Ein Kompetenzebenenmodell für Kenntnisse zu geometrischen Körpern

von

Hans-Dieter Sill, Rostock

Zusammenfassung: Ausgehend von kritischen Bemerkungen zur aktuellen Situation der Leistungsmessungen im Mathematikunterricht in Deutschland werden als Grundlage der Entwicklung kriteriumsorientiert normierter Messverfahren die Grundzüge eines neuen Kompetenzebenenmodels vorgestellt. Es eröffnet neben dem bisher in Kompetenzmodellen verwendeten sozialnormorientierten Fähigkeitsniveau als eine weitere Dimension den Grad der Verfügbarkeit. Es werden drei Ebenen der Verfügbarkeit unterschieden, die durch Substrukturen der betreffenden psychischen Dispositionen modelliert werden können. Am Beispiel von ausgewählten Kenntnissen zu geometrischen Körpern werden die notwendigen Analysen zur Bestimmung der Anforderungen auf den einzelnen Ebenen und die Konsequenzen für die Messverfahren in Ansätzen skizziert.

1 Vorbemerkungen

Die erhebliche Zunahme der Anzahl und des Umfangs empirischer Untersuchungen zu Leistungserhebungen seit Mitte der 90er Jahre wird von Bildungsforschern als „empirische Wende“ bezeichnet (KOHLER, SCHRADER 2004). Da sich seit Anfang der 80er Jahre in der mathematikdidaktischen Forschung der damaligen BRD eine bewusste Abkehr von Massenerhebungen hin zu qualitativen empirischen Forschungen wie interpretativen Fallstudien vollzog, was VOIGT (1996) als „Alltagswende“ bezeichnet, traf die erneute Wende die Mehrzahl der Mathematikdidaktiker relativ unvorbereitet. Es gab in den 80er Jahren nur vereinzelte Arbeiten zu größeren empirischen Erhebungen, von denen vor allem die Vergleichsuntersuchungen zum deutschen und englischen Mathematikunterricht (BLUM u. a. 1994) zu nennen sind. Aber selbst die dabei entwickelten Testverfahren genügen nach KAISER (1997) nur bedingt den Standards quantitativ-statistischer Forschung. Die vorhandenen Erfahrungen mit Massenuntersuchungen in der mathematikdidaktischen Forschung in der DDR wurden nach 1990 aus verschiedenen Gründen nicht genutzt. So ist es nicht verwunderlich, dass die bisherigen Forschungsprojekte zu Leistungserhebungen im Mathematikunterricht (wie LAU, QuaSUM, MARKUS, VERA, u. a.) fast ausschließlich durch Vertreter der empirischen Pädagogik und Bildungsforschung konzipiert und durchgeführt wurden.

Michael Neubrand gehört bisher zu den wenigen Didaktikern in Deutschland, die sich dieser neuen Aufgabe stellten und wesentlichen Anteil an den für den Mathematikunterricht entwickelten theoretischen Grundlagen und konkreten Testarbeiten vor allem für die internationalen Erhebungen haben, wie aus den im Schriftenverzeichnis aufgeführten Arbeiten seit 1998 eindrucksvoll hervorgeht.

Nach Veröffentlichung der PISA-Ergebnisse im Jahre 2001 werden in Deutschland erhebliche Anstrengungen unternommen, um die Unterrichtsergebnisse zu verbessern. Im Zentrum der Bemühungen steht dabei die massive Verstärkung von Evaluationsmaßnahmen. Nach einer im Juni 2006 von der KMK beschlossenen Gesamtstrategie sollen auf der Grundlage der Bildungsstandards jährliche Vergleichsarbeiten in Verantwortung der Bundesländer und auch zentrale Überprüfungen mit dem Ziel eines Ländervergleichs in den Klassenstufen 3, 8 und 9 in regelmäßigen Abständen durchgeführt werden.

Im Ergebnis einer Analyse der aktuellen Bildungsstandards für den Mathematikunterricht (SILL 2006) sowie der gegenwärtigen Leistungserhebungen im Mathematikunterricht in Deutschland (SILL, SIKORA, 2007) halte ich die gegenwärtigen Entwicklungen für sehr bedenklich. Ich habe die Befürchtung, dass durch diesen Trend zur systematischen zentralen Evaluation der Mathematikunterricht und die involvierte Didaktik Schaden nehmen werden. In SILL, SIKORA 2007 haben wir ein umfassendes Konzept für einen sinnvollen Einsatz von Leistungserhebungen zur Qualitätsentwicklung im Mathematikunterricht unterbreitet. Ein wesentlicher Teil dieses Konzeptes, ist die Entwicklung von kriteriumsorientiert normierten Leistungserhebungen. Sie basieren auf einem neuen Kompetenzmodell, das sich in wesentlichen Punkten von den gegenwärtigen Auffassungen zu Kompetenzmodellen mathematischer Bildung unterscheidet. Das impliziert nicht, dass wir diese Theorien für „falsch“ halten; das entscheidende Kriterium für den Wert einer didaktischen Theorie ist der Grad ihrer Konstruktivität bei der zweckgerichteten Lösung von Problemen des Mathematikunterrichts.

2 Grundzüge eines Kompetenzebenenmodells

Bei der Entwicklung psychodiagnostischer Testverfahren ist das Verhältnis von sozialnormorientierter und kriteriumsorientierter Normierung des Verfahrens, also die Frage, ob die Normierung des Verfahrens auf der Basis der aktuellen Verhältnisse in einer sozialen Gruppe oder gemessen an einem äußeren Kriteriums erfolgt, ein wesentliches Merkmal. In der psychologischen Diagnostik ist die sozialnormorientierte Vorgehensweise das übliche Verfahren. Fast alle standardisierten diagnostischen Verfahren basieren auf dieser Methode. Die in den 70er Jahren entwickelten Konzepte einer kriteriumsorientierten Messung (KLAUER 1987), die im Rahmen der damaligen lehr- und lernzielorientierten Curriculumsreformen eingesetzt wurden, sind mit dem Scheitern dieser Reformen nicht mehr weiter verfolgt worden. Bei den internationalen Leistungserhebungen TIMSS und PISA und den aktuellen nationalen Erhebungen liegen den verwendeten Testverfahren und Kompetenzstufenmodellen ebenfalls meist sozialnormorientierte Betrachtungen zu

Grunde, wenn auch versucht wurde, die empirisch ermittelten Kompetenzstufen durch inhaltliche Beschreibungen zu charakterisieren (NEUBRAND et al. 2002).

Die Grundlage für diese Herangehensweise der Psychologen ist das Paradigma der psychologischen Testtheorie, das Verhalten von Personen in bestimmten Situationen zu beobachten (ROST 2004). Dies führte bei der Messung von Schulleistungen im Fach Mathematik jedoch zu einigen grundsätzlichen Schwierigkeiten. Das Verhalten eines Schülers beim Lösen einer mathematischen Aufgabe ist in der Regel Resultat einer großen Zahl von einzelnen mathematischen Kenntnissen, Fähigkeiten, Fertigkeiten und Verhaltenseigenschaften, sodass aus der richtigen oder falschen Lösung dieser Aufgabe nur sehr unscharfe Schlüsse auf die beim Schüler vorhandenen kognitiven und affektiven Dispositionen gezogen werden können. Das momentane Verhalten eines Schülers ist zudem in hohem Maße vom vorherigen Unterricht abhängig und ändert sich meist im Verlaufe des weiteren Unterrichts, sodass der aktuelle Zustand nur bei genauer Kenntnis des bisherigen Unterrichts bewertet werden kann und diese Einschätzung auch nur eine kurze Bestandszeit hat. Eine Leistungserhebung im Unterricht ist weiterhin für einen Lehrer[1] immer mit der Frage verbunden, in welchem Maße die Leistungen der Schüler den von außen gesetzten Anforderungen in Form von Plänen bzw. Abschlussprüfungen entsprechen, sodass eine sozialnormorientierte Normierung einen geringen Wert für die schulische Praxis hat.

Bei der Entwicklung unseres Kompetenzebenenmodells, das Grundlage für eine kriteriumsorientierte Normierung sein soll, gehen wir wie auch bei den PISA-Testverfahren (z. B. NEUBRAND 2002) von einer Unterscheidung der Begriffe Anforderungsniveau und Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe aus. Zur Untersuchung des Anforderungsniveaus betrachten wir die einzelnen Lösungsschritte, die möglichen Lösungswegen sowie die möglichen auch fehlerhaften Gedankengänge eines Schülers. Ausgehend von Ergebnissen der Fehlerforschung entwickelte SIKORA (SILL, SIKORA 2007) dazu ein allgemeines Modell zur Analyse der Anforderungen von Aufgaben. Im Unterschied zum Vorgehen im deutschen PISA-Konsortium (NEUBRAND 2004) führen unsere Analysen nicht zu allgemeinen inhaltsunabhängigen Konstrukten wie sie im PISA-Framework enthalten sind. Diese Unterschiede ergeben sich aus der Zielstellung der Testverfahren. Während mit PISA der gesamte Mathematikunterricht zusammenfassend bewertet werden soll, denken wir an Verfahren für die alltägliche Arbeit eines Lehrers, die immer an konkrete Inhalte und Entwicklungsstufen seiner Schüler gebunden sind.

Ein weiterer Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist die Berücksichtigung von Qualitätsparametern psychischer Dispositionen. Psychische Dispositionen werden im Gehirn als räumlich-zeitliche Aktivitätsmuster neuronaler Netze repräsentiert, die durch Langzeitpotenzierung entstehen. Ein wichtiger Parameter einer Disposi-

---

[1] Gemeint sind bei Personenbezeichnungen stets beide Geschlechter.

tion ist ihre Verfestigung bzw. Verfügbarkeit. Wir unterscheiden zwischen Gedächtnisinhalten eines Schülers, über die er in der Regel jederzeit verfügen kann und solchen, die ihm nicht unmittelbar bewusst sind, die aber durch eine Reaktivierung im semantischen bzw. episodischen Gedächtnis bis zu einem gewissen Grad wieder in Erinnerung gerufen werden können.

Ein weiterer Ansatzpunkt unserer Betrachtungen ist die Gewichtung der Ziele des Mathematikunterrichts als der intendierten psychischen Dispositionen. Eine solche Gewichtung ergibt sich aus der Bedeutung des jeweiligen Ziels für den weiteren Unterricht auch in anderen Fächern, den Anforderungen in der weiteren Ausbildung, den konkreten Anforderungen im Beruf und Alltag von Bürgern, sowie den Anforderungen an die mathematische Allgemeinbildung eines Bürgers.

Ausgehend von den kurz skizzierten Grundlagen unterscheiden wir drei Kompetenzebenen, die jeweils durch einen bestimmten Grad der Ausprägung von Qualitätsparametern der psychischen Dispositionen charakterisiert sind, wobei wir insbesondere den Grad und die Ausprägung ihrer Verfügbarkeit erfassen wollen. Diese drei Kompetenzebenen können in folgender Weise bezeichnet und charakterisiert werden (SILL, SIKORA 2007, S. 132).

- *Ebene der sicheren Verfügbarkeit:* Die Schülerinnen und Schüler verfügen über die Dispositionen jederzeit ohne eine spezielle Reaktivierung. Die Dispositionen werden als *sicheres Wissen und Können* bezeichnet.
- *Ebene der reaktivierbaren Verfügbarkeit*: Die Schülerinnen und Schüler verfügen über die Dispositionen am Ende eines Stoffgebiets. Nach einem gewissen Zeitraum ist jedoch eine Wiederholung und Reaktivierung des Wissens und Könnens erforderlich, bei der der schon einmal vorhandene Beherrschungsgrad wieder erreichbar ist.
- *Ebene der exemplarischen Verfügbarkeit:* Die Schülerinnen und Schüler haben erste Einsichten, Vorstellungen bzw. Fähigkeiten hinsichtlich des betreffenden Inhalts des Unterrichts. Sie können z B. einfache Beispiele angeben, einige wichtige Merkmale oder Gedanken zu einer Vorgehensweise äußern und sich an entsprechende Episoden erinnern.

Die einzelnen Kompetenzebenen können mit bestimmten Substrukturen einer psychischen Disposition in einem Kompetenzbereich verbunden werden. Die Abbildung auf der nächsten Seite soll dies veranschaulichen.

Auf allen Kompetenzebenen soll ein Schüler Aufgaben mit unterschiedlichem Anforderungsniveau bearbeiten können, wobei der Anteil der anspruchsvollen Aufgaben von der Ebene der sicheren Verfügbarkeit zur Ebene der exemplarischen Verfügbarkeit zunimmt, d. h. unser Ansatz unterscheidet sich von den Bestrebungen, mit einem „Grundwissen“ bzw. einer Kompetenzstufe I nur sehr einfache Anforderungen zu erfassen.

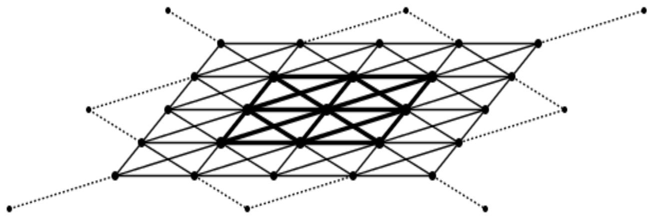
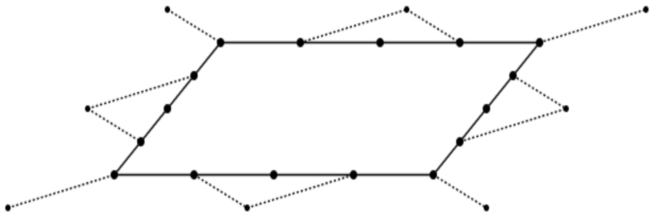
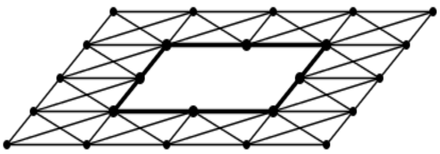
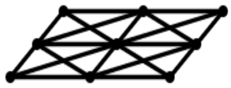
Gesamtstruktur der psychischen Dispositionen im Kompetenzbereich	
Substruktur der exemplarischen Verfügbarkeit	
Substruktur der reaktivierbaren Verfügbarkeit	
Substruktur der sicheren Verfügbarkeit	

Abb. 1 Strukturen psychischer Dispositionen in einem Kompetenzbereich

Mit den Kompetenzebenen wird neben dem sozialnormorientierten Anspruchsniveau, das Grundlage für die aktuellen Kompetenzstufenmodelle ist, eine weitere Dimension eröffnet. Das Itemuniversum für die einzelnen Kompetenzebenen sollte im Ergebnis von Untersuchungen zum Wechselverhältnis von schulischen Möglichkeiten und gesellschaftlichen Anforderungen an die Schulabsolventen normativ bestimmt werden, womit eine kontentvalide Grundlage für Messverfahren vorhanden ist. Dies kann nur in einem Kreisprozess einer stufenweisen Entwicklung von Normen und Testaufgaben entstehen, wie ihn HELMKE, HOSENFELD 2004 vorgeschlagen haben. Ausgehend von den Vorschlägen von KLAUER (1987) plädieren wir dafür, die Lösungswahrscheinlichkeiten auf den einzelnen Ebenen normativ festzusetzen. Wir gehen aktuell von einer Lösungswahrscheinlichkeit von 80 % in der Ebene der sicheren Verfügbarkeit und 60 % in der Ebene der reaktivierbaren Verfügbarkeit aus. Bei Erhebungen zur Ebene der exemplarischen Verfügbarkeit sollten keine Erfüllungsprozente festgelegt werden.

Mit der verbindlichen Festlegung eines sicheren Wissens und Könnens für die Substruktur der sicheren Verfügbarkeit verbinden wir die Idee der Entwicklung von Mindeststandards (SILL 2006), deren Entwicklung bereits in zahlreichen Projekten von Lehrern unter der Bezeichnung Grundwissen in Angriff genommen wurde und nun auch von Didaktikern thematisiert wird (NEUBRAND 2007).

Verfahren zur Kompetenzmessung auf den verschiedenen Ebenen müssen die Besonderheiten der zu erfassenden Leistungsdispositionen berücksichtigen. Bei Messungen auf der Ebene der reaktivierbaren Verfügbarkeit müssen die Schüler z. B. die Möglichkeit erhalten, vor der Beantwortung der Fragen in einer vorgegebenen Zeit den zu überprüfenden Kompetenzbereich reaktivieren zu können.

Weiterhin ist die Hierarchie der Ebenen zu beachten, die unteren Ebenen sind jeweils in den darüber liegenden enthalten. Dies bedeutet für die Kompetenzmessung, dass die Ergebnisse von Testverfahren auf den oberen Ebenen nur auf der Grundlage der Ergebnisse von Test auf darunter liegenden Ebenen umfassend interpretiert werden können.

Die Lernprozesse auf den Kompetenzebenen sind mit spezifischen Unterrichtsformen und -methoden verbunden. Die Aneignung eines sicheren Wissens und Könnens in der Substruktur der sicheren Verfügbarkeit erfordert eine permanente Wiederholung und Festigung etwa in Form täglicher Übungen und ein so genanntes Überlernen. Die Ausbildung der Substruktur der exemplarischen Verfügbarkeit sollte vor allem durch exemplarisches Lernen erfolgen, bei dem durch eine erlebnisorientierte Unterrichtsgestaltung Spuren im episodischen Gedächtnis verbleiben.

In Arbeitsgruppen mit Realschullehrerinnen haben wir erste Untersuchungen zur Bestimmung eines sicheren Wissens und Könnens beim Arbeiten mit Größen, in der ebenen sowie in der räumlichen Geometrie angestellt und jeweils ein Itemuniversum entwickelt, aus dem auch die Aufgabenbeispiele in diesem Beitrag stammen. In Zusammenarbeit mit einer Gruppe von Gymnasiallehrerinnen wenden wir gegenwärtig das Kompetenzebenenmodell zur Präzisierung des Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe an. In allen Fällen fand unser generelles Vorgehen die Zustimmung der Lehrerinnen und führte zur konstruktiven Lösung zahlreicher Probleme. Die Ergebnisse der Projekte sind auf einer Internetplattform zum Mathematikunterricht in Mecklenburg-Vorpommern (www.mathe-mv.de) zu finden.

3 Anwendung des Kompetenzebenenmodells auf Kenntnisse zu geometrischen Körpern

3.1 Theoretische Ausgangspositionen

Mit dem Konstrukt „Kenntnisse" sollen psychische Dispositionen zu Begriffen und Zusammenhängen erfasst werden. Kenntnisse werden stets durch Sprache vermittelt und durch Sprache zum Ausdruck gebracht. Zentraler Bestandteil der Sprache sind Wörter. Wörter haben bestimmte Bedeutungen. Verschiedene Wörter können die gleiche Bedeutung haben, die meisten Wörter haben mehrere Bedeutungen. Die verschiedenen Bedeutungen haben oft gemeinsame Bestandteile (Seme).

Begriffe existieren zum einen als Bestandteile von Theorien und werden in diesem Zusammenhang meist mit expliziten oder impliziten Definitionen und Erklärungen gleichgesetzt. Als psychische Dispositionen sind Begriffe Gesamtheiten von Gedanken über Unterscheidungsmerkmale von Objekten. Zur Beschreibung der Speicherung von Begriffen im Gedächtnis kann das Modell des semantischen Netzes (KLIX 1984) verwendet werden, das aus Knoten (Sinneinheiten) und Kanten (Wegstrecken bei Gedächtnisleistungen) besteht. Die Aneignung neuer Kenntnisse bedeutet dann ihre Integration in vorhandene Netze, es werden neue Sinneinheiten sowie Kanten zu vorhandenen Sinneinheiten ausgebildet. Untersuchungen zu Begriffen als auszubildende Gedächtnisinhalte erfordern deshalb u. a. semantische Analysen zu gemeinsamen Semen der verschiedenen Bedeutungen. Für den Begriff Winkel hat KRAINER 1990 eine umfassende Analyse der begrifflichen Beziehungen und ihrer Entwicklung im Kopf von Schülern vorgenommen.

Die Aneignung von Begriffen im Mathematikunterricht ist wesentlich durch das Wechselverhältnis von formalen und inhaltlichen Bedeutungen determiniert. In Bezug auf die Körperbegriffe geht es um das Verhältnis zwischen der Form eines konkreten Objektes und seiner Beschreibung mit Hilfe von Bezeichnungen und Merkmalen. So bezeichnet das Wort Würfel sowohl eine bestimmter Körper in der Mathematik als auch eine bestimmte Form von realen Körpern. Eine Vermittlung zwischen den konkreten Objekten und den abstrakten Begriffen erfolgt mit Hilfe materieller Modelle der Begriffe, die als Unterrichtsmittel verwendet werden. Ein Körpermodell ist einerseits ein konkretes Objekt und andererseits eine Abstraktion der Form von Objekten, die in der Praxis vorkommen.

Es sollten drei Stufen der Entwicklung der Körperbegriffe konzipiert werden, die sich in der Dominanz der Seiten des Grundverhältnisses unterscheiden. In den Klassen 1 bis 4 dominiert die Untersuchung realer Objekte, in den Klassen 5 bis 8 steht die Systematisierung der Bezeichnungen und Merkmale im Mittelpunkt und anschließend sollten wieder die Analyse vielfältige Formen realer Objekte den Kern der geistigen Tätigkeiten bilden.

3.2. Zur Bestimmung eines sicheren Wissens und Könnens zu Körpern

Zur Bestimmung eines sicheren Wissens und Könnens auf der Ebene der sicheren Verfügbarkeit haben wir in der erwähnten Arbeitsgruppe Überlegungen in drei Richtungen angestellt, die im Folgenden an je einem Beispiel demonstriert werden sollen.

Es sind zum einen *semantisch begriffliche Analysen* der mit den Körperbegriffen verbundenen Wörter erforderlich, die für das Wort „Körper" zu folgenden Ergebnissen führten. Körper hat in der Mathematik drei verschiedene Bedeutungen.

M1: Ein Körper bezeichnet in der Algebra eine bestimmte Struktur, bei der in einer Menge zwei Operationen mit gewissen Eigenschaften erklärt sind.

M2: In der Geometrie bezeichnet das Wort Körper eine beschränkte dreidimensionale Punktmenge, die allseitig von endlich vielen ebenen oder gekrümmten Flächenstücken begrenzt wird.

M3: Im Mathematikunterricht werden als Körper auch bestimmte Unterrichtsmittel bezeichnet, die zur Veranschaulichung geometrischer Körper dienen und auch Körpermodelle heißen.

In anderen Wissenschaften bzw. in der Umgangssprache gibt es folgende weitere Bedeutungen des Wortes „Körper", die Gemeinsamkeiten mit dem mathematischen Begriff in den Bedeutungen M2 bzw. M3 haben.

B1: In der Physik werden als Körper Objekte bezeichnet, die ein bestimmtes Volumen, eine bestimmte Masse sowie einen bestimmten Aggregatzustand haben und aus bestimmten Stoffen bestehen.

B2: In der Biologie bezeichnet das Wort Körper die Gestalt, die äußere Erscheinung bzw. den Organismus eines Menschen oder Tieres.

B3: Mit Körper bezeichnet man auch den Rumpf als Teil eines menschlichen oder tierischen Körpers (Körpertreffer beim Boxen).

Der physikalische Körperbegriff (B1) und der biologische Körperbegriff (B2) haben mit dem mathematischen Begriff in den Bedeutungen M2 und M3 die Existenz einer Oberfläche und eines Volumens gemeinsam. Während es in der Biologie und der Physik um die so bezeichneten Objekte und eine Vielzahl ihrer Eigenschaften geht, stellt der mathematische Begriff ein Denkmodell dar, mit dem die Form realer physikalischer (meist fester) Körper beschrieben werden kann.

Solche semantischen Analysen haben wir auch zu den Wörtern Figur, Ecke, Spitze, Kante, Fläche, Begrenzungsfläche, Oberfläche, Grundfläche, Deckfläche, Seite, Seitenfläche, Mantelfläche, Grundkante, Seitenkante, Länge, Breite, Tiefe, Höhe, Quader, Würfel, Zylinder, Prisma, Kegel, Pyramide und Kugel angestellt, deren Ergebnisse auf der erwähnten Internetplattform enthalten sind.

Weiterhin sind Untersuchungen zur *Relevanz der Kenntnisse* für das weitere Lernen an der Schule, in der anschließenden Ausbildung sowie im täglichen Leben erforderlich, die wir nur in Ansätzen bewältigen konnten. Beim Begriff Prisma führten diese Überlegungen zu folgenden Resultaten.

Das Wort Prisma wird außerhalb des Mathematikunterrichts zur Beschreibung der Form eines Körpers sehr selten verwendet. Selbst Studenten eines Lehramtes für das Fach Mathematik kennen das Wort meistens kaum. Bei der physikalischen Bedeutung des Wortes Prisma geht es nicht um die Form sondern um die physikalischen Eigenschaften des Objektes. Im Alltag treten allerdings sehr viele Objekte auf, die die Form eines Prismas haben. Dabei handelt ist sich oft um liegende gerade Prismen (Hausdächer, Böschungen, Stahlträger). Schiefe Prismen kommen äußerst selten vor. Von großer Bedeutung ist im Alltag das Können im Berechnen von Rauminhalten gerader Prismen. Dazu muss erkannt werden, welche Begrenzungsfläche als Grundfläche und welche Kante als Höhe gewählt werden kann.

Weiterhin muss das *aktuell erreichte Niveau der Verfügbarkeit* berücksichtigt werden. Wir nutzten dazu neben den Erfahrungen der Lehrerinnen die Ergebnisse unsere landesweiten Vergleichsarbeiten in den Jahren 1998 bis 2002, die in SILL, SIKORA 2007 zusammenfassend dargestellt sind.

Bei einer Aufgabe in der Klassenstufe 7 im Jahre 1999 sollte durch Ankreuzen entschieden werden, welche von 5 Schrägbildern einen Quader darstellen. Die Auswertung einer Zufallsstichprobe von 34 Schulen mit 1295 Schülern ergab folgende Resultate.

	Schüler			Schulen				
Figur	RS	HS	alle	Min.	u. Q.	Med.	o. Q.	Max.
a) flacher Quader	77	77	77	44	72	81	86	96
b) quadratische Pyramide	91	90	90	77	88	91	96	100
c) Würfel	77	68	75	50	67	75	86	100
d) Pyramidenstumpf	73	63	71	48	63	72	83	100
e) dreiseitiges Prisma	88	90	88	62	84	90	96	100

Tab. 1[2]: Richtige Lösungen (in Prozent) beim Erkennen eines Quaders

Gemessen an der gesetzten Norm von mindestens 66 % bei jedem Schüler und der sich daraus ergebenen durchschnittlichen Erfüllungsquote von 80 % wurden die

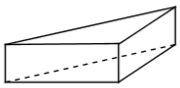
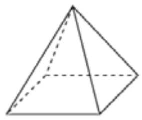
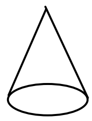
2 RS: Realschulbildungsgang (n = 1055); HS: Hauptschulbildungsgang (n = 240); u. Q.: unteres Quartil; o. Q.: oberes Quartil

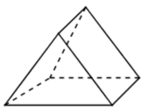
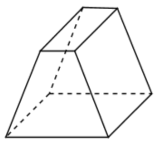
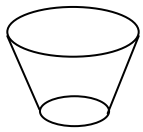
Anforderungen der Teilaufgaben a), b) und e) bereits an etwa der Hälfte der Schulen auf dem Niveau der sicheren Verfügbarkeit erreicht und wir halten dies auch an allen Schulen für machbar. Bis zum Ende der Klasse 10 sollte auch das Ausschließen eines Pyramidenstumpfes beim Identifizieren eines Quaders auf diesem Niveau erreichbar sein. Einen Würfel auch als Quader zu bezeichnen sollte dagegen nicht zum Itemuniversum dieser Ebene gehören. Die dazu aufzubringende zusätzliche Zeit sollte für andere Dispositionen verwendet werden.

Die Items zur Ebene der sicheren Verfügbarkeit haben wir in folgende vier Aufgabengruppen geordnet, zu denen jeweils ein Beispiel angegeben wird.

1. Allgemeine Merkmale von Körpern vergleichen und beschreiben

Finde mindestens 3 verschiedene Merkmale, die einige der 6 dargestellten Körper gemeinsam haben. Gib das gemeinsame Merkmal und die betreffenden Körper an.

(1)  (2)  (3) 

(4)  (5)  (6) 

2. Erkennen und Beschreiben von mathematischen Objekten

Lisa sagt: „Ich denke an einen Körper, der einen Kreis als Grundfläche besitzt."
Paul sagt: „Ich denke an einen Körper, der rollen kann."
An welche Körper könnten sie denken?

3. Erkennen und Beschreiben von außermathematischen Objekten

Gib ein gemeinsames und ein unterschiedliches Merkmal der folgenden Wörter mit dem Begriff Kegel in der Mathematik an.
a) Lichtkegel b) Vulkankegel c) Kegelbahn d) Leitkegel e)Kegelbecher

4. Ermitteln von Rauminhalten

Gib an, ob man mit den folgenden Formeln ein Volumen, einen Flächeninhalt oder keins von beiden berechnen kann, wenn a, b, c, r, s und h Strecken sind.

a) $X = a \cdot b \cdot c$ b) $X = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ c) $X = 4 \pi r^2$ d) $X = \pi r^2 \cdot h$

3.3 Zur Bestimmung von Kenntnissen auf der Ebene der reaktivierbaren und der Ebene der exemplarischen Verfügbarkeit

Zur Bestimmung der Anforderungen auf diesen Ebenen haben wir bisher keine Projekte mit Lehrerinnen durchgeführt, sodass hier nur erste Gedanken geäußert werden können. Auf der Ebene der reaktivierbaren Verfügbarkeit, die den Anforderungen von Klausuren und Abschlussprüfungen entspricht, sollten die Schüler das Wort Prisma kennen und Beziehungen zu anderen Körperbegriffen herstellen können. Eine Aufgabe für einen unvorbereiteten Test auf dieser Ebene, in der auch eine entsprechende Informationen und damit Reaktivierung zum Begriff Prisma enthalten ist, könnte folgende Form haben.

Ein gerades Prisma ist in der Mathematik ein Körper, der zwei zueinander parallele und deckungsgleiche Flächen (Grund- und Deckfläche), sowie weiterhin nur Rechtecke als Seitenflächen besitzt.

a) Welche der schematisch dargestellten Gegenstände haben die Form eines Prismas? Schraffiere in diesen Fällen die Grund- bzw. Deckfläche.
(dazu Zeichnungen: Pralinenschachtel, Bahndamm, Holzkeil, Treppe, Podest)

b) Beschreibe die Beziehungen zwischen einem geraden Prisma und den Körpern Würfel, Quader, Zylinder und Pyramide. Welche davon sind auch Prismen?

Zur Ebene der exemplarischen Verfügbarkeit sollten Kenntnisse und Vorstellungen zu so genannten „schiefen“ Körpern sowie zum damit verbundenen Satz des Cavalieri gehören. Im Unterricht könnte dazu ein entsprechendes Experiment etwa mit Bierdeckel durchgeführt und eine farbig gestaltete Darstellung zum Satz über die Volumenbeziehungen gezeigt werden. Die Schüler könnten weiterhin erleben, dass die Abwicklung eines schiefen Kreiszylinders kein Rechteck ergibt. Bei einer entsprechenden Unterrichtsgestaltung mit hoher Eigenaktivität der Schüler kann erwartet werden, dass zu einem späteren Zeitpunkt bei den Schülern diese Kenntnisse und Episoden ins Gedächtnis gerufen werden, wenn man ihnen passende Experimente oder Darstellungen zu diesen Themen präsentiert.

Literatur

BLUM, W.; KAISER, G.; BURGHES, D.; GREEN, N. (1994): Entwicklung und Erprobung eines Testes zur „mathematischen Leistungsfähigkeit“ deutscher und englischer Lernender in der Sekundarstufe I. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 15 (1994) 1/2, S. 149-168

HELMKE, A.; HOSENFELD, I. (2004): Vergleichsarbeiten - Standards - Kompetenzstufen: Begriffliche Klärung und Perspektiven. In: Jäger, R. S.; Frey, A.; Wosnitza, M. (Hrsg.): *Lernprozesse, Lernumgebungen und Lerndiagnostik. Wissenschaft-*

liche Beiträge zum Lernen im 21. Jahrhundert. Landau: Verlag Empirische Pädagogik, S. 56-75

KAISER. G. (1997): Vergleichende Untersuchungen zum Mathematikunterricht im englischen und deutschen Schulwesen. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 18 (1997) 2/3, S. 127-170

KLAUER, K. J. (1987): *Kriteriumsorientierte Tests*. Göttingen: Hogrefe

KLIX, F. (Hrsg.) (1984): *Gedächtnis, Wissen, Wissensnutzung*. Berlin: Dt. Verl. der Wissenschaften

KOHLER, B.; SCHRADER, F.-W. (Hrsg.) (2004): *Ergebnisrückmeldung und Rezeption*. Landau: Verlag Empirische Pädagogik

KRAINER, K. (1990): *Lebendige Geometrie : Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffes*. Frankfurt a. M.: Peter Lang

NEUBRAND, M., KLIEME, E.; LÜDTKE, O.; NEUBRAND, J. (2002): Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. In: *Unterrichtswissenschaft 30* (2), S. 100-119

NEUBRAND M.: (Hrsg.) (2004): *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000*. Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften

NEUBRAND, M.; NEUBRAND, J. (2007). Geometrie: Was sollen Hauptschülerinnen und -schüler wissen? Beispiele für die Vernetzung praxisorientierten Grundwissens. In: *Lernchancen 55*, S. 28-33

ROST, J. (2004): *Lehrbuch : Testtheorie – Testkonstruktion*. 2. Aufl. Bern: Huber

SILL, H.-D. (2006): PISA und die Bildungsstandards. In: Jahnke, Th.; Meyerhöfer, W. (Hrsg.).: *Pisa & Co – Kritik eines Programms.* Hildesheim: Franzbecker, S. 293-330

SILL, H.-D.; SIKORA, CH. (2007): *Leistungserhebungen im Mathematikunterricht Theoretische und empirische Studien*. Hildesheim: Franzbecker.

VOIGT, J.(1996): Empirische Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. In: Kadunz, G. (Hrsg.): *Trends und Perspektiven : Beiträge zum 7. Symposium zu „Didaktik der Mathematik“ in Klagenfurt vom 26. – 30. 9. 1994.* Wien: Hölder-Pichler-Tempski, S. 383-389

Anschrift des Verfassers

Name	Hans-Dieter Sill
Institution	Universität Rostock, Institut für Mathematik
Adresse	Universitätsplatz 1, 18055 Rostock
E-Mail:	hans-dieter.sill@uni-rostock.de