

# Zugänge zum Grundlegenden

*Prof. Dr. Hans-Dieter Sill*

*Vortrag im Kolloquium „Berlin-Brandenburgisches  
Seminar Mathematik und ihre Didaktik“ am 30.05.2016*







UNIVERSITÄT ROSTOCK | MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT





# Inhaltsübersicht

- Befunde und Aktivitäten
- Probleme und ihre Ursachen
- Was ist das Grundlegende?
- Was müsste sich in der Schule und in weiterführenden Bildungswegen ändern?

# Befunde an Schnittstellen

- In Leistungserhebungen am Ende eines Stoffgebietes oder einer Bildungsstufe (Kl. 4, 10, 12) werden meist für Lehrkräfte zufriedenstellende Ergebnisse erreicht.
- In Leistungserhebungen in späteren Stoffgebieten oder am Beginn einer neuen Bildungsstufe sind die Ergebnisse oft unzureichend.
- Beispiele:
  - Schüler können in Kl. 9 oft keine Prozentrechnung
  - Ergebnisse von Ist-Stand-Analysen in Kl. 5 
  - Ergebnisse von Eingangstests in Berufsschulen und Fachhochschulen 
  - Ergebnisse von Eingangstests in Universitäten 
  - War das schon immer so? 

# Eingangstests in Kl. 5

- Einschätzung einer Lehrkraft: „Die Ergebnisse waren eher schlecht, besonders ist mir aufgefallen, dass die formalen Aufgaben gut geklappt haben aber die Vorstellungen zu Größen waren sehr schlecht. Die Sachaufgaben waren katastrophal.“ 
- Beispielaufgaben aus einem Test
  - Wähle eine sinnvolle Einheit!
    - f) Dauer der großen Ferien:
  - Sandras Schulweg beträgt 12,7 km. Bis zur Bushaltestelle sind es 550 m. Mit dem Bus fährt sie 11,3 km. Den Rest geht sie zu Fuß. Wie weit muss Sandra noch gehen?
  - Beim Würfeln mit zwei Spielwürfeln wird die Summe 7 wesentlich häufiger gewürfelt als die Summe 12. Woran liegt das? 



# Ergebnisse aus Berufsschulen und Fachhochschulen

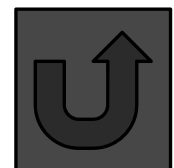
- Bericht vom „Nachmittag der Mathematik“ der IHK Braunschweig in der *Welt am Sonntag* vom 11.10.2009:
  - „Bei Eingangstests mit Absolventen der Sekundarstufe I hätten gerade mal 30 % Dreisatz und Prozentrechenaufgaben richtig lösen können“ (Berufsschule Salzgitter)
  - „Von 1120 Testteilnehmern des Wintersemesters 2008/09 erreichte über 900 Teilnehmer nur null bis fünf von insgesamt 19 Punkten.“ (TU Braunschweig)

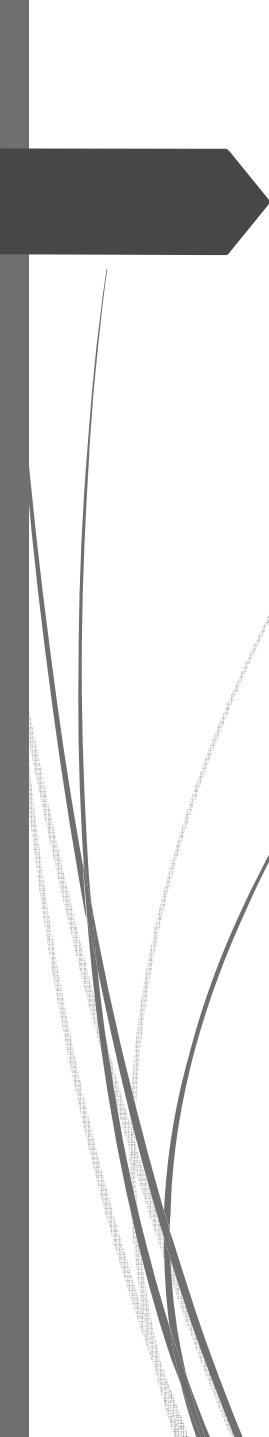




## IPN-Studie 2014 in SH (O. Köller u. a.)

- 1360 Abiturienten in Profiloberstufen in SH getestet:
  - Nur 31 Prozent der Schüler erreichen die angestrebte voruniversitäre mathematische Bildung.
  - Die Mehrheit der Schüler schafft nur das Matheniveau der Realschule.
  - 28 Prozent der Abiturienten kommen über den Kenntnisstand von Klasse 7 oder 8 nicht hinaus
  - nicht besser als bei TIMSS 1999
- Quelle: M. Spiewak: Ewige Rechenschwäche, *Die Zeit* vom 26. März 2015

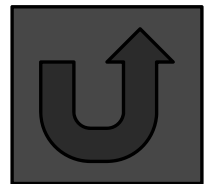




Brief von Lehrenden der TU Darmstadt und Lehrkräften von Schulen (Schmieden, Buggisch & Wagenschein) an den Direktor des Landesschulbeirats für Hessen 1949:

„Ein künftiger Lehrplan sollte ... ein Minimum an unbedingt notwendigem Stoff als streng verbindlich vorschreiben, ... .

Auf dem Gebiet der elementaren Arithmetik und Algebra fehlt Sicherheit, weil wahres Verständnis fehlt. Wohl werden die rationalen Rechenoperationen, die Wurzel- und Logarithmengesetze in allgemeinen Zahlen ‚durchgenommen‘, aber welcher Abiturient kann ein Kolloquium hierüber bestehen? Die Aufnahmeprüfungen an den Hochschulen zeigen gerade auf diesem Gebiet eine erschütternde Verständnislosigkeit ... .“





# Aktivitäten im schulischen Bereich

- Erstellen und Überprüfen von Zielen und Aufgaben
  - „Basiskompetenzen“ (Drücke-Noe u.a. 2011)
  - „Grundkompetenzen“ (Peschek 2011)
  - „Grundwissen und Grundkönnen“ (Feldt-Caesar, 2016)
  - „Grundwissen“ (Fischer 2001, Pinkernell/Greefrath 2011)
  - „Sicheres Wissen und Können“ (Sill/Sikora 2007)
  - Vorschläge für Unterrichtsformen zur Sicherung des „Grundlegendem“, z. B. „Tägliche Übungen“ (Bruder 2008)
- Ausweisen von „Grundwissen“ in Lehrplänen oder weiteren Materialien (BY, MV, RP, SN, ST, TH, SINUS)





# Forderungen, Angebote und Aktivitäten nachfolgender Bildungsstufen

- aus der EntschlieÙung der IHK Braunschweig 2009:
  - unverzichtbare Fertigkeiten intensiver vermitteln ... Setzen von Mindeststandards
  - Abstimmung der notwendigen Anforderungen an BS, FH und Unis mit Lernzielen der Oberstufe und Abschlussklassen aller Schulformen, dazu Eingangstest zur Verfügung stellen
  - Didaktik darf nicht die Beherrschung von Rechenfertigkeiten verdrängen
- Kataloge von Mindestanforderungen erarbeitet:
  - SCHULEWIRTSCHAFT Rheinland-Pfalz
  - cosh Baden-Württemberg






## Forderungen, Angebote und Aktivitäten nachfolgender Bildungsstufen

- ▶ Unterstützungsmaßnahmen an Fach- und Hochschulen: Vorkurse, Tutorien, ...
- ▶ aber kaum Verbesserungen:
  - Christa Polaczek, FH Aachen, hat in 15 Jahren „so ziemlich alle Formen der Lehre durchprobiert und evaluiert“ aber „nirgendwo Veränderungen festgestellt.“
- ▶ bei Treffen von Lehrkräften aus Schulen und Hochschulen oft Unverständnis auf beiden Seiten



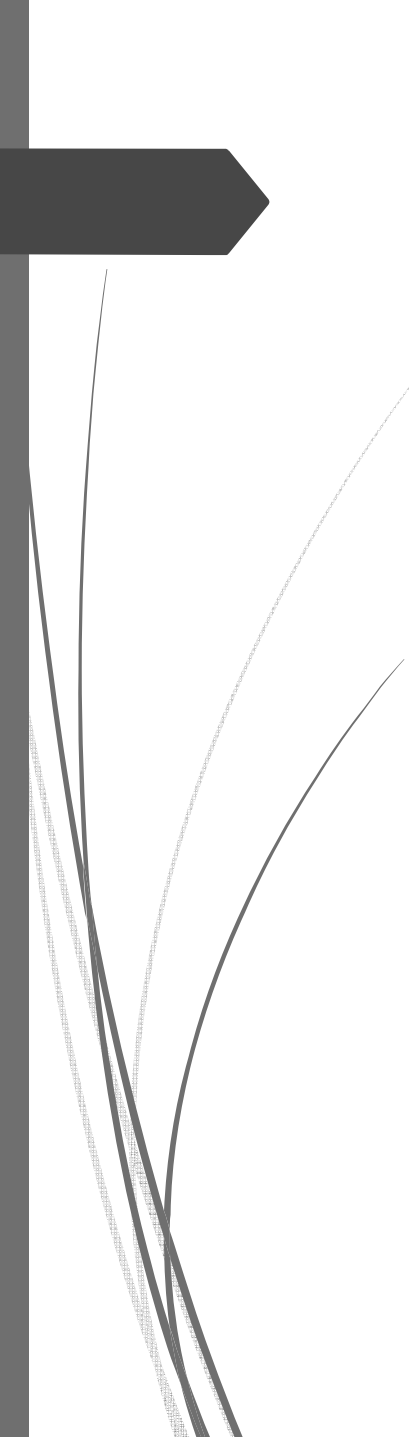
# Probleme und Ursachen

- ▶ einseitige politische, pädagogische und didaktische Orientierungen auf allgemeine Ziele und uneffektive Lernmethoden
- ▶ mangelnde Berücksichtigung neurowissenschaftlicher Gesetze, z. B. zum Gedächtnis 
- ▶ viel zu allgemeine und zu hohe Anforderungen bei Katalogen mit Mindestanforderungen aufgrund einer unzureichenden Analyse der elementaren Handlungen 
- ▶ oft viele unangemessene Anforderungen in den Eingangstests 
- ▶ Hauptursache: komplementäre Denkweisen zum Lernen von Mathematik



# Komplementarität

- Komplementarität bezeichnet in der Erkenntnistheorie zwei einander ausschließende, nicht aufeinander reduzierbare Beschreibungsweisen oder Sachverhalte, die aber in ihrer wechselseitigen Ergänzung zum Verständnis eines Phänomens oder Sachverhaltes im Ganzen notwendig sind.
- Beispiel für ein dialektisches Wechselverhältnis, nicht mit logischen Mitteln erfassbar
- Begriff von Niels Bohr in der Quantenphysik eingeführt,
- Bsp.: Dualität des Lichts, Ebbe und Flut



# Was heißt Lernen von Mathematik?

- Lernen von Mathematik heißt Ausbildung psychischer Dispositionen, also mathematischer Kenntnisse, Fertigkeiten, Fähigkeiten, Einstellungen und Gewohnheiten beim Lernenden.  
➡ Orientierung am **Menschen**
- Lernen von Mathematik heißt Erfassen der mathematischen Theorie, also der mathematischen Definitionen, Sätze und Verfahren.  
➡ Orientierung an der **Mathematik**

# Konsequenzen aus neurowissenschaftlichen Gesetzen

- ▶ Nur ein geringer Teil dessen, was im Unterricht behandelt und in LE in der Schule erfolgreich getestet wurde, kann jederzeit abrufbar bereit stehen. Dies nennen wir „Sicheres Wissen und Können“ (SWK).
- ▶ Vieles kann aber durch Reaktivierung und Übung die schon einmal erreichte Qualität wieder erhalten. Wir nennen es „Reaktivierbares Wissen und Können“ (RWK).
- ▶ Einiges ist nur exemplarisch im Unterbewusstsein vorhanden, aber auch das ist wertvoll für das weitere Lernen (Exemplarisches Wi. u. Kö, EWK).
- ▶ Aussagen zur Erfüllung von Anforderungen sind immer Wahrscheinlichkeitsaussagen.



# Unterschiede Basiskompetenzen - SWK

## ► *Anzahl der Zielangaben*

BK Terme/Gl.: 3 Zielangaben

**SWK** Terme/Gl.: 72 Zielangaben

BK Funktionen: 11 Zielangaben

**SWK** Funktionen: 100 Zielangaben

## ► *Anzahl der Aufgaben*

BK Terme/Gl.: 4 Aufgaben

**SWK** Terme/Gl.: 627 Aufgaben

BK Funktionen: 33 Aufgaben

**SWK** Funktionen: 565 Aufgaben

## ► *Typ der Aufgaben*

BK: viele Sachaufgaben (31 von 37)


**SWK**: sehr wenige Sachaufgaben

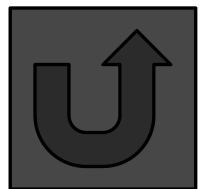
## ► *Anzahl der Anforderungen pro Aufgabe*

BK: viele **SWK**: eine



# Überhöhte Anforderungen bei Tests und Mindestanforderungen

- ein unvorbereiteter Test mit Anforderungen aus fast Gebieten der Schule kann nur SWK enthalten
- Eingangstest Kl. 5 
- Selbsttest für Studienanfänge FH Wismar:
  - Gutachten Fachberater MV: fast alles überhöht, kein SWK
  - Gutachten TH Aachen: alles notwendig
- Mindestanforderungskatalog der HS in BW (cosh):
  - enthält z. T. Inhalte, die nicht in LP enthalten sind
  - übrige Inhalte entsprechen dem üblichen Anforderungsniveau der LP und zentralen LE







# Mensch und Mathematik

Man muss über die  
Herausbildung und  
Struktur psychische  
Dispositionen  
nachdenken.

Man muss über den  
Aufbau und die  
Struktur  
mathematischer  
Inhalte nachdenken.

Mathematikunterricht  
ist der systematische  
Aufbau von  
Kenntnissen,  
Fähigkeiten und  
Fertigkeiten.

Mathematikunterricht  
ist didaktische  
Vereinfachung  
mathematischer  
Zusammenhänge.



# Mensch und Mathematik

Man muss die elementaren Handlungen beherrschen.

Man muss viele anspruchsvolle Aufgaben lösen können.

Ein Begriff ist eine Gesamtheit von Gedanken. Er wird in semantischen Netzen gespeichert.

Begriffe werden durch eine Definition exakt festgelegt.

Bsp.: Variablenbegriff und Funktionsbegriff



# Mensch und Mathematik

Man muss  
Gleichungen und  
Ungleichungen  
inhaltlich lösen  
können.

Man muss  
Gleichungen und  
Ungleichungen  
formal lösen  
können.

## Möglichkeiten zum inhaltlichen Lösen

Das Können im  
mündlichen Rechnen  
mit natürlichen Zahlen  
ist Grundlage aller  
Rechnungen.

Für das Rechnen mit  
natürlichen Zahlen  
gibt es  
Rechengesetze.



# Mensch und Mathematik

Stochastik in der Schule heißt Entwicklung von Datenkompetenz und stochastischem Denken

Ein Lehrerstudent muss in der Welt der Schulmathematik zu Hause sein.

Stochastik in der Schule ist nicht erforderlich.

(cosh, IHK Braunschweig)

Ein Lehrerstudent muss den stringenten Aufbau von mathematischen Theorien erleben.



# Was ist das Grundlegende?

- Grundlegend in Bezug auf die kognitive Struktur mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten eines Menschen sind solche Bestandteile, die
  - dauerhaft und disponibel verfügbar sind,
  - die Bewältigung von mit mathematischem Wissen und Können verbundenen Anforderungen des täglichen und gesellschaftlichen Lebens eines Bürgers in hinreichender Weise ermöglichen sowie
  - notwendig für eine Reaktivierung und Erweiterung seines mathematischen Wissens und Könnens im weiteren Bildungsweg und im beruflichen Leben sind.
- Grundlegend in Bezug auf eine mathematische Theorie sind Begriffe, Sätze, Verfahren und Denkweisen, die den Kern (die Basis) der Theorie bilden.

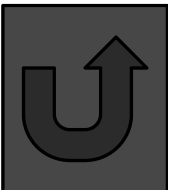


# Was müsste sich ändern?

- *Die Schule* muss in weit höherem Maße gewährleisten, dass die Absolventen grundlegende mathematische Dispositionen (im obigen Sinne des Grundlegenden) besitzen, indem
  - eine stärkere Gewichtung und auch Reduzierung der Unterrichtziele (in der Oberstufe) erfolgt,
  - der systematische Aufbau von Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten (wieder) eine weit größere Gewichtung zugunsten überzogener „Kompetenzorientierung“ bekommt
  - ein geeignetes System von Formen der Festigung, insbesondere von Täglichen Übungen, konsequent umgesetzt wird und dabei
  - das Verhältnis inhaltlicher und formaler Aspekte von Begriffen und Verfahren weit stärker beachtet wird.

# Reform der Abiturstufe

- ▶ Martin Spiewak in: *Die Zeit* vom 26. März 2015:  
„Vielleicht sollte man eher fragen, ob der Bildungskanon des Gymnasiums für die Mathematik tatsächlich der richtige ist, wenn ihn ein großer Teil des Abiturjahrgangs nicht einmal in Ansätzen beherrscht – wahrscheinlich seit Generationen.“
- ▶ Bsp.: Stellungnahme der MNF der Uni Rostock zum Rahmenplanentwurf Abiturstufe in MV, 2015:  
„Das Hauptproblem der Studienanfänger sind für uns die oft gravierenden Mängel im grundlegenden mathematischen Wissen und Können. ... Um die zeitlichen Voraussetzungen für die Sicherung der Mindestanforderungen zu gewährleisten, streben wir mit unseren inhaltlichen Vorschlägen eine möglichst weitgehende Reduzierung der vorgesehenen Inhalte an.“





# Was müsste sich ändern?

- In den *weiterführenden Bildungswegen* sollte man
  - sich davon verabschieden, Eingangstest durchzuführen und damit verbundene Schuldzuweisungen an die Schule auszusprechen,
  - keine übererhöhten Erwartungen an das grundlegende Wissen und Können der Schulabsolventen haben, sondern ihre realen Möglichkeiten akzeptieren (G. Törner),
  - auf überhöhte Anforderungen in der Anfangsphase der neuen Ausbildung verzichten, sondern
  - den neuen Lernenden ausreichend Möglichkeiten zur zielgerichteten Reaktivierung und partiellen Erweiterung ihres mathematischen Wissens und Könnens anbieten mit einem hohen Grad an Selbstständigkeit und Nutzung von spezifischen Lernprogrammen.



## 6.4.2 Grundbegriffe der Algebra

### a) Variable/Parameter:

– *Formale Aspekte:*

Eine Variable ist ein Buchstabe oder eine Zusammensetzung aus Buchstaben, Ziffern oder Zeichen. Nicht jeder Buchstabe ist eine Variable.

– *Inhaltliche Aspekte:*

#### 1. **Verwendungsaspekt:**

Variable werden verwendet für

- a) bekannte Zahlen oder Größen,
- b) unbekannte aber feste Zahlen,
- c) beliebige Zahlen oder Größen.

#### 2. **Bezeichnungsaspekt:**

Variable dienen zur Bezeichnung von Zahlen und Größen.

Es gibt Konventionen für Bezeichnungen.

#### 3. **Einsetzungsaspekt:**

Für Variable können Zahlen, Größen oder Terme eingesetzt werden. Variable sind Platzhalter oder Namen leerer Fächer.

#### 4. **Rechenaspekt:**

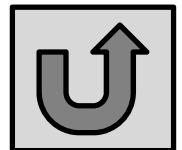
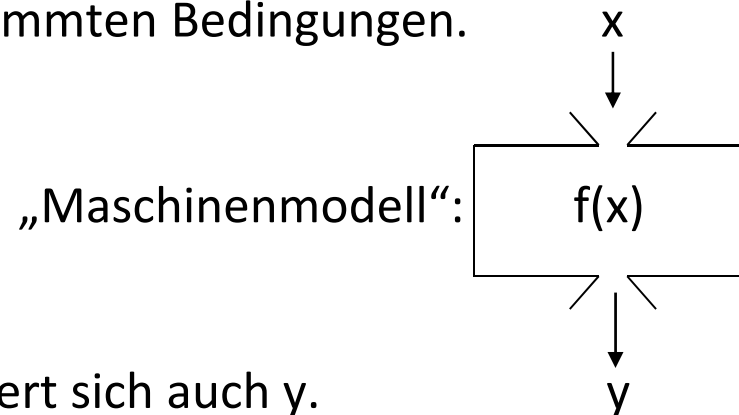
Mit Variablen kann man wie mit Zahlen rechnen.

#### 5. **Veränderungsaspekt:**

Eine Variable kann sich ändern.

### 6.4.3 Funktionsbegriff

- formaler (mengentheoretischer) Aspekt:  
Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung von Elementen einer Menge  $X$  zu Elementen einer Menge  $Y$ .
- Inhaltliche Aspekte
  - 1. Modellaspekt:**  
Mit Funktionen können reale Zusammenhänge und Abhängigkeiten zwischen Größen beschrieben werden.
  - 2. Kausaler Aspekt:**  
Mit einer Funktion  $f$  kann die Abhängigkeit einer Größe  $Y$  von einer Größe  $X$  bzw. der Zusammenhang zwischen zwei Größen beschrieben werden. Die Größe  $Y$  ist eine Funktion der Größe  $X$ .  
Die Abhängigkeit gilt nur unter bestimmten Bedingungen.
  - 3. Algorithmischer Aspekt:**  
 $f(x)$  ist eine Vorschrift, mit der aus einem Eingabewert  $x$  ein Ausgabewert  $y$  entsteht.
  - 4. Dynamischer Aspekt:**  
Bei einer Veränderung von  $x$  verändert sich auch  $y$ .
  - 5. Darstellungsaspekt:**  
Eine Funktion kann verbal, durch eine Tabelle, ein Pfeildiagramm, einen Graphen oder eine Gleichung mit zwei Variablen dargestellt werden.



# Lernpsychologische Prinzipien des Mathematikunterrichts

## 2. Prinzip der Strukturierung von Handlungen

- (1) Zerlegen komplexer Handlungen in Teilhandlungen
- (2) separate Ausbildung einzelner Teilhandlungen
- (3) Integration der Teilhandlungen

**Beispiel 1:** Umformen von Termen



**Beispiel 2:** Lösen von Sachaufgaben



### 10.3.2 Hauptschritte einer heuristischen Orientierung zum Lösen von Sachaufgaben

- In LB oft viele spezielle Orientierungen mit unterschiedlicher Anzahl und Formulierung der Teilschritte
- Vorschlag für *eine **allgemeine Orientierungsgrundlage*** für *alle* Sachaufgaben (vgl. 10.1. f)):
  1. Erfassen des Sachverhaltes
  2. Analysieren des Sachverhaltes
  3. Suchen nach Lösungsideen und Planen eines Lösungsweges
  4. Durchführen des Lösungsplanes
  5. Kontrolle und Auswertung der Lösung und des Lösungsweges
- Hauptetappen der Aneignung der in der Sek. I
  - o Kl. 1 – 4: Beginn der Entwicklung von Teilhandlungen
  - o Kl. 5/6: allgemeine Schrittfolge, Festigung der Teilhandlungen
  - o Kl. 7/8: Integration weiterer Aufgabentypen und Teilhandlungen
  - o Kl. 9/10: Verallgemeinerung und Verkürzung zur allgemeinen Vorgehensweise bei der Bearbeitung von Problemen
  - o Kl. 11/12: Integration weiterer Aufgabentypen, insbesondere Extremwertaufgaben

### 10.3.3 Möglichkeiten zum Erfassen und Analysieren des Sachverhaltes

#### a) Erfassen des Sachverhaltes

– Ziel: geistiges Hineinversetzen in den Sachverhalt

**(1) *Worum geht es in der Aufgabe?***

Ziel: Erfassen der Hauptinformation

**(2) *Verstehe ich alles in dem Text?***

Ziel: Klären unbekannter Begriffe und Sachverhalte

**(3) *Was muss man in Wirklichkeit noch alles beachten?***

***Welche Angaben sind nur Näherungswerte?***

Ziel: Vergleiche mit der Wirklichkeit, sinnvolle Genauigkeit beachten

**(4) *Welche Fragen könnte man noch stellen, die sich mit den Angaben in der Aufgabe beantworten lassen?***

Ziel: Stellen weiterer Fragen zu den Informationen in der Aufgabe

**(5) *Könnte ich mir den Sachverhalt mit Gegenständen veranschaulichen?***

Ziel: Vorstellen oder Realisieren einer gegenständlichen Veranschaulichung des Sachverhalts

**(6) *Wie könnte vermutlich die Antwort sein?***

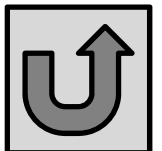
Ziel: Schätzen des Ergebnisses auf Grund von Erfahrungen, Vorstellungen oder Kenntnissen zum Sachverhalt

# SWK zum Lösen von Extremwertaufgaben

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- Extremwertaufgaben nicht algorithmisch gelöst werden können, sondern ein Spezialfall von Problem- oder Sachaufgaben sind (heuristische Vorgehensweisen),
- bei jeder Extremwertaufgabe zum Erfassen und Analysieren des Sachverhalts zunächst die Hauptinformation erfasst, eine Skizze angefertigt, unbekannte Begriffe geklärt werden sollten und sie sich die Veränderung der Zielgröße vorstellen müssen,
- es bei Extremwertproblemen meist sinnvoll ist, von der Zielgröße auszugehen und nach Formeln oder Gleichungen mit der Zielgröße zu suchen (Rückwärtsarbeiten),

Quelle: Guba, W.; Jagnow, I.; Mendler, V.; Pietsch, E.; Sachs, A.; Sikora, Ch.; Sill, H.-D.: Ziele und Aufgaben zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe, Klassen 10 – 12, Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern, 2009



<http://www.mathe-mv.de/publikationen/gymnasiale-oberstufe/vorschlaege-klasse-10-bis-12-der-ag-gymnasiale-oberstufe-mathematik/>