_4^4, \varrho_2\}$ | 10  | $\mathbf{0}$     | $\chi$                           | $\mathbf{0}$     | $E_4^\mu$             |

Zunächst beweisen wir

$$\forall \chi \neq \varrho, \chi \text{ kohärent} : \bar{\Phi} \notin pPOL_4\chi. \quad (4.34)$$

*Beweis.* Angenommen, (4.34) gilt nicht. Dann existiert eine kohärente Relation  $\chi^{(\mu)} \neq \varrho$  mit

$$\overline{\Phi} \in pPOL_4\chi. \quad (4.35)$$

Da  $\chi$  nicht-trivial ist, gilt

$$\chi \subseteq E_4^\mu. \quad (4.36)$$

- Falls  $\mu = 1$ , so folgt mit  $t = 1$  mit einem beliebigen  $v \in \chi$  dann  $E_4 \subseteq \chi$ , im Widerspruch zu (4.36).
- Falls  $\mu = 2$ , so existiert ein  $v \in \chi$  mit  $v \in \sigma^R \cup \sigma^L \cup \sigma^C$ , da die Zeilen von  $\chi$  o.B.d.A. entsprechend permutiert sind.
  - Falls  $v = (0, 1)^T$ , dann folgt mit  $t = 2$  auch  $(1, 0)^T \in \chi$ . Dann folgt mit  $t = 5$  weiter  $E_4^2 \subseteq \chi$ , im Widerspruch zu (4.36).
  - Falls  $v \in \sigma^C$ , dann folgt  $E_4^2 \subseteq \chi$  mit  $t = 4$ , im Widerspruch zu (4.36).
- Sei  $\mu = 3$ . Falls  $\chi = \iota_4^3$  gilt, folgt  $E_4^3 \subseteq \chi$  mit  $t = 10$ , im Widerspruch zu (4.36). Daher kann o.B.d.A.

$$\chi' := \chi \cap \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \neq \emptyset$$

angenommen werden. Sei  $v' \in \chi'$  beliebig. Gilt  $v' = (0, 1, 2)^T$ , so folgt  $\delta_{\{0,1\}}^3 \subseteq \chi$  mit  $t = 8$ , andernfalls folgt dies mit  $t = 0$ . Aus  $t = 8$  folgt  $(0, 1, 2)^T \in \chi$  für  $v' \in \{(0, 2, 3)^T, (1, 2, 3)^T\}$ . Daher kann man  $v' \in \{(0, 1, 2)^T, (1, 0, 3)^T\}$  annehmen.

Falls  $v' = (0, 1, 2)^T$  gilt, dann folgt mit  $t = 0$  und  $t = 2$  durch

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

auch  $(1, 0, 3)^T \in \chi$ . Analog folgt für  $v' = (1, 0, 3)^T$  mit  $t = 0$  und  $t = 2$  durch

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

auch  $(0, 1, 2)^T \in \chi$ .

Damit gilt also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cup \delta_{\{0,1\}}^3 \subseteq \chi$$

und mit  $t = 6$  folgt dann  $E_4^3 \subseteq \chi$ , im Widerspruch zu (4.36).

- Sei  $\mu = 4$ . Falls  $\chi \in \{\iota_4^4, \varrho_1, \varrho_2\}$  gilt, folgt  $E_4^4 \subseteq \chi$  mit  $t = 10$ , im Widerspruch zu (4.36). Daher kann o.B.d.A.  $(0, 1, 2, 3)^T \in \chi$  angenommen werden. Dann folgt  $\delta_{\{0,1,2\}}^4 \subseteq \chi$  mit  $t = 0$ . Damit liefert  $t = 8$  weiter  $\delta_{\{0,1\}}^4 \subseteq \chi$ .

Aus  $t = 0$  und  $t = 2$  folgt durch

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

auch  $(1, 0, 3, 2)^T \in \chi$ , also  $\varrho \subset \chi$ .

Dann existiert ein  $v \in \chi \setminus \varrho$  und  $t = 9$  liefert  $E_4^4 \subseteq \chi$ , im Widerspruch zu (4.36).

Damit ist (4.34) gezeigt. ■

Angenommen,  $\bar{\Phi}^m \notin pPOL_4\varrho$ . Dann existieren Zeilen  $c_1, c_2, c_3, c_4$  mit

$$\bar{\Phi} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} =: d \notin \varrho \quad (4.37)$$

und

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : c^j \in \varrho. \quad (4.38)$$

Sind zwei Zeilen gleich, so gilt  $d \in \varrho$  nach Lemma 9, im Widerspruch zu (4.37).

Angenommen,  $c_1$  und  $c_2$  kommen aus verschiedenen Zeilenblöcken. Dann existieren zwei Spalten  $c^{j'}$  und  $c^{j'+1}$  mit

$$\begin{pmatrix} c_{1,j'} & c_{1,j'+1} \\ c_{2,j'} & c_{2,j'+1} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ \Gamma(y) & \Gamma(y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma(y) \\ x & x \end{pmatrix} \right\}.$$

O.B.d.A. gilt  $c_{1,j'} = c_{1,j'+1} = x$ ,  $c_{2,j'} = 3$  und  $c_{2,j'+1} = 2$ . Da in  $\sigma$  die 3 nicht in den ersten beiden Zeilen vorkommt, muss  $c^{j'} \in \delta_{\{0,1\}}^4$  gelten, also  $x = 3$ . Dann ist aber

$$c^{j'+1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \notin \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.38). Also sind die ersten beiden Zeilen aus demselben Zeilenblock.

Angenommen,  $c_1, c_2, c_3, c_4$  sind aus demselben Zeilenblock.

- $t = 0$ . Dann ist nur

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \\ 2 & \dots & 2 \\ 3 & \dots & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ 3 & \dots & 3 \\ 2 & \dots & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

möglich. Dann gilt aber  $d \in \sigma$ , im Widerspruch zu (4.37).

- $t \in \{1, 2, 4, 5, 6\}$  sowie  $t = 10$  mit  $\chi = \iota_4^3$ . Da jeweils maximal drei verschiedene Zeilen existieren, gilt

$$(\forall j \in \{1, \dots, m\} : c^j \in \varrho) \implies d \in \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.37).

- Falls  $t = 8$  ist, betrachte eine Spalte  $c^j \in \sigma$ . Es gelten

$$\begin{aligned} c^j \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} &\implies d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \varrho, \\ c^j \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} &\implies d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \varrho, \\ c^j \in \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \wedge c^j \in \varrho &\implies d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \varrho. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich in allen Fällen ein Widerspruch zu (4.37).

- $t = 9$ . Es gibt genau vier verschiedene Zeilen, jedoch existieren Spalten

$$(c^{j'} \dots c^{j'+|e|}) = (v \varrho)^{(\alpha)}$$

für ein  $v \notin \varrho$  und eine Permutation  $\alpha$ . Dann sind aber diese Spalten alle voneinander verschieden, d.h., für ein  $j''$  gilt  $c^{j''} \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.38).

- $t = 10$  und  $\chi \in \{\iota_4^4, \varrho_2\}$ . Es existiert eine Spalte  $c^{j'} = (x, y, y, x)^T$  mit  $x \neq y$ . Also gilt  $c^{j'} \notin \varrho$ , im Widerspruch zu (4.38).

Damit ist gezeigt, dass  $c_1, c_2, c_3$  und  $c_4$  nicht aus demselben Zeilenblock kommen können.

Der letzte Fall ist, dass  $c_1$  und  $c_2$  aus demselben Zeilenblock kommen und wenigstens  $c_3$  oder  $c_4$  aus einem anderen. O.B.d.A. sei  $c_3$  aus einem anderen Zeilenblock. Sei  $T$  der Zeilenblock, aus dem  $c_1$  und  $c_2$  kommen. Sei  $T'$  der Zeilenblock, aus dem  $c_3$  stammt.

Falls  $T' \neq 0$ , existieren Spalten  $c^j$  und  $c^{j'}$  mit

$$(c^j \ c^{j'}) = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \\ 3 & 2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \not\subseteq \varrho,$$

da  $x \neq y$ , im Widerspruch zu (4.38). Analog gilt dies für  $c_4$ , also muss  $c_4$  auch aus dem Zeilenblock  $t = 0 = T'$  stammen.

Damit muss also  $T \neq 0$  und  $T' = 0$  gelten.

O.B.d.A. gibt es eine Spalte  $c^j$  mit  $\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ c_{2,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Gibt es eine andere Spalte  $c^{j'}$  mit

$$\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ c_{2,j} \end{pmatrix} \in E_4^2 \setminus \left( \iota_4^2 \cup \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

dann gilt

$$c^{j'} \notin \varrho$$

oder

$$(c^j \ c^{j'}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ x & x \\ y & y \end{pmatrix} \notin \varrho,$$

im Widerspruch zu (4.38).

Deshalb und da für  $T = 1$  nur eine Zeile für  $c_1$  und  $c_2$  zur Verfügung steht, muss  $T \in \{2, 8\}$  gelten. Ferner müssen im Fall  $T = 8$  die Zeilen  $c_1$  und  $c_2$  die ersten beiden Zeilen aus  $t = 8$  sein. Dann ist aber  $d = (0, 0, z_1, z_2)^T \in \varrho$ , im Widerspruch zu (4.37). Also bleibt nur  $T = 2$  übrig.

Hier gilt aber

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt  $d \in \varrho$ , im Widerspruch zu (4.37).

Damit ist  $\bar{\Phi} \in pPOL_4\varrho$  gezeigt. Somit liegt  $pPOL_4\varrho$  in jeder minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$ .  $\square$

## Kapitel 5

# Zusammenfassung

### 5.1 Ergebnisse

**Satz 42.** *Es gibt genau eine minimale Überdeckung  $\mathcal{X}$  von  $p\mathcal{M}_4$  und es gilt  $|\mathcal{X}| = 449$ .*

*Beweis.* Es wurde für alle maximalen partiellen Klone aus  $p\mathcal{M}_4$  die Funktion  $\mathcal{O}$  definiert. Diese erfüllt die Voraussetzungen von Satz 19. Somit gibt es genau eine minimale Überdeckung  $\mathcal{X}$  von  $p\mathcal{M}_4$  mit

$$\mathcal{X} = \{X \in p\mathcal{M}_4 \mid \mathcal{O}(X) = \emptyset\}.$$

Daher ist dann  $|\mathcal{X}|$  gleich der Anzahl der maximalen Klone, die in jeder minimalen Überdeckung sind. Diese kann man im Anhang A nachzählen.  $\square$

Damit erhält man das gesuchte Sheffer-Kriterium der 4-wertigen Logik.

**Satz 43.** *Sei  $f^n \in \tilde{P}_4$ . Dann gilt*

$$[f] = \tilde{P}_4 \iff \forall X \in \mathcal{X} : f \notin X. \quad (5.1)$$

*Zudem können die 449 Bedingungen aus (5.1) nicht weiter reduziert werden, d.h., die Bedingungen sind unabhängig voneinander.*  $\square$

### 5.2 Schlussfolgerungen

In der Untersuchung von partiellen Funktionen über einer  $k$ -elementigen Menge ist die Charakterisierung von Sheffer-Funktionen von Interesse. Dafür verwendet man die maximalen partiellen Klone, die im Anhang für  $k = 4$  komplett aufgelistet sind. Dabei wurde die Anzahl der maximalen partiellen Klone neu bestimmt auf 1102 und es wurden Fehler in einer anderen Zählung ([15]) aufgedeckt.

Mit der Definition der Funktion  $\mathcal{O}$  wurde eine Methode gefunden, mit der man einfacher für maximale partielle Klone entscheiden kann, ob sie zu einer minimalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_k$  gehören, und mit der man zeigen kann, dass es

genau eine minimale Überdeckung gibt. Weiter wurde zur Begründung dieser Methode zunächst gezeigt, dass zu verschiedenen kohärenten Relationen auch verschiedene maximale partielle Klone gehören. Eine offene Frage ist, ob für alle  $k \geq 5$  diese Methode anwendbar ist, d.h., ob es eine Funktion  $\mathcal{O}$  gibt, auf die Satz 19 anwendbar ist.

Der Begriff der Blockfunktion wurde eingeführt und erfolgreich verwendet, um zu zeigen, dass maximale partielle Klone zu jeder minimalen Überdeckung gehören. Insbesondere ließ sich mit der universellen Blockfunktion aus Abschnitt 4.2 der Aufwand für eine große Klasse von Relationen deutlich verringern.

Es wurden bei der Untersuchung Aussagen gefunden, die bisher bekannte Resultate auf eine größere Klasse von Relationen erweitern. Insbesondere können nun Spezialfälle aus [17] über allgemeine Sätze behandelt werden. Bei den binären reflexiven symmetrischen Relationen lieferte eine Übersetzung in die Sprache der Graphentheorie einen einfachen Beweis wie in Satz 26.

Einerseits kann mit Satz 35 eine große Klasse quasi-diagonaler Relationen mit einem einfachen Kriterium behandelt werden. Andererseits konnte für die in den Lemmata 39, 40 und 41 behandelten Relationen kein zusammenfassender Beweis gefunden werden, obwohl ein Vergleich der Beweise vermuten lässt, dass ein solcher Beweis existiert.

Schließlich wurde für  $p\mathcal{M}_4$  eine minimale Überdeckung bestimmt und gezeigt, dass dies die einzige minimale Überdeckung ist. Diese Überdeckung enthält genau 449 verschiedene maximale partielle Klone. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Größe von minimalen Überdeckungen  $\mathcal{X}_k$  von  $p\mathcal{M}_k$  für  $k \in \{2, 3, 4\}$ .

| $k$ | $ p\mathcal{M}_k $ | $ p\mathcal{X}_k $ | $ \mathcal{M}_k $ | $ \mathcal{X}_k $ |
|-----|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| 2   | 8                  | 4                  | 5                 | 3                 |
| 3   | 58                 | 26                 | 18                | 10                |
| 4   | <b>1 102</b>       | <b>449</b>         | 82                | 30                |
| 5   | > 16 487           | ?                  | 643               | 86                |
| 6   | ?                  | ?                  | 15 182            | 298               |

Tabelle 5.1: Größe von  $p\mathcal{M}_k$  und  $\mathcal{M}_k$  sowie von den minimalen Überdeckungen  $p\mathcal{X}_k$  beziehungsweise  $\mathcal{X}_k$

## Anhang A

# Alle kohärenten Relationen für $k \in \{2, 3, 4\}$

In den folgenden Tabellen sind alle kohärenten Relationen  $\varrho^{(h)}$  für  $k \in \{2, 3, 4\}$  aufgeführt, dargestellt durch  $\varrho = \sigma \cup \delta$  mit  $\sigma \cap \iota_k^h = \emptyset$  und  $\delta \subseteq \iota_k^h$ . Die Spalte *iso* gibt die Anzahl der Relationen an, die in der selben Relationenklasse wie  $\varrho$  sind. Die Spalte *S/L* gibt die Nummer des Satzes beziehungsweise des Lemmas an, mit dem sich entscheiden lässt, ob der zugehörige maximale Klon zu jeder oder keiner maximalen Überdeckung von  $p\mathcal{M}_4$  gehört, was in der letzten Spalte noch einmal angegeben wird. Das heißt, für Relationen mit *In* liegt der zugehörige Klon in jeder minimalen Überdeckung, für diejenigen mit *Out* in keiner.

Für Relationen, bei denen  $\sigma$  viele Elemente umfasst, wurde die Schreibweise

$$v(G) := \left\{ v^{(\pi)} \mid \pi \in G \right\}$$

verwendet, wobei  $v \in E_4^h$  und  $G \leq S_h$  für ein gewisses  $h$  ist.

| $\delta$             | $\sigma$    | iso |
|----------------------|-------------|-----|
| $\emptyset$          | 0           | 2   |
| $\emptyset$          | 01          | 1   |
| $\emptyset$          | 01, 10      | 1   |
| $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01          | 1   |
| $\varrho_1$          | $\emptyset$ | 1   |
| $\varrho_2$          | $\emptyset$ | 1   |

Tabelle A.1: Alle kohärenten Relationen für  $k = 2$

| $\delta$               | $\sigma$                     | iso |
|------------------------|------------------------------|-----|
| $\emptyset$            | 0                            | 3   |
| $\emptyset$            | 0, 1                         | 3   |
| $\emptyset$            | 01                           | 3   |
| $\emptyset$            | 01, 10                       | 3   |
| $\emptyset$            | 01, 02                       | 3   |
| $\emptyset$            | 01, 10, 02, 20               | 3   |
| $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01                           | 3   |
| $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 10                       | 3   |
| $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 02                       | 3   |
| $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 20                       | 3   |
| $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 02, 12                   | 3   |
| $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 10, 02, 20               | 3   |
| $\emptyset$            | 012                          | 1   |
| $\emptyset$            | 012, 021                     | 3   |
| $\emptyset$            | 012, 120, 201                | 1   |
| $\emptyset$            | 012, 120, 201, 021, 210, 102 | 1   |
| $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012                          | 1   |
| $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012, 021                     | 3   |
| $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012, 120, 201                | 1   |
| $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012, 120, 201, 021, 210, 102 | 1   |
| $\delta_{\{0,1\}}^3$   | 012                          | 3   |
| $\delta_{\{0,1\}}^3$   | 012, 102                     | 3   |
| $\varrho_1$            | $\emptyset$                  | 1   |
| $\varrho_2$            | $\emptyset$                  | 1   |
| $\iota_3^3$            | $\emptyset$                  | 1   |

Tabelle A.2: Alle kohärenten Relationen für  $k = 3$

| Nr. | $\delta$    | $\sigma$ | iso | S/L | In/Out    |
|-----|-------------|----------|-----|-----|-----------|
| 1   | $\emptyset$ | 0        | 4   | 18  | <i>In</i> |
| 2   | $\emptyset$ | 0, 1     | 6   | 18  | <i>In</i> |
| 3   | $\emptyset$ | 0, 1, 2  | 4   | 18  | <i>In</i> |

Tabelle A.3: Unäre Relationen

| Nr. | $\delta$    | $\sigma$       | iso | S/L | In/Out     |
|-----|-------------|----------------|-----|-----|------------|
| 4   | $\emptyset$ | 01             | 6   | 20  | <i>Out</i> |
| 5   | $\emptyset$ | 01, 02         | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 6   | $\emptyset$ | 01, 23         | 6   | 34  | <i>In</i>  |
| 7   | $\emptyset$ | 01, 02, 03     | 4   | 20  | <i>Out</i> |
| 8   | $\emptyset$ | 01, 02, 32     | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 9   | $\emptyset$ | 01, 02, 31, 32 | 3   | 20  | <i>Out</i> |

Tabelle A.4: Binäre asymmetrische areflexive Relationen

| Nr. | $\delta$    | $\sigma$                       | iso | S/L | In/Out    |
|-----|-------------|--------------------------------|-----|-----|-----------|
| 10  | $\emptyset$ | 01, 10                         | 6   | 32  | <i>In</i> |
| 11  | $\emptyset$ | 01, 10, 02, 20                 | 12  | 32  | <i>In</i> |
| 12  | $\emptyset$ | 01, 10, 23, 32                 | 3   | 32  | <i>In</i> |
| 13  | $\emptyset$ | 01, 10, 02, 20, 03, 30         | 4   | 32  | <i>In</i> |
| 14  | $\emptyset$ | 01, 10, 12, 21, 23, 32         | 12  | 32  | <i>In</i> |
| 15  | $\emptyset$ | 01, 10, 02, 20, 13, 31, 23, 32 | 3   | 32  | <i>In</i> |

Tabelle A.5: Binäre symmetrische areflexive Relationen

| Nr. | $\delta$             | $\sigma$               | iso | S/L | In/Out     |
|-----|----------------------|------------------------|-----|-----|------------|
| 16  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01                     | 6   | 34  | <i>In</i>  |
| 17  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02                 | 12  | 34  | <i>In</i>  |
| 18  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 12                 | 12  | 34  | <i>In</i>  |
| 19  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 23                 | 6   | 34  | <i>In</i>  |
| 20  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 03             | 4   | 23  | <i>Out</i> |
| 21  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 30             | 12  | 23  | <i>Out</i> |
| 22  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 12             | 12  | 34  | <i>In</i>  |
| 23  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 13             | 24  | 23  | <i>Out</i> |
| 24  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 32             | 12  | 28  | <i>Out</i> |
| 25  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 12, 23             | 12  | 23  | <i>Out</i> |
| 26  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 03, 12         | 24  | 23  | <i>Out</i> |
| 27  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 30, 32         | 24  | 23  | <i>Out</i> |
| 28  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 31, 32         | 3   | 20  | <i>Out</i> |
| 29  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 12, 23         | 24  | 23  | <i>Out</i> |
| 30  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 03, 12, 23         | 12  | 23  | <i>Out</i> |
| 31  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 13, 23         | 6   | 23  | <i>Out</i> |
| 32  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 03, 12, 13     | 12  | 23  | <i>Out</i> |
| 33  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 03, 12, 31     | 24  | 23  | <i>Out</i> |
| 34  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 03, 13, 23     | 6   | 23  | <i>Out</i> |
| 35  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 12, 13, 23     | 12  | 23  | <i>Out</i> |
| 36  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 02, 03, 12, 13, 23 | 12  | 23  | <i>Out</i> |

Tabelle A.6: Binäre antisymmetrische reflexive Relationen

| Nr. | $\delta$             | $\sigma$                               | iso | S/L | In/Out     |
|-----|----------------------|----------------------------------------|-----|-----|------------|
| 37  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 10                                 | 6   | 34  | <i>In</i>  |
| 38  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 10, 02, 20                         | 12  | 34  | <i>In</i>  |
| 39  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 10, 23, 32                         | 3   | 34  | <i>In</i>  |
| 40  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 10, 02, 20, 12, 21                 | 4   | 34  | <i>In</i>  |
| 41  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 10, 02, 20, 03, 30                 | 4   | 20  | <i>Out</i> |
| 42  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 10, 12, 21, 23, 32                 | 12  | 26  | <i>Out</i> |
| 43  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 10, 02, 20, 03, 30, 12, 21         | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 44  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 10, 02, 20, 13, 31, 23, 32         | 3   | 36  | <i>In</i>  |
| 45  | $\delta_{\{0,1\}}^2$ | 01, 10, 02, 20, 03, 30, 12, 21, 13, 31 | 6   | 20  | <i>Out</i> |

Tabelle A.7: Binäre symmetrische reflexive Relationen

| Nr. | $\delta$    | $\sigma$                     | iso | S/L | In/Out     |
|-----|-------------|------------------------------|-----|-----|------------|
| 46  | $\emptyset$ | 012                          | 4   | 20  | <i>Out</i> |
| 47  | $\emptyset$ | 012, 021                     | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 48  | $\emptyset$ | 012, 120, 201                | 4   | 32  | <i>In</i>  |
| 49  | $\emptyset$ | 012( $S_3$ )                 | 4   | 32  | <i>In</i>  |
| 50  | $\emptyset$ | 012, 013                     | 6   | 20  | <i>Out</i> |
| 51  | $\emptyset$ | 012, 013, 102, 103           | 6   | 20  | <i>Out</i> |
| 52  | $\emptyset$ | 012, 013, 021, 031           | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 53  | $\emptyset$ | 012, 120, 201, 013, 130, 301 | 6   | 32  | <i>In</i>  |
| 54  | $\emptyset$ | 012( $S_3$ ), 013( $S_3$ )   | 6   | 32  | <i>In</i>  |

Tabelle A.8: Ternäre areflexive Relationen

| Nr. | $\delta$               | $\sigma$                     | iso | S/L | In/Out     |
|-----|------------------------|------------------------------|-----|-----|------------|
| 55  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012                          | 4   | 34  | <i>In</i>  |
| 56  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012, 021                     | 12  | 34  | <i>In</i>  |
| 57  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012, 120, 201                | 4   | 34  | <i>In</i>  |
| 58  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012( $S_3$ )                 | 4   | 34  | <i>In</i>  |
| 59  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012, 013                     | 6   | 21  | <i>Out</i> |
| 60  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012, 013, 102, 103           | 6   | 21  | <i>Out</i> |
| 61  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012, 013, 021, 023           | 12  | 21  | <i>Out</i> |
| 62  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012, 120, 201, 013, 130, 301 | 6   | 32  | <i>In</i>  |
| 63  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012( $S_3$ ), 013( $S_3$ )   | 6   | 32  | <i>In</i>  |

Tabelle A.9: Ternäre Relationen mit  $\delta = \delta_{\{0,1,2\}}^3$

| Nr. | $\delta$             | $\sigma$           | iso | S/L | In/Out     |
|-----|----------------------|--------------------|-----|-----|------------|
| 64  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012                | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 65  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 013           | 6   | 20  | <i>Out</i> |
| 66  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 023           | 24  | 39  | <i>In</i>  |
| 67  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 032           | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 68  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 123           | 24  | 39  | <i>In</i>  |
| 69  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 132           | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 70  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 230           | 12  | 40  | <i>In</i>  |
| 71  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 231           | 12  | 40  | <i>In</i>  |
| 72  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 031, 032      | 24  | 20  | <i>Out</i> |
| 73  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 023, 123      | 24  | 39  | <i>In</i>  |
| 74  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 032, 312      | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 75  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 230, 231      | 24  | 40  | <i>In</i>  |
| 76  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 130, 132      | 24  | 20  | <i>Out</i> |
| 77  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 013, 023, 123 | 24  | 20  | <i>Out</i> |
| 78  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 013, 230, 231 | 6   | 40  | <i>In</i>  |

Tabelle A.10: Ternäre Relationen mit  $\delta = \delta_{\{0,1\}}^3$  und  $G_\sigma = \{\text{id}\}$ 

| Nr. | $\delta$             | $\sigma$                               | iso | S/L | In/Out     |
|-----|----------------------|----------------------------------------|-----|-----|------------|
| 79  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 102                               | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 80  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 102, 013, 103                     | 6   | 20  | <i>Out</i> |
| 81  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 102, 023, 203                     | 24  | 39  | <i>In</i>  |
| 82  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 102, 032, 302                     | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 83  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 102, 230, 320                     | 12  | 40  | <i>In</i>  |
| 84  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 102, 031, 301, 032, 302           | 24  | 20  | <i>Out</i> |
| 85  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 102, 023, 203, 123, 213           | 12  | 39  | <i>In</i>  |
| 86  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 102, 032, 302, 312, 132           | 4   | 20  | <i>Out</i> |
| 87  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 102, 230, 320, 231, 321           | 12  | 40  | <i>In</i>  |
| 88  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 102, 013, 103, 023, 203, 123, 213 | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 89  | $\delta_{\{0,1\}}^3$ | 012, 102, 013, 103, 230, 320, 231, 321 | 3   | 40  | <i>In</i>  |

Tabelle A.11: Ternäre Relationen mit  $\delta = \delta_{\{0,1\}}^3$  und  $G_\sigma = \{\text{id}, (01)\}$ 

| Nr. | $\delta$    | $\sigma$                       | iso | S/L | In/Out     |
|-----|-------------|--------------------------------|-----|-----|------------|
| 90  | $\iota_4^3$ | $\emptyset$                    | 1   | 37  | <i>In</i>  |
| 91  | $\iota_4^3$ | $012(S_3)$                     | 4   | 38  | <i>In</i>  |
| 92  | $\iota_4^3$ | $012(S_3), 013(S_3)$           | 6   | 27  | <i>Out</i> |
| 93  | $\iota_4^3$ | $012(S_3), 013(S_3), 023(S_3)$ | 4   | 27  | <i>Out</i> |

Tabelle A.12: Ternäre total-reflexive, total-symmetrische Relationen

| Nr. | $\delta$    | $\sigma$                                       | iso | S/L | In/Out     |
|-----|-------------|------------------------------------------------|-----|-----|------------|
| 94  | $\emptyset$ | 0123                                           | 1   | 20  | <i>Out</i> |
| 95  | $\emptyset$ | 0123, 1023                                     | 6   | 20  | <i>Out</i> |
| 96  | $\emptyset$ | 0123, 1032                                     | 3   | 32  | <i>In</i>  |
| 97  | $\emptyset$ | 0123, 1203, 2013                               | 4   | 20  | <i>Out</i> |
| 98  | $\emptyset$ | 0123, 1230, 2301, 3012                         | 3   | 32  | <i>In</i>  |
| 99  | $\emptyset$ | 0123, 0132, 1023, 1032                         | 3   | 20  | <i>Out</i> |
| 100 | $\emptyset$ | 0123, 1032, 3210, 2301                         | 1   | 32  | <i>In</i>  |
| 101 | $\emptyset$ | 0123, 0132, 0213, 0231, 0312, 0321             | 4   | 20  | <i>Out</i> |
| 102 | $\emptyset$ | 0123, 1230, 2301, 3012, 2103, 3210, 0321, 1032 | 3   | 32  | <i>In</i>  |
| 103 | $\emptyset$ | 0123( $A_4$ )                                  | 1   | 32  | <i>In</i>  |
| 104 | $\emptyset$ | 0123( $S_4$ )                                  | 1   | 32  | <i>In</i>  |

Tabelle A.13: Quartäre areflexive Relationen

| Nr. | $\delta$                 | $\sigma$                                       | iso | S/L | In/Out     |
|-----|--------------------------|------------------------------------------------|-----|-----|------------|
| 105 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123                                           | 1   | 21  | <i>Out</i> |
| 106 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 1023                                     | 6   | 21  | <i>Out</i> |
| 107 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 1032                                     | 3   | 32  | <i>In</i>  |
| 108 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 1203, 2013                               | 4   | 21  | <i>Out</i> |
| 109 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 1230, 2301, 3012                         | 3   | 32  | <i>In</i>  |
| 110 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 0132, 1023, 1032                         | 3   | 21  | <i>Out</i> |
| 111 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 1032, 3210, 2301                         | 1   | 32  | <i>In</i>  |
| 112 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 0132, 0213, 0231, 0312, 0321             | 4   | 21  | <i>Out</i> |
| 113 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 1230, 2301, 3012, 2103, 3210, 0321, 1032 | 3   | 32  | <i>In</i>  |
| 114 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123( $A_4$ )                                  | 1   | 32  | <i>In</i>  |
| 115 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123( $S_4$ )                                  | 1   | 32  | <i>In</i>  |

Tabelle A.14: Quartäre Relationen mit  $\delta = \delta_{\{0,1,2,3\}}^4$

| Nr. | $\delta$               | $\sigma$                           | iso | S/L | In/Out     |
|-----|------------------------|------------------------------------|-----|-----|------------|
| 116 | $\delta_{\{0,1,2\}}^4$ | 0123                               | 4   | 20  | <i>Out</i> |
| 117 | $\delta_{\{0,1,2\}}^4$ | 0123, 1023                         | 12  | 20  | <i>Out</i> |
| 118 | $\delta_{\{0,1,2\}}^4$ | 0123, 1203, 2013                   | 4   | 20  | <i>Out</i> |
| 119 | $\delta_{\{0,1,2\}}^4$ | 0123, 0213, 1023, 1203, 2013, 2103 | 4   | 20  | <i>Out</i> |

Tabelle A.15: Quartäre Relationen mit  $\delta = \delta_{\{0,1,2\}}^4$

| Nr. | $\delta$             | $\sigma$               | iso | S/L | In/Out     |
|-----|----------------------|------------------------|-----|-----|------------|
| 120 | $\delta_{\{0,1\}}^4$ | 0123                   | 6   | 20  | <i>Out</i> |
| 121 | $\delta_{\{0,1\}}^4$ | 0123, 1023             | 6   | 20  | <i>Out</i> |
| 122 | $\delta_{\{0,1\}}^4$ | 0123, 0132             | 6   | 20  | <i>Out</i> |
| 123 | $\delta_{\{0,1\}}^4$ | 0123, 1032             | 6   | 41  | <i>In</i>  |
| 124 | $\delta_{\{0,1\}}^4$ | 0123, 0132, 1023, 1032 | 6   | 20  | <i>Out</i> |

Tabelle A.16: Quartäre Relationen mit  $\delta = \delta_{\{0,1\}}^4$ 

| Nr. | $\delta$                     | $\sigma$                                       | iso | S/L | In/Out    |
|-----|------------------------------|------------------------------------------------|-----|-----|-----------|
| 125 | $\delta_{\{0,1\},\{2,3\}}^4$ | 0123                                           | 3   | 35  | <i>In</i> |
| 126 | $\delta_{\{0,1\},\{2,3\}}^4$ | 0123, 1023                                     | 6   | 35  | <i>In</i> |
| 127 | $\delta_{\{0,1\},\{2,3\}}^4$ | 0123, 1032                                     | 3   | 35  | <i>In</i> |
| 128 | $\delta_{\{0,1\},\{2,3\}}^4$ | 0123, 2301                                     | 6   | 35  | <i>In</i> |
| 129 | $\delta_{\{0,1\},\{2,3\}}^4$ | 0123, 0132, 1023, 1032                         | 3   | 35  | <i>In</i> |
| 130 | $\delta_{\{0,1\},\{2,3\}}^4$ | 0123, 1032, 2310, 3201                         | 3   | 35  | <i>In</i> |
| 131 | $\delta_{\{0,1\},\{2,3\}}^4$ | 0123, 1032, 2301, 3210                         | 3   | 35  | <i>In</i> |
| 132 | $\delta_{\{0,1\},\{2,3\}}^4$ | 0123, 0132, 1023, 1032, 2301, 2310, 3201, 3210 | 3   | 35  | <i>In</i> |

Tabelle A.17: Quartäre Relationen mit  $\delta = \delta_{\{0,1\},\{2,3\}}^4$ 

| Nr. | $\delta$    | $\sigma$                                       | iso | S/L | In/Out     |
|-----|-------------|------------------------------------------------|-----|-----|------------|
| 133 | $\iota_4^4$ | $\emptyset$                                    | 1   | 27  | <i>Out</i> |
| 134 | $\varrho_1$ | $\emptyset$                                    | 1   | 37  | <i>In</i>  |
| 135 | $\varrho_2$ | $\emptyset$                                    | 1   | 37  | <i>In</i>  |
| 136 | $\varrho_1$ | 0123( $S_4$ )                                  | 1   | 29  | <i>Out</i> |
| 137 | $\varrho_2$ | 0123, 1230, 2301, 3012, 2103, 3210, 0321, 1032 | 3   | 29  | <i>Out</i> |

Tabelle A.18: Spezielle quartäre Relationen

## Anhang B

# Weitere Tabellen

In den Sätzen 20, 21, 32 und 34 müssen Parameter zu einer gegebenen Relation gefunden werden, damit der entsprechende Satz anwendbar ist. In den folgenden Tabellen sind diese Relationen und eine entsprechende Wahl der Parameter aufgelistet.

| Nr. | $\delta$               | $\sigma$                               | $\alpha$    | $m$ | $h$ | $X_0$    | $X_1$                 | $X_2$ | $X_3$ | $\sigma_0$                                                   | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $C$    | $\varsigma$                    | Nr. | $X$        | Nr. |
|-----|------------------------|----------------------------------------|-------------|-----|-----|----------|-----------------------|-------|-------|--------------------------------------------------------------|------------|------------|------------|--------|--------------------------------|-----|------------|-----|
| 4   | $\emptyset$            | 01                                     |             | 1   | 1   | {0}      |                       |       |       | {1}                                                          |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 1   | {0}        | 1   |
| 5   | $\emptyset$            | 01, 02                                 |             | 1   | 1   | {0}      |                       |       |       | {1, 2}                                                       |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 2   | {0}        | 1   |
| 7   | $\emptyset$            | 01, 02, 03                             |             | 1   | 1   | {0}      |                       |       |       | {1, 2, 3}                                                    |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 3   | {0}        | 1   |
| 8   | $\emptyset$            | 01, 02, 32                             |             | 2   | 1   | {0, 3}   | {3}                   |       |       | {1, 2, 3}                                                    |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 4   | {0}        | 2   |
| 9   | $\emptyset$            | 01, 02, 31, 32                         |             | 1   | 1   | {0, 3}   |                       |       |       | {1, 2}                                                       |            |            |            | {0}    | $\sigma_1$                     | 1   | {0, 3}     | 2   |
| 28  | $\delta^2_{\{0,1\}}$   | 01, 02, 31, 32                         |             | 4   | 1   | {0}      | {1}                   |       |       | {1, 2}                                                       |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 2   | {0, 3}     | 2   |
| 41  | $\delta^2_{\{0,1\}}$   | 01, 10, 02, 20, 03, 30                 |             | 4   | 1   | {0}      | {1}                   |       |       | {0, 1, 2, 3}                                                 |            |            |            | {0}    | $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ | 2   | {0}        | 1   |
| 43  | $\delta^2_{\{0,1\}}$   | 01, 10, 02, 20, 03, 30, 12, 21         |             | 3   | 1   | {0}      | {1, 2}                |       |       | {0, 1, 2, 3}                                                 |            |            |            | {0}    | $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ | 2   | {0}        | 1   |
| 45  | $\delta^2_{\{0,1\}}$   | 01, 10, 02, 20, 03, 30, 12, 21, 13, 31 |             | 3   | 1   | {0, 1}   | {2}                   |       |       | {0, 1, 2, 3}                                                 |            |            |            | {0}    | $\sigma_1, \sigma_2$           | 3   | {0, 1}     | 2   |
| 46  | $\emptyset$            | 012                                    |             | 1   | 1   | {0}      |                       |       |       | {12}                                                         |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 4   | {0}        | 1   |
| 47  | $\emptyset$            | 012, 021                               |             | 1   | 1   | {0}      |                       |       |       | {12, 21}                                                     |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 10  | {0}        | 1   |
| 50  | $\emptyset$            | 012, 013                               |             | 1   | 1   | {0}      |                       |       |       | {12, 13}                                                     |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 5   | {0}        | 1   |
| 51  | $\emptyset$            | 012, 013, 102, 103                     | (2 0 1)     | 1   | 1   | {2, 3}   |                       |       |       | {01, 10}                                                     |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 10  | {0}        | 1   |
| 52  | $\emptyset$            | 012, 013, 021, 031                     |             | 1   | 1   | {0}      |                       |       |       | {12, 13, 21, 31}                                             |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 11  | {0}        | 1   |
| 64  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012                                    | (2 0 1)     | 2   | 1   | {2}      | {0, 1, 3}             |       |       | {01} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                             |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 16  | {2}        | 1   |
| 65  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 013                               | (2 0 1)     | 2   | 1   | {2, 3}   | {0, 1}                |       |       | {01} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                             |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 16  | {2, 3}     | 2   |
| 67  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 032                               | (2 0 1)     | 2   | 1   | {2}      | {0, 1, 3}             |       |       | {01, 03} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                         |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 17  | {2}        | 1   |
| 69  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 132                               | (2 0 1)     | 2   | 1   | {2}      | {0, 1, 3}             |       |       | {01, 13} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                         |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 18  | {2}        | 1   |
| 72  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 031, 032                          | (2 0 1)     | 3   | 1   | {2}      | {1}                   |       |       | {01, 03} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                         |            |            |            | {0}    | $\sigma_1$                     | 16  | {1, 2}     | 2   |
| 74  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 102, 013, 103                     | (2 0 1)     | 2   | 1   | {2}      | {0, 1, 3}             |       |       | {01, 03, 31} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                     |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 22  | {2}        | 1   |
| 76  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 130, 132                          | (2 0 1)     | 3   | 1   | {2}      | {0}                   |       |       | {01, 13} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                         |            |            |            | {0, 1} | $\sigma_1$                     | 16  | {1, 2}     | 2   |
| 77  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 013, 023, 123                     | (2 0 1)     | 3   | 1   | {3}      | {0}                   |       |       | {01, 02, 12} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                     |            |            |            | {0, 1} | $\sigma_1$                     | 16  | {1, 2}     | 2   |
| 79  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 102                               | (2 0 1)     | 2   | 1   | {2}      | {0, 1, 3}             |       |       | {01, 10} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                         |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 37  | {2}        | 1   |
| 80  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 102, 013, 103                     | (2 0 1)     | 2   | 1   | {2, 3}   | {0, 1}                |       |       | {01, 10} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                         |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 37  | {2, 3}     | 2   |
| 82  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 102, 032, 302                     | (2 0 1)     | 2   | 1   | {2}      | {0, 1, 3}             |       |       | {01, 10, 03, 30} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                 |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 38  | {2}        | 1   |
| 84  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 102, 031, 301, 032, 302           | (2 0 1)     | 3   | 1   | {2}      | {1}                   |       |       | {01, 10, 03, 30, 31, 13} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$         |            |            |            | {0, 1} | $\sigma_1$                     | 37  | {1, 2}     | 2   |
| 86  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 102, 032, 302, 312, 132           | (2 0 1)     | 2   | 1   | {2}      | {0, 1, 3}             |       |       | {01, 10, 02, 20, 12, 21} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$         |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 40  | {2}        | 1   |
| 88  | $\delta^3_{\{0,1\}}$   | 012, 102, 013, 103, 023, 203, 123, 213 | (2 0 1)     | 3   | 1   | {3}      | {2}                   |       |       | {01, 10} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                         |            |            |            | {0, 1} | $\sigma_1$                     | 37  | {1, 2}     | 2   |
| 94  | $\emptyset$            | 0123, 1023                             | (3 0 1 2)   | 1   | 1   | {3}      |                       |       |       | {123}                                                        |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 46  | {0}        | 1   |
| 95  | $\emptyset$            | 0123, 1023, 2013                       | (3 0 1 2)   | 1   | 1   | {3}      |                       |       |       | {012, 102}                                                   |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 47  | {0}        | 1   |
| 97  | $\emptyset$            | 0123, 0132, 1023, 1032                 | (3 0 1 2)   | 1   | 1   | {3}      |                       |       |       | {012, 120, 201}                                              |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 48  | {0}        | 1   |
| 99  | $\emptyset$            | 0123, 0132, 1023, 1032                 | (3 0 1 2)   | 1   | 1   | {3}      |                       |       |       | {23, 32}                                                     |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 10  | {0, 1, 10} | 10  |
| 101 | $\emptyset$            | 0123, 0132, 0213, 0231, 0312, 0321     | (3 0 1 2)   | 1   | 1   | {3}      |                       |       |       | {123, 132, 213, 231, 312, 321}                               |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 49  | {0}        | 1   |
| 116 | $\delta^4_{\{0,1,2\}}$ | 0123                                   | (3 0 1 2)   | 2   | 1   | {3}      | {0, 1, 2}             |       |       | {012} $\cup$ $\delta^3_{\{0,1,2\}}$                          |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 55  | {3}        | 1   |
| 117 | $\delta^4_{\{0,1,2\}}$ | 0123, 1023                             | (3 0 1 2)   | 2   | 1   | {3}      | {0, 1, 2}             |       |       | {012, 102} $\cup$ $\delta^3_{\{0,1,2\}}$                     |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 56  | {3}        | 1   |
| 118 | $\delta^4_{\{0,1,2\}}$ | 0123, 1203, 2013                       | (3 0 1 2)   | 2   | 1   | {3}      | {0, 1, 2}             |       |       | {012, 120, 201} $\cup$ $\delta^3_{\{0,1,2\}}$                |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 57  | {3}        | 1   |
| 119 | $\delta^4_{\{0,1,2\}}$ | 0123, 0213, 1023, 1203, 2013, 2103     | (3 0 1 2)   | 2   | 1   | {3}      | {0, 1, 2}             |       |       | {012, 120, 201, 021, 102, 210} $\cup$ $\delta^3_{\{0,1,2\}}$ |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 58  | {3}        | 1   |
| 120 | $\delta^4_{\{0,1,2\}}$ | 0123                                   | (3 0 1 2)   | 2   | 1   | {3}      | {0, 1, 2}             |       |       | {012} $\cup$ $\delta^3_{\{0,1,2\}}$                          |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 64  | {3}        | 1   |
| 121 | $\delta^4_{\{0,1,2\}}$ | 0123, 1023                             | (3 0 1 2)   | 2   | 1   | {3}      | {0, 1, 2}             |       |       | {012, 102} $\cup$ $\delta^3_{\{0,1,2\}}$                     |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 79  | {3}        | 1   |
| 122 | $\delta^4_{\{0,1,2\}}$ | 0123, 0132                             | (2 0) (3 1) | 2   | 2   | {23, 32} | $E_4^2 \setminus X_0$ |       |       | {01} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                             |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 16  | {23, 32}   | 10  |
| 124 | $\delta^4_{\{0,1,2\}}$ | 0123, 0132, 1023, 1032                 | (2 0) (3 1) | 2   | 2   | {23, 32} | $E_4^2 \setminus X_0$ |       |       | {01, 10} $\cup$ $\delta^2_{\{0,1\}}$                         |            |            |            | {0}    | $\sigma_0$                     | 37  | {23, 32}   | 10  |

Tabelle B.1: Relationen, auf die Satz 20 mit den angegebenen Parametern anwendbar ist

| Nr. | $\delta$                 | $\sigma$                           | $\sigma_1$    | Nr. | $\sigma_2$                   | Nr. |
|-----|--------------------------|------------------------------------|---------------|-----|------------------------------|-----|
| 59  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$   | 012, 013                           | 01            | 4   | 2, 3                         | 2   |
| 60  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$   | 012, 013, 102, 103                 | 01, 10        | 10  | 2, 3                         | 2   |
| 61  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$   | 012, 013, 021, 023                 | 0             | 1   | 12, 13, 21, 23               | 11  |
| 105 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123                               | 01            | 4   | 23                           | 4   |
| 106 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 1023                         | 01, 10        | 10  | 23                           | 4   |
| 108 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 1203, 2013                   | 012, 120, 201 | 48  | 3                            | 1   |
| 110 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 0132, 1023, 1032             | 01, 10        | 10  | 23, 32                       | 10  |
| 112 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 0132, 0213, 0231, 0312, 0321 | 0             | 1   | 123, 132, 213, 231, 312, 321 | 49  |

Tabelle B.2: Relationen, auf die Satz 21 mit den angegebenen Parametern anwendbar ist

| Nr. | $\delta$                 | $\sigma$                                       | $\alpha$ | $B$                |
|-----|--------------------------|------------------------------------------------|----------|--------------------|
| 10  | $\emptyset$              | 01, 10                                         | (01)     | (01)               |
| 11  | $\emptyset$              | 01, 10, 02, 20                                 | (01)     | (01)               |
| 12  | $\emptyset$              | 01, 10, 23, 32                                 | (01)     | (01)               |
| 13  | $\emptyset$              | 01, 10, 02, 20, 03, 30                         | (01)     | (01)               |
| 14  | $\emptyset$              | 01, 10, 12, 21, 23, 32                         | (01)     | (01)               |
| 15  | $\emptyset$              | 01, 10, 02, 20, 13, 31, 23, 32                 | (01)     | (01)               |
| 48  | $\emptyset$              | 012, 120, 201                                  | (012)    | (012)              |
| 49  | $\emptyset$              | 012( $S_3$ )                                   | (012)    | (012), (01)        |
| 53  | $\emptyset$              | 012, 120, 201, 013, 130, 301                   | (012)    | (012), (01)        |
| 54  | $\emptyset$              | 012( $S_3$ ), 013( $S_3$ )                     | (012)    | (012), (01)        |
| 62  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$   | 012, 120, 201, 013, 130, 301                   | (012)    | (012)              |
| 63  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$   | 012( $S_3$ ), 013( $S_3$ )                     | (012)    | (012), (01)        |
| 96  | $\emptyset$              | 0123, 1032                                     | (01)(23) | (01)(23)           |
| 98  | $\emptyset$              | 0123, 1230, 2301, 3012                         | (0123)   | (0123)             |
| 100 | $\emptyset$              | 0123, 1032, 3210, 2301                         | (01)(23) | (01)(23), (03)(12) |
| 102 | $\emptyset$              | 0123, 1230, 2301, 3012, 2103, 3210, 0321, 1032 | (0123)   | (0123), (02)       |
| 103 | $\emptyset$              | 0123( $A_4$ )                                  | (01)(23) | $A_4$              |
| 104 | $\emptyset$              | 0123( $S_4$ )                                  | (0123)   | $S_4$              |
| 107 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 1032                                     | (01)(23) | (01)(23)           |
| 109 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 1230, 2301, 3012                         | (0123)   | (0123)             |
| 111 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 1032, 3210, 2301                         | (01)(23) | (01)(23), (03)(12) |
| 113 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123, 1230, 2301, 3012, 2103, 3210, 0321, 1032 | (0123)   | (0123), (02)       |
| 114 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123( $A_4$ )                                  | (01)(23) | $A_4$              |
| 115 | $\delta_{\{0,1,2,3\}}^4$ | 0123( $S_4$ )                                  | (0123)   | $S_4$              |

Tabelle B.3: Relationen, auf die Satz 32 mit den angegebenen Parametern anwendbar ist

| Nr. | $\delta$               | $\sigma$               | $\sigma_1$                                  | $\sigma_2$     |
|-----|------------------------|------------------------|---------------------------------------------|----------------|
| 6   | $\emptyset$            | 01, 23                 | 01                                          | 23             |
| 16  | $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01                     | 01, 00, 11, 22                              | 33             |
| 17  | $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 02                 | 01, 02, 00, 11, 22                          | 33             |
| 18  | $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 12                 | 01, 12, 00, 11, 22                          | 33             |
| 19  | $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 23                 | 01, 00, 11                                  | 23, 22, 33     |
| 22  | $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 02, 12             | 01, 02, 12, 00, 11, 22                      | 33             |
| 37  | $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 10                 | 01, 10, 00, 11, 22                          | 33             |
| 38  | $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 10, 02, 20         | 01, 10, 02, 20, 00, 11, 22                  | 33             |
| 39  | $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 10, 23, 32         | 01, 10, 00, 11                              | 23, 32, 22, 33 |
| 40  | $\delta_{\{0,1\}}^2$   | 01, 10, 02, 20, 12, 21 | 01, 10, 02, 20, 12, 21, 00, 11, 22          | 33             |
| 55  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012                    | 012, 000, 111, 222                          | 333            |
| 56  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012, 021               | 012, 021, 000, 111, 222                     | 333            |
| 57  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012, 120, 201          | 012, 120, 201, 000, 111, 222                | 333            |
| 58  | $\delta_{\{0,1,2\}}^3$ | 012( $S_3$ )           | 012, 021, 102, 120, 201, 210, 000, 111, 222 | 333            |

Tabelle B.4: Relationen, auf die Satz 34 mit den angegebenen Parametern anwendbar ist

# Index

- $\square$ , 8
- ar, 23
- areflexiv, 9
- bewahren, 8
- Block, 37
- Blockfunktion, 37
- $C_\infty$ , 6
- $\mathfrak{C}_k^1$ , 12
- $\delta_\varepsilon^h$ , 9
- dom, 6
- $e_i^n$ , 6
- $\tilde{E}_k$ , 5
- $\tilde{E}_k$ , 5
- $\eta_m$ , 8
- $f'$ , 8
- $\Gamma_{\Phi_0}$ , 39
- $G_\sigma$ , 9
- $l_k^h$ , 9
- $J_k$ , 6
- kohärent, 10
- minimale Überdeckung, 13
- $\mathfrak{M}_{k,c}$ , 28
- $p\mathcal{M}_k$ , 12
- Modell, 10
- $M(\varrho)$ , 10
- $\mathcal{O}$ , 23–25
- $\omega$ , 8
- partielle Klasse, 7
- partieller Klon, 7
- $\overline{\Phi}$ , 38
- $P_k$ , 5
- $P_k^n$ , 5
- $\tilde{P}_k$ , 6
- $\tilde{P}_k^n$ , 5
- $pPOL_k$ , 8
- $pPol_k$ , 8
- quasi-diagonal, 9
- $\varrho_1$ , 9
- $\varrho_2$ , 9
- Relation
  - überflüssige, 24
  - benötigte, 24
- Relationenklasse, 21
- $R_k$ , 7
- $R_k^h$ , 7
- $\tilde{R}_k$ , 8
- $\tilde{R}_k^h$ , 8
- $\tilde{R}_{max}$ , 12
- Sheffer-Funktion, partielle, 7
- $\sigma^{(\pi)}$ , 9
- Zeilenblock, 38
- Zeilenblock-trennend, 40
- zentrierte Ordnungsrelation, 28

# Literaturverzeichnis

- [1] Post, E. L.: The two-valued iterative systems of mathematical logic. *Ann. Math. Studies* 5, Princeton Univ. Press (1941)
- [2] Rosenberg, I. G.: La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser A–B*, **260**, 3817–3819 (1965)
- [3] Freivald, R. V.: Completeness criteria for functions of the algebra of logic and many-valued logics, Englische Übersetzung in *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 167 **6**, 1249–1250 (1966)
- [4] Rousseau, G.: Completeness in finite algebras with a single operation. *Proc. Amer. Math. Soc.* **18**, 1009–1013 (1967)
- [5] Rosenberg, I. G.: Über die Verschiedenheit maximaler Klassen in den mehrwertigen Logiken. *Rozprawy Československe Akad. Ved. Řada Mat. Přírod. Věd* **80**, 3–93 (1970)
- [6] Lau, D.: Eigenschaften gewisser abgeschlossener Klassen in Postschen Algebren. Dissertation A, Universität Rostock (1977)
- [7] Pöschel, R.; Kalužnin, L. A.: Funktionen- und Relationenalgebren, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (1979)
- [8] Romov, B. A.: Maximal subalgebras of algebras of partial multivalued logic functions. (Russisch, Englisch). *Cybernetics* **16**, 31–41 (1980); Übersetzung von *Kibernetica* 1980, No. 1, 28–36 (1980)
- [9] Rosenberg, I. G.: Clones of boolean functions: a survey. *S. A. J. Philosophy*, 7, No. 2, 90–99 (1988)
- [10] Haddad, L.; Rosenberg, I. G.: Maximal partial clones determined by the areflexive relations. *Discrete Appl. Math.* **24**, No. 1–3, 133–143 (1989)
- [11] Börner, F.; Pöschel, R.: Partial clones. Beiträge der Jahrestagung “Algebra und Grenzgebiete”. Preprint-Reihe der PH Güstrow (1990)
- [12] Haddad, L.; Rosenberg, I. G.: Partial Sheffer Operations. *Europ. J. Combinatorics* **12**, 9–21 (1991)
- [13] Haddad, L.; Rosenberg, I. G.: Completeness theory of finite partial algebras. *Algebra Universalis* **29**, 378–401 (1992)

- 
- [14] Börner, F.: Clones of partial functions. In: Denecke, K. et al., General algebra and applications in discrete mathematics. Proceedings of the conference on general algebra and discrete mathematics, Potsdam 1996. Aachen: Shaker Verlag. Berichte aus der Mathematik. 35–52 (1997)
- [15] Haddad, L.; Simons, G. E.: Maximal partial clones of 4-valued logic. Mult.-Valued Log. **8**, No. 4, 531–562 (2002)
- [16] Lau, D.: Function Algebras on Finite Sets, Springer Verlag Berlin Heidelberg (2006)
- [17] Haddad, L.; Lau, D.: Some criteria for partial Sheffer functions in  $k$ -valued logic. Mult.-Valued Log. **13**, No. 4–6, 415–446 (2007)