

Ein Kriterium für partielle Sheffer-Funktionen in 4-wertiger Logik

Karsten Schölzel

Universität Rostock
Betreuer: Prof. Dr. Dietlinde Lau

2008-09-16

Gliederung

- 1 **Einleitung**
 - Definitionen
- 2 **Ergebnisse**
- 3 **Methoden**
- 4 **Beispiele**

Ziel

- Kriterium für partielle Sheffer-Funktionen in 4-wertiger Logik durch die Bestimmung einer minimalen Überdeckung der maximalen partiellen Klone, die durch Haddad und Rosenberg im allgemeinen und für $k = 4$ durch Haddad und Simons angegeben wurden
- Zeigen, dass diese minimale Überdeckung eindeutig ist

Einige Mengen

$$E_k := \{0, 1, \dots, k-1\}$$

$$\tilde{E}_k := E_k \cup \{\infty\}$$

$$P_k := \left\{ f \mid f^{(n)} : E_k^n \rightarrow E_k, n \geq 0 \right\}$$

$$\tilde{P}_k := \left\{ f \mid f^{(n)} : E_k^n \rightarrow \tilde{E}_k, n \geq 0 \right\}$$

Mal'tsev-Operationen

Wir betrachten die Algebra $(\tilde{P}_k; e_1^2, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, \star)$ mit

$$e_i^n(x_1, \dots, x_n) := x_i$$

$$(\zeta f)(x_1, \dots, x_n) := f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$$

$$(\tau f)(x_1, \dots, x_n) := f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$$

$$(\Delta f)(x_1, \dots, x_{n-1}) := f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad \text{für } n \geq 2$$

$$\zeta f = \tau f = \Delta f := f \quad \text{für } n = 1$$

$$(\nabla f)(x_1, \dots, x_{n+1}) := f(x_2, \dots, x_{n+1})$$

$$(f \star g)(x_1, \dots, x_{m+n-1}) := \begin{cases} f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}) \\ \quad \text{für } g(x_1, \dots, x_m) \in E_k \\ \infty \quad \text{sonst} \end{cases}$$

für Funktionen $f^{(n)}, g^{(m)} \in \tilde{P}_k$.

Eine Menge A mit $A = [A] := [A]_{e_1^2, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, \star}$ heißt partieller Klon.

Sheffer-Funktion

Definition

Eine (partielle) Funktion f heißt Sheffer-Funktion, falls

$$\tilde{P}_k = [\{f\}]$$

gilt.

Maximaler partieller Klon

Ein Klon A heißt maximal, falls

$$\nexists A' \subset \tilde{P}_k : A \subset A' = [A'] \subset \tilde{P}_k$$

gilt.

Sei $p.\mathcal{M}_k$ die Menge aller maximalen partiellen Klone.

Wegen

$$\forall A \subset \tilde{P}_k, A = [A] \exists M_A \in p.\mathcal{M}_k : A \subset M_A$$

gilt

$$f \text{ Sheffer} \iff \forall X \in p.\mathcal{M}_k : f \notin X.$$

Bewahren von Relationen

Eine (partielle) Funktion $f^{(n)} \in \tilde{P}_k$ *bewahrt* die Relation $\varrho^{(h)}$, falls für alle $\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^n \in \varrho$ mit $\mathbf{r}^i = (r_{1i}, \dots, r_{hi})^T$ gilt:

$$f(\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^n) := \begin{pmatrix} f(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n}) \\ f(r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n}) \\ \vdots \\ f(r_{h1}, r_{h2}, \dots, r_{hn}) \end{pmatrix} \in \varrho.$$

Kurz: $f \in pPol_k \varrho$.

Für $\varrho \subseteq E_k^h$ sei

$$pPOL_k \varrho := pPol_k \left(\varrho \cup \left(\tilde{E}_k^h \setminus E_k^h \right) \right).$$

Satz von Haddad-Rosenberg [Haddad, Rosenberg, 1989, 1992]

Falls C ein maximaler partieller Klon von \tilde{P}_k ist, d.h. $C \in p\mathcal{M}_k$, dann gilt

$$C = P_k \cup [\{c_\infty\}] = P_k \cup \left\{ f \in \tilde{P}_k \mid \text{dom}(f) = \emptyset \right\}$$

oder

$$C = pPOL_k \varrho$$

mit einer kohärenten Relation ϱ .

Satz von Haddad-Rosenberg [Haddad, Rosenberg, 1989, 1992]

Die Definition *kohärenter Relationen* ist komplex, daher nur ein paar Beispiele: nicht-triviale

- unäre Relationen,
- total symmetrische, total reflexive Relationen,
- partielle Ordnungen,
- Äquivalenzrelationen.

Eine kohärente Relation ist höchstens $\max(k, 4)$ -stellig.

Anzahl maximaler (partieller) Klone

k	$ \mathcal{M}_k $	$ p\mathcal{M}_k $	
2	5	8	[Freivald 1966]
3	18	58	[Lau 1977], [Romov 1980]
4	82	1 102	
5	643	> 16 487	
6	15 182	?	
7	7 848 984	?	
8	549 758 283 980	?	

Haddad und Simons bestimmten 2002 die maximalen partiellen Klone für $k = 4$ und gaben $|p\mathcal{M}_4| = 1\,215$ an. Leider verzählten sie sich, so dass eine vollständige Liste angegeben und $|p\mathcal{M}_4|$ neu bestimmt wurde.

Minimale Überdeckung

Definition

Eine Menge $\mathcal{X} \subset \mathcal{p}\mathcal{M}_k$ ist eine minimale Überdeckung von $\mathcal{p}\mathcal{M}_k$, falls

$$\forall f \in \tilde{\mathcal{P}}_k : ([\{f\}] = \tilde{\mathcal{P}}_k \iff \forall A \in \mathcal{X} : f \notin A) \quad (1)$$

$$\forall A \in \mathcal{X} \exists f \in A \forall B \in \mathcal{X} \setminus \{A\} : f \notin B \quad (2)$$

gilt.

Die minimale Überdeckung für $k = 4$

Satz

Es gibt genau eine minimale Überdeckung von \mathcal{PM}_4 und diese besitzt 449 Elemente.

k	$ \mathcal{PM}_k $	$ \mathcal{X} $	
2	8	4	[Haddad, Rosenberg, 1991]
3	58	26	[Haddad, Lau, 2006]
4	1 102	449	

Blockfunktionen

Um zu zeigen, dass ein maximaler partieller Klon X in jeder minimalen Überdeckung von $p\mathcal{M}_k$ ist, müssen wir eine h -stellige Funktion $f \in X$ mit

$$\forall Y \in p\mathcal{M}_k \setminus \{X\} : f \notin Y$$

konstruieren.

- falls h groß ist, ist der Beweis der Bedingung einfach, aber schwierig aufzuschreiben
- f kann auf einfach zu beschreibenden Tupeln definiert werden

\implies abkürzende Schreibweise *Blockfunktionen*

“Normale” Funktion

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$f(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1
0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	1
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1
2	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	0	2	2	2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	2
2	2	2	2	2	2	2	2	0	2	3
3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	0

Blockfunktion

Kurzschreibweise durch

$$\Phi_0(x) := x + 2 \pmod{4}$$

und

X	Y	Z	$\Phi(X, Y, Z)$
0	0 2	0	1
0	2 0	0	0 1 0
2	0 2	2	1 2 0
0	2 0	0	1
1	3 1	1	2
2	0 2	2	3
3	1 3	3	0

Blockfunktion für $pPOL_k \iota_k^3$

$$\iota_k^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in E_k^3 \mid |\{x_1, x_2, x_3\}| \leq 2\}$$

$$\Phi_0(x) := x + 1 \bmod k$$

$$\gamma_0(v) := (v \ v \ v \ v \ v \ v)$$

$$\gamma_1(v) := (v \ v \ v \ \Phi_0(v) \ \Phi_0(v) \ \Phi_0(v))$$

$$\gamma_2(v) := (v \ \Phi_0(v) \ \Phi_0^2(v) \ v \ \Phi_0(v) \ \Phi_0^2(v))$$

	X	Y	Z	$\Phi(X, Y, Z)$
$\forall 1 \leq \mu \leq k \ \forall v \in E_k^\mu \setminus \iota_k^\mu$	$\gamma_1(v)$	$\gamma_2(v)$	$\gamma_0(v)$	E_k^μ
$\forall 4 \leq \mu \leq k$	$\gamma_1(\mathbf{0})$	$\gamma_2(\iota_k^\mu)$	$\gamma_0(\mathbf{0})$	E_k^μ
	$\gamma_1(\mathbf{0})$	$\gamma_2(\varrho_2)$	$\gamma_0(\mathbf{0})$	$(0, 0, 0, 1)^T$

Die ausgeschriebene Funktion hat für $k \geq 4$ mehr als k^{2k} Stellen. Für $k = 4$ hat die Funktion 395 592 Stellen und ist auf 3 032 Tupeln definiert.

Maximale Klone in keiner minimalen Überdeckung von $p\mathcal{M}_k$

Satz

Sei ϱ eine binäre kohärente symmetrische und reflexive Relation und sei der Graph

$$\overline{G} := \overline{G}(\varrho) := (E_k, \{xy \mid (x, y) \in \varrho, x \neq y\})$$

ein Baum. Dann gilt

$$\forall f \in pPOL_{k\varrho} \exists C \subset E_k, C \neq \emptyset : f \in pPOL_k C. \quad (3)$$

Damit liegt der maximale Klon $pPOL_{k\varrho}$ in keiner minimalen Überdeckung von $p\mathcal{M}_k$.

Eine binäre Sheffer-Funktion für $k \geq 3$

Lemma

Die Funktion f_k mit

$$f_k(x, y) := \begin{cases} x + 1 \bmod k & \text{für } x = y, \\ x + 2 \bmod k & \text{für } x \neq 0 \text{ und } y = 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } y \neq 0, \\ 0 & \text{für } x \neq k - 1 \text{ und } y = x + 1, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine partielle Sheffer-Funktion für k mit $k \geq 3$.

Offene Fragen

- allgemeiner Fall eines Sheffer-Kriteriums für $k \geq 3$
- eine Formel für die Anzahl maximaler partieller Klone zu gegebenem k
- Bestimmung von Erzeugendensystemen (oder die Größe dieser) für die maximalen partiellen Klone
- ...

Ende

Danke für die Aufmerksamkeit.