Sicheres Wissen und Können

Arbeiten mit Funktionen

Sekundarstufe I

Herausgeber: Institut für Qualitätsentwicklung
Mecklenburg-Vorpommern
19061 Schwerin

Autoren: Kerstin Both
Sabine Hoffmann
Evelyn Kowaleczko
Grit Kurtzmann
Dieter Leye
Marion Lindstädt
Elke Pietsch
Marion Roscher
Dr. Christine Sikora
Prof. Dr. Hans-Dieter Sill

Druck: altstadt-druck GmbH Rostock

Auflage: 1. Auflage 2012

Inhaltsverzeichnis:

Vorwort

Die Aneignung eines sicheren grundlegenden Wissens und Könnens im Unterrichtsfach Mathematik ist für das weitere Lernen nach der Schule und für das berufliche, gesellschaftliche und private Leben eines jeden Bürgers von großer Bedeutung. Mit dieser Broschüre wird die Reihe entsprechender Publikationen des Instituts für Qualitätsentwicklung zur landesweiten Orientierung der Lehrerinnen und Lehrer zur Ausbildung dieser grundlegenden Kompetenzen fortgesetzt. Die Broschüren werden in Zusammenarbeit von Fachberatern und Fachlehrern mit Fachdidaktikern des Instituts für Mathematik der Universität Rostock entwickelt.

Die Vorschläge basieren auf den bundesweit geltende Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss und für den Hauptschulabschluss, die die Kultusministerkonferenz am 04.12.2003 bzw. am 15.10.2004 für das Fach Mathematik verabschiedet haben. Die Bildungsstandards sollen in allen Bundesländern im Rahmen der Lehrplanarbeit, der Schulentwicklung sowie der Lehreraus- und Lehrerfortbildung implementiert und angewendet werden. Bildungsstandards formulieren allgemeine und inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, die für die weitere schulische und berufliche Ausbildung von Bedeutung sind und die anschlussfähiges Lernen ermöglichen.

In der vorliegenden Broschüre werden für das Arbeiten mit Funktionen durch Zielbeschreibungen und Aufgabenangebote der Anforderungsbereiche I und II die Bildungsstandards charakterisiert. Die Broschüre kann in vielfältiger Weise für die Unterrichtsentwicklung an der Schule genutzt werden. Die im theoretischen Teil enthaltenen Standpunkte und Vorschläge können fachliche Diskussionen und schulinterne Festlegungen unterstützen. Das umfangreiche Aufgabenmaterial wird u. a. zur Entwicklung täglicher Übungen und schulischer Testarbeiten sowie für die differenzierte Arbeit mit Schülern, die diese Anforderungen noch nicht erfüllen, empfohlen.

Das Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern stellt allen Lehrerinnen und Lehrern ein Exemplar der Broschüre zur Verfügung. Sie ist ebenfalls unter www.bildung-mv.de zum Download verfügbar.

Ich bedanke mich bei den Autorinnen und Autoren dieser Broschüre, die neben ihrer Unterrichts- bzw. Lehrtätigkeit intensiv an diesem Projekt gearbeitet haben.

Den Lehrerinnen und Lehrern wünsche ich viel Erfolg bei der täglichen Arbeit.

Mathias Brodkorb

Minister für Bildung, Wissenschaft und Kultur

1 Ziele und Entwicklung des Könnens im Arbeiten mit Funktionen

1.1 Bestandteile des Wissens und Könnens

Der Entwicklungsprozess des Wissens und Könnens eines Schülers[1] zum Arbeiten mit Funktionen bis zur Klasse 10[2] kann in folgende Teilprozesse (Bestandteile des Wissens und Könnens) untergliedert werden, wobei Unterschiede im Bildungsgang an Regionalen Schulen (RBG) und an Gymnasien (GBG) zu beachten sind.

1. Kenntnis von Grundbegriffen
   z. B. Funktion; Definitionsbereich; Wertebereich; Argument; Stelle; u. a.
2. Kenntnis der Definition und spezieller Eigenschaften sowie Können im Modellieren von Sachverhalten zu folgenden Funktionen:
   (1) lineare Funktionen, insbesondere direkte Proportionalität
   (2) quadratische Funktionen
   (3) Potenzfunktionen, insbesondere umgekehrte Proportionalität
   (4) Exponential- und Logarithmusfunktionen (nur GBG)
   (5) Winkelfunktionen
3. Wissen und Können zu Merkmalen von Funktionen
   (1) Änderungsverhalten (Monotonieverhalten, Wachstumsverhalten)
   (2) Nullstellen
   (3) Verhalten im Unendlichen (nur GBG)
   (4) Verhalten an Polstellen (nur GBG)
   (5) Symmetrieeigenschaften
   (6) Einfluss von Parametern auf Eigenschaften und den Graphen der Funktion
   (7) Extremstellen und Extremwerte (nur GBG)
4. Können im Arbeiten mit Graphen
   (1) Arbeit mit einem Koordinatensystem
   (2) Skizzieren eines Graphen zu einem Sachverhalt
   (3) Lesen und Interpretieren eines Graphen
   (4) Vergleichen von zwei Graphen
5. Können im Durchführen dynamischer Betrachtungen zu funktionalen Zusammenhängen (funktionales Denken i. e. S.)

Die Entwicklung des Wissens und Könnens durchläuft folgende Phasen, die jeweils durch ein bestimmtes Verhältnis inhaltlicher und formaler Aspekte charakterisiert sind.

***Phase 1*:** Vorschulische und schulische Entwicklung bis Klasse 4, Propädeutik
In dieser Phase dominieren beispielhafte inhaltliche Betrachtungen. Die Schülerinnen und Schüler erleben in verschiedenen Zusammenhängen, dass einem mathematischen oder außermathematischen Objekt ein anderes zugeordnet werden kann. So kann jeder natürlichen Zahl ihr Nachfolger bzw. (außer der Zahl Null) ihr Vorgänger zugeordnet werden. Sie sollen Zuordnungen in Sachsituationen erkennen und diese sprachlich sowie in Tabellen darstellen können. Sie lernen Tabellen kennen, bei denen zu gegebenen Zahlen Terme aus diesen Zahlen gebildet werden sollen. Im Zusammenhang mit der Arbeit mit Größen und der Auswertung statistischer Daten stellen sie funktionale Zusammenhänge in Diagrammen dar.

[1] Bei Bezeichnungen von Personen oder Personengruppen sind immer beide Geschlechter gemeint.

[2] Die Klasse 10 ist im gymnasialen Bildungsgang bereits die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe.

In einfachen Sachsituationen sollen bereits proportionale Zuordnungen untersucht werden. Insbesondere beim Umgang mit Größen aber auch in der Geometrie stellen die Schülerinnen und Schüler erste dynamische Betrachtungen zu funktionalen Zusammenhängen an.

***Phase 2*:** Orientierungsstufe, Dominanz des inhaltlichen Arbeitens
Mit den geometrischen Abbildungen Spiegelung, Verschiebung und Drehung lernen die Schülerinnen und Schüler Zuordnungen von Punkten in der Geometrie sowie die Begriffe Original und Bild kennen. Im Zusammenhang mit den Formeln für Umfang und Flächeninhalt von Figuren können dynamische Betrachtungen angestellt werden.

***Phase 3*:** Klassen 7, Übergang zum formalen Arbeiten
Ein wesentlicher Knotenpunkt in der Entwicklung des Wissens und Könnens zu Funktionen ist die Behandlung der direkten und umgekehrten (indirekten) Proportionalität, die in einigen Bundesländern bereits in der Orientierungsstufe erfolgt. Es werden Beiträge zu fast allen inhaltlichen Aspekten, insbesondere zum 1., 4. und 5. Teilprozess geleistet.

***Phase 4*:** Klassen 8 und 9, Dominanz des formalen Arbeitens
Nach der Einführung des Wortes „Funktion“ und dem formalen Aspekt des Funktionsbegriffs als eindeutige Zuordnung werden lineare und quadratische sowie im gymnasialen Bildungsgang auch Potenzfunktionen systematisch behandelt. Die Schüler lernen für jeden Funktionstyp die wesentlichen Eigenschaften kennen und lösen neben einigen Anwendungen vor allem formale Aufgaben.

***Phase 5*:**
Realschulbildungsgang: Kl. 10: Dominanz inhaltlicher Aspekte
In dieser Jahrgangsstufe erfolgt im Zusammenhang mit der exemplarischen Behandlung der Potenz-, Exponential- und Winkelfunktionen sowie der Prüfungsvorbereitung eine Systematisierung und Verallgemeinerung der Kenntnisse und Vorstellungen zu Funktionen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf den inhaltlichen Aspekten des Funktionsbegriffs und des Arbeitens mit Funktionen.

Gymnasialer Bildungsgang: Kl. 10: Dominanz inhaltlicher Aspekte, Systematisierung und Erweiterung der Kenntnisse und der inhaltlichen Vorstellungen zu Funktionen
Die Klasse 10 im gymnasialen Bildungsgang sollte als Einführungsphase der Gymnasialen Oberstufe neben einer Erweiterung der formalen Kenntnisse zu drei Funktionstypen (Exponential-, Logarithmus- und Winkelfunktionen) alle behandelten Funktionen aus Sicht von generellen Merkmalen systematisieren und inhaltliche Vorstellungen zu Grundbegriffen der Analysis (Monotonie, Grenzwert, Verhalten im Unendlichen, Verhalten an Polstellen, Extremstellen u. a.) in der Qualifikationsphase entwickeln.

1.2 Ziele der Bildungsstandards

Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss 2003 (Realschule, Gymnasium):

Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge,
- erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen diese in sprachlicher, tabellarischer oder grafischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar,
- analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie lineare, proportionale und antiproportionale),
- lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen,

- bestimmen kennzeichnende Merkmale von Funktionen und stellen Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph her,
- wenden insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen an,
- verwenden die Sinusfunktion zur Beschreibung von periodischen Vorgängen,
- beschreiben Veränderungen von Größen mittels Funktionen, auch unter Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms,
- geben zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen an, die mit Hilfe dieser Funktion beschrieben werden können.

Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss 2004:

Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben und interpretieren funktionale Zusammenhänge und ihre Darstellungen in Alltagssituationen,
- verwenden für funktionale Zusammenhänge unterschiedliche Darstellungsformen,
- unterscheiden proportionale und antiproportionale Zuordnungen in Sachzusammenhängen und stellen damit Berechnungen an,
- nutzen die Prozentrechnung bei Wachstumsprozessen (beispielsweise bei der Zinsrechnung), auch unter Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms,
- nutzen Maßstäbe beim Lesen und Anfertigen von Zeichnungen situationsgerecht.

2 Wissen und Können zu Grundbegriffen

2.1 Ausgewählte Probleme

Zur Entwicklung des Funktionsbegriffs bis zu seiner expliziten Verwendung

Die Entwicklung der Vorstellungen und Kenntnisse der Schüler zum Funktionsbegriffs beginnt in der Grundschule mit der Behandlung von Zuordnungen von gleichmächtigen endlichen Mengen und Zahlen, von Vorgänger und Nachfolger einer Zahl, Vielfachen und Teilern, Berechnungen von Termen in Tabellenform u. a. Zuordnungen.

In der Orientierungsstufe können folgende Beiträge zur Ausbildung von Vorstellungen und Betrachtungsweisen geleistet werden, die zum semantischen Netz des Funktionsbegriffs gehören:

– In der Bruchrechnung können dynamische Betrachtungen zu Brüchen erfolgen, indem z. B. untersucht wird, wie sich der Wert eines Bruches ändert, wenn der Nenner vergrößert oder verkleinert wird (entspricht Betrachtungen zu Eigenschaften der Funktion $\frac{a}{x}$).

– Mit den Umfangs-, Flächen- und Volumenformeln zu Quadrat, Rechteck, Würfel und Quader lernen die Schüler erstmals Gleichungen kennen, mit denen die Abhängigkeit einer Größe von anderen beschrieben wird. Mit Ausnahme der Umfangsformel für das Quadrat handelt es sich sogar um Funktionen mit mehreren Veränderlichen. Bei dynamischen Betrachtungen zu diesen funktionalen Zusammenhängen erleben die Schüler, dass man immer nur eine der Größen auf der rechten Seite der Gleichung verändern kann und alle anderen konstant lassen muss.

– Bei der Behandlung der geometrischen Abbildungen erleben die Schüler, dass in der Mathematik oft Zuordnungen zwischen Objekten betrachtet werden, bei denen man zwischen Original und Bild unterscheidet.

In der Klasse 7 werden bei der Behandlung der direkten und umgekehrten Proportionalität bereits viele wesentlichen Merkmale von Funktionen und funktionalen Zusammenhängen angesprochen. Ein wichtiges Ziel des Stoffgebietes ist die Anbahnung reichhaltiger Vorstellungen und Kenntnisse zum Funktionsbegriff, die in den folgen Schuljahren aufgegriffen, gefestigt und vertieft werden. Dazu sind insbesondere Beziehungen zur Betrachtung von Zusammenhängen und Abhängigkeiten herzustellen. Die allgemeine mengentheoretische Betrachtungsweise und die Untersuchung von Zuordnungen außermathematischer Objekte, zwischen denen kein kausaler Zusammenhang besteht (z. B. Häuser – Hausnummern), sollte nur am Rande behandelt werden.
Die Proportionalität sollte der Ausgangspunkt der weiteren Entwicklung des Funktionsbegriffes mit seiner expliziten Einführung in der Klasse 8 sein.

Aspekte des Funktionsbegriffs

Es können folgende Aspekte (Bedeutungen) des Wortes „Funktion“ unterschieden werden, die jeweils zu unterschiedlichen Betrachtungsweisen und Tätigkeiten beim Arbeiten mit Funktionen führen.

I. Formaler Aspekt:
Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung von Elementen einer Menge X zu Elementen einer Menge Y.

II. Inhaltliche Aspekte:

1. Modellaspekt:
Mit Funktionen können reale Zusammenhänge und Abhängigkeiten zwischen Größen beschrieben werden.

2. Kausaler Aspekt:
   Mit einer Funktion f kann die Abhängigkeit einer Größe Y von einer Größe X bzw. der Zusammenhang zwischen zwei Größen beschrieben werden. Die Abhängigkeit gilt nur unter bestimmten Bedingungen.
3. Algorithmischer Aspekt:
   f(x) ist eine Vorschrift, mit der aus einem Eingabewert x ein Ausgabewert y entsteht. Dies kann mit dem sogenannten „Maschinenmodell“ visualisiert werden. (siehe S. 11)
4. Dynamischer Aspekt:
   Bei einer Veränderung von x verändert sich auch y.
5. Darstellungsaspekt:
   Eine Funktion kann verbal, durch eine Tabelle, ein Pfeildiagramm, einen Graphen oder eine Gleichung mit zwei Variablen dargestellt werden.

Funktionen als Abhängigkeiten, Zusammenhänge und Zuordnungen

In der Geschichte der Herausbildung des Funktionsbegriffes, die erst im 18. Jahrhundert begann, ging es zunächst um das Erfassen von Zusammenhängen und Abhängigkeiten von Größen durch geschlossene mathematische Ausdrücke und die Betrachtung von Veränderungen der einen Größe bei Veränderung der anderen Größe (dynamische Betrachtungen). So definierte Leonhard Euler (1707 - 1783): Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist ein analytischer Ausdruck, der in beliebiger Weise aus dieser veränderlichen Größe und aus Zahlen oder konstanten Größen zusammengesetzt ist.

Erst im Zuge der mengentheoretischen Fundierung der Mathematik im 19. Jahrhundert wurde der Begriff Funktion als eine spezielle Abbildung bzw. Relation definiert. In der Schule ist es üblich, als Oberbegriff den Begriff „Zuordnung“ zu verwenden, obwohl es sich nicht um einen definierten mathematischen Begriff handelt. Durch die mengentheoretische Betrachtungsweise von Größenbeziehungen als Zuordnung von Werten werden allerdings wesentliche Anwendungsaspekte in den Hintergrund gedrängt. Mit dem Begriff „Funktion“ sollten die Schüler deshalb eng die Betrachtung von Zusammenhäng bzw. die Abhängigkeiten von Größen verbinden.

Es sollten bei der Beschreibung von konkreten Zusammenhängen bestimmte Sprechweisen verwendet werden, so z. B. beim Zusammenhang von Weg und Zeit bei einem Bewegungsvorgang:
- Der zurückgelegte Weg s hängt von der Zeit t ab.
- Die Größe t heißt unabhängige Variable, die Größe s heißt abhängige Variable.
- Der Weg s ist eine Funktion der Zeit t.
- Zwischen den Größen Weg und Zeit besteht ein funktionaler Zusammenhang.

Es ist zu beachten, dass aus der Formulierung: "Zwischen den Größen a und b besteht ein funktionaler Zusammenhang" nicht abgeleitet werden kann, ob damit gemeint ist, dass a von b abhängt oder b von a, was also Definitionsbereich und was Wertebereich des Zusammenhangs ist.

Mit der Formulierung „Die Größe Y ist ein Funktion der Größe X“ kann der Relationscharakter des Funktionsbegriffes verdeutlicht und eine Beziehung zu Formulierungen in den Naturwissenschaften hergestellt werden. An geeigneten Stellen sollte herausgestellt werden, dass bei Angabe von gesetzmäßigen Zusammenhängen die Angabe von Bedingungen nötig ist (z. B. $s = f(t) = v \cdot t$ gilt nur, wenn v konstant ist)

Exemplarisch sollte auch verdeutlicht werden, dass nicht jeder gesetzmäßige Zusammenhang durch eine Funktion beschrieben werden kann (z. B. Körpergröße $\rightarrow$ Körpergewicht). In diesen Fällen handelt es sich um stochastische Zusammenhänge.

Als Schreibweisen für Funktionsgleichungen sollte sowohl y = … als auch f(x) = … bzw. beide zugleich y = f(x) = … verwendet werden. Dabei ist zu beachten, dass mit y der Funktionswert bezeichnet wird, während bei der Schreibweise f(x) der Buchstabe f die Funktion bezeichnet.

Zur Darstellung von Funktionen

Funktionen können dargestellt werden durch eine wörtliche Beschreibung, eine Wertetabelle oder ein Pfeildiagramm, einen Graphen in einem Koordinatensystem oder eine bzw. mehrere Gleichungen. Zwischen diesen Darstellungsarten und dem Funktionsbegriff bestehen folgende Beziehungen:

- Zu jeder Funktion können eine Wertetabelle oder ein Pfeildiagramm angegeben werden, die aber nur endlich viele Werte enthalten. Jede Tabelle und jedes Pfeildiagramm, die eine eindeutige Zuordnung enthalten, sind eine Funktion.
- Nicht jede Funktion und auch nicht jede Zahl-Zahl-Funktion kann als Graph in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Jede Kurve (als Menge von Punkten) in einem Koordinatensystem, die mit jeder Parallelen zur y-Achse höchstens einen Punkt gemeinsam hat, kann als Graph einer Funktion aufgefasst werden.
- Wird eine Funktion in Form einer Gleichung mit zwei Variablen dargestellt, so ist die Funktion die Lösungsmenge der Gleichung.
- Nicht jede Funktion lässt sich in Form einer Gleichung angeben. Jede Gleichung mit zwei Variablen, die sich nach einer der Variablen auflösen lässt, kann als Darstellung einer Funktion mit einer Variablen aufgefasst werden. Gleichungen mit mehr als einer Variablen, die sich nach einer der Variablen auflösen lassen, können als Darstellung von Funktionen mit mehreren Variablen aufgefasst werden.

Zu den Begriffen x-Wert, Argument, Stelle, y-Wert und Funktionswert

Zur Bezeichnung von x-Werten werden die Begriffe Argument und Stelle verwendet. Im gymnasialen Bildungsgang sollte mit Blick auf die Oberstufe häufiger der Begriff Stelle benutzt werden, wobei aber folgende Begriffsbeziehungen auszubilden sind:

- Der Begriff Stelle ist stärker an die grafische Darstellung der Funktion gebunden. Stellen sind alle Werte auf der x-Achse.
- Eine Stelle liegt immer auf der x-Achse. Punkte des Graphen oder y-Werte werden nicht als Stellen im mathematischen Sinne bezeichnet.
- Eine Stelle ist im Unterschied zur üblichen Begriffsverwendung im Alltag zur Bezeichnung eines Ortes kein Punkt auf der x-Achse, sondern nur die x-Koordinate des Punktes. (Dies entspricht der Bezeichnung der Punkte auf der x-Achse durch Zahlen, obwohl eigentlich Zahlenpaare verwendet werden müssten.)
- Ein Argument gehört stets zum Definitionsbereich, d. h. jedes Argument ist auch eine Stelle.
- Eine Stelle muss nicht zum Definitionsbereich der Funktion gehören, d. h. nicht jede Stelle ist ein Argument. Das sind Stellen, an denen f nicht definiert ist, wie etwa eine Polstelle oder eine andere Unstetigkeitsstelle.

Die Begriffe y-Wert und Funktionswert sollten synonym verwendet werden. Funktionswerte werden mit y bzw. mit f(x) bezeichnet, wobei die Variable f die Funktion bezeichnet. Es folgende Sprechweisen möglich: „f(x) ist der Funktionswert an der Stelle x.“ oder „f(x) ist der Wert der Funktion f an der Stelle x.“

Zu den Begriffen Definitionsbereich und Wertebereich

Bereits vor der expliziten Behandlung von Funktionen wurden die Schüler bei der Behandlung von Gleichungen mit dem Problem konfrontiert, dass für die verwendeten Variablen immer ein Grundbereich angegeben werden muss. Wird er nicht explizit angegeben, so ist immer der größtmögliche Bereich gemeint. Es wurden für dieselbe Gleichung bereits verschiedene Grundbereiche betrachtet. Weiterhin ist den Schülern bekannt, dass die Gleichung für alle Werte der Variable definiert sein muss. Im Zusammenhang mit der Behandlung von Bruchgleichungen und Wurzelgleichungen wurden entsprechende Betrachtungen zum Definitionsbereich der Terme eingestellt.

Der Begriff „Definitionsbereich einer Funktion" sollte in enger Beziehung zu den vorherigen Betrachtungen und Bezeichnungen bei Termen und Gleichungen in das semantische Netz eines Schülers als „Menge aller x-Werte, für die die Funktion definiert ist" eingeordnet werden.

Das Verständnis für den Begriff „Wertebereich" für die Menge der möglichen Funktionswerte einer Funktion ist mit dem Problem verbunden, dass aus der Bezeichnung „Werte…" nicht hervorgeht, ob es sich um x-Werte oder y-Werte handelt. Während Betrachtungen zum Definitionsbereich direkt an der Funktionsgleichung durchgeführt werden können und bei einigen Funktionen (z. B. Potenzfunktionen mit negativem Exponenten) zur Arbeit mit der Funktion notwendig sind, sind für die Bestimmung des Wertebereiches einer Funktion oft Kenntnisse über die Funktion erforderlich, teilweise müsste sogar eine Kurvendiskussion (z. B. Betrachtungen im Unendlichen) durchgeführt werden.

Die beiden Begriffe Definitionsbereich und Wertebereich, die oft in einem Atemzug genannt werden, sind also von unterschiedlicher semantischer Relevanz, was einen Teil der Probleme, die Schüler damit haben, erklären könnte. Der Begriff Definitionsbereich ist wesentlich wichtiger und sollte deshalb auch häufiger und eigenständig verwendet werden.

Zum algorithmischen Charakter des Funktionsbegriffs

Zum Ermitteln von Funktionswerten, zum Untersuchen der Eigenschaften von Funktionen (zum Beispiel ob es sich um eine gerade oder ungerade Funktion handelt), für dynamische Betrachtungen und weitere Tätigkeiten im Zusammenhang mit Funktionen sind sichere Fertigkeiten im Belegen der Variablen mit Zahlen oder Termen im Funktionsterm erforderlich. Dazu ist nützlich, eine Funktion formal als eine Maschine aufzufassen, die aus einer Eingabe auf bestimmte Weise eine Ausgabe erzeugt. Man kann in diesem Sinne den Funktionsterm f(x) als einen Befehl ansehen, zu dessen Ausführung die Variable x in dem Term jeweils durch die Eingabe ersetzt wird. Mit diesen Betrachtungen kann das formale Arbeiten mit Termen und Funktionen in einem Computeralgebrasystem vorbereitet werden.

Beispiel: $f(x) = 3x + 5$ Befehl: Multipliziere die Eingabe mit 3 und addiere 5

Eingabe:	1	$-\frac{5}{3}$	0	$(-x)$	$(x - \frac{5}{3})$
Verarbeitung:	$\boxed{3 \cdot x + 5}$	$\boxed{3 \cdot x + 5}$	$\boxed{3 \cdot x + 5}$	$\boxed{3 \cdot x + 5}$	$\boxed{3 \cdot x + 5}$
Ausgabe:	8	0	5	$-3x + 5$	$3x$

Zum Begriff Nullstelle

Die Wörter Nullstelle einer Funktion und Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der x-Achse sollten im semantischen Netz der Schüler eng verbunden sein, obwohl rein formal beides nicht gleichgesetzt werden kann. Eine Nullstelle ist nur die x-Koordinate des Schnittpunktes des Graphen. Dies muss nicht Gegenstand langer Diskussionen seien, da die Schüler bei der Angabe eine Nullstelle ohnehin nur einen x-Wert angeben. Zudem werden üblicherweise die Punkte auf der x- und der y-Achse nur mit einer Zahl bezeichnet, da die Achsen als Geraden (Zahlengeraden) aufgefasst werden, die eindimensional sind (vgl. S. 9).

Bei der Einführung des Begriffs Nullstelle im Rahmen der Behandlung der linearen Funktionen in Klasse 8 sollte der Begriff gleich allgemein ausgebildet werden, indem auch Funktionsgraphen anderer Funktionen betrachtet werden. Als Erklärung könnte die Formulierung verwendet werden, dass eine Nullstelle der x-Wert des Schnittpunktes des Graphen der Funktion mit der x-Achse ist.

Sicheres Wissen und Können

Alle Bildungsgänge

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass eine Funktion durch eine wörtliche Beschreibung, eine Wertetabelle, einen Graphen in einem Koordinatensystem oder eine Gleichung dargestellt werden kann,
- können Beispiele für Funktionsgleichungen und Funktionsgraphen angeben,
- wissen, dass mit Funktionen Zusammenhänge und Abhängigkeiten zwischen Größen beschrieben werden können,
- wissen, dass in der Realität funktionale Zusammenhänge nur unter bestimmten Bedingungen gelten,
- kennen den Begriff „x-Wert“,
- wissen, dass bei einer Funktion immer ein Definitionsbereich für die Menge der x-Werte angegeben werden muss und können diesen in einfachen Fällen bestimmen,
- kennen den Begriff „y-Wert“ und den synonymen Begriff „Funktionswert“,
- kennen die Schreibweisen $y = \ldots$ und $f(x) = \ldots$ zur Angabe einer Funktionsgleichung,
- können in einfachen Fällen entscheiden, welche Darstellung zur Angabe einer Funktion geeignet ist,
- können bei einfachen Funktionstermen zu gegebenen x-Werten die zugehörigen y-Werte berechnen und umgekehrt,
- kennen den Begriff „Nullstelle einer Funktion“ als einen speziellen x-Wert und wissen, dass der Funktionsgraph die x-Achse in der Nullstelle schneidet oder berührt,
- wissen, dass man alle Nullstellen einer Funktion mit der Gleichung $f(x) = 0$ bestimmen kann.

Nur gymnasialer Bildungsgang

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass eine Gleichung mit mehr als 2 Variablen, insbesondere eine Größengleichung, als Funktion einer Veränderlichen aufgefasst werden kann, wenn alle anderen Variablen als konstant angesehen werden,
- kennen die Begriffe Argument und Stelle und können diese unterscheiden,
- kennen die Begriffe Definitionsbereich und Wertebereich und können diese bei realen Zusammenhängen identifizieren,
- können im Funktionsterm $f(x)$ die Variable durch Zahlen bzw. Terme belegen.

2.2 Aufgaben

Alle Bildungsgänge

1. a) Gib eine Gleichung einer beliebigen Funktion y = f(x) an.

b) Gib eine wörtliche Beschreibung der Funktion $y = x^2$ an.

c) Skizziere den Graphen einer Funktion in ein Koordinatensystem.

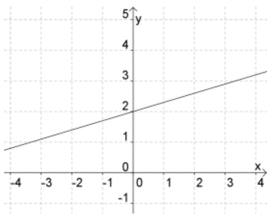
d) Skizziere eine Kurve in einem Koordinatensystem, die kein Funktionsgraph ist.

e) Skizziere einen Funktionsgraphen, der die x-Achse zweimal schneidet.

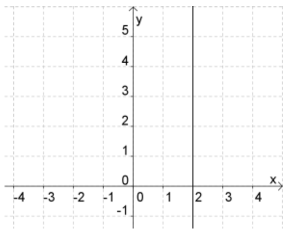
f) Skizziere einen Funktionsgraphen, der die y-Achse einmal schneidet.

2. Welcher der dargestellten Kurven ist Graph einer Funktion?

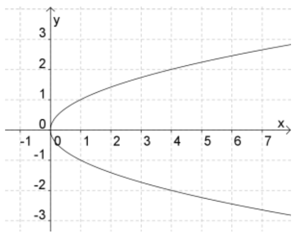
a)



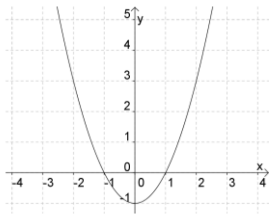
b)



c)



d)



3. Die folgenden Zusammenhänge bzw. Abhängigkeiten lassen sich durch eine Funktion beschreiben. Kreuze jeweils an, welche Darstellungsart möglich ist.

	Wertetabelle	Gleichung	Graph
a) Abhängigkeit des Preises von der Masse der gekauften Äpfel einer Sorte			
b) Zusammenhang zwischen der ausgeflossenen Wassermenge und der Zeit nach dem Öffnen eines Wasserhahns			
c) Temperaturverlauf an einem Tag in Warnemünde			

4. Welche Aussagen sind unter den angegebenen Bedingungen wahr?

a) Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist eine Funktion seiner Länge.
Bedingung: Die Breite des Rechtecks ist konstant.

b) Der Preis für Bleistifte ist eine Funktion der Anzahl der gekauften Bleistifte.
Bedingung: Die Bleistifte sind von der gleichen Sorte und es gibt keinen Rabatt.

c) Das Volumen eines Quaders ist eine Funktion seiner Grundfläche.
Bedingung: Die Höhe des Quaders ist konstant.

5. Eine Funktion ist durch die Gleichung f(x) = x + 1 gegeben.

a) Gib die Funktionswerte für folgende x-Werte an. – 4; – 3; – 1,5; 0; 2,5; 3,5

b) Gib die x-Werte zu folgenden Funktionswerten an. – 4; – 3; – 1,5; 0; 2,5; 3,5

6. Für welche x nehmen die folgenden Funktionen den Wert 0 bzw. 1 an?

a) f(x) = x + 2 b) f(x) = – x + 2 c) f(x) = 3x – 2

7. Gib die Menge aller x-Werte an, für die die folgende Funktion definiert werden kann.

a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = 2x^2 - 5$ c) $y = \frac{1}{x-1}$

8. Bestimme jeweils die angegebenen Funktionswerte.

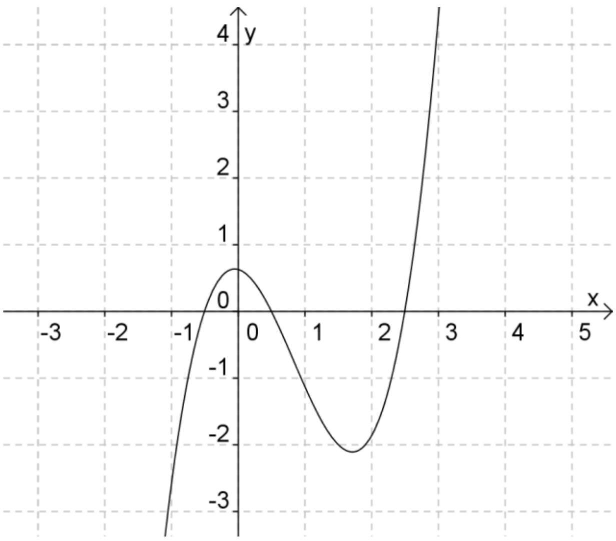
	f(− 2)	f(− 1)	f(0)	f(1)	f(2)
a) $f(x) = 4x - 2$					
b) $f(x) = (x - 2)^2$					
c) $f(x) = x^3$					

9. Gibt jeweils eine Gleichung an, mit der die Nullstellen der folgenden Funktionen bestimmt werden können. Die Nullstellen müssen **nicht** bestimmt werden.

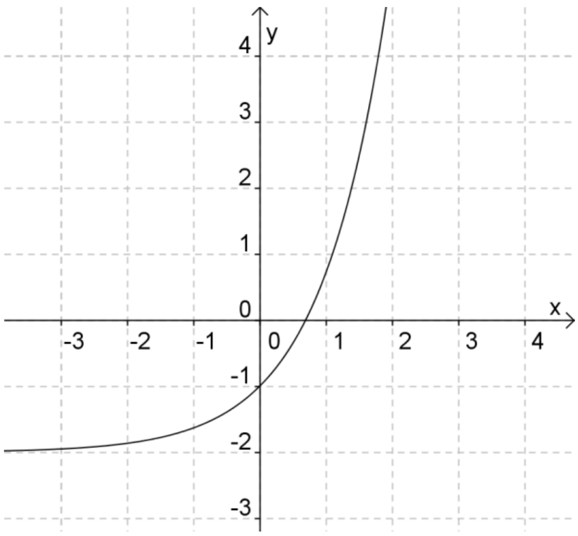
a) $f(x) = 3x - 1$ b) $y = x^2 - 2x + 5$ c) $f(x) = x^4 - 1$

10. Markiere alle Nullstellen.

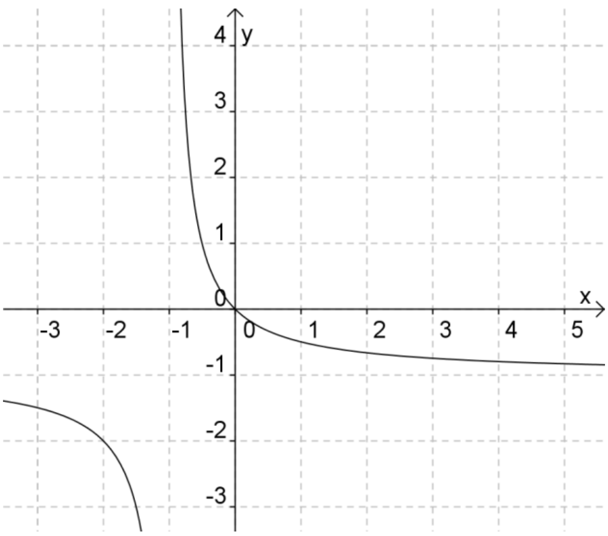
a)



b)

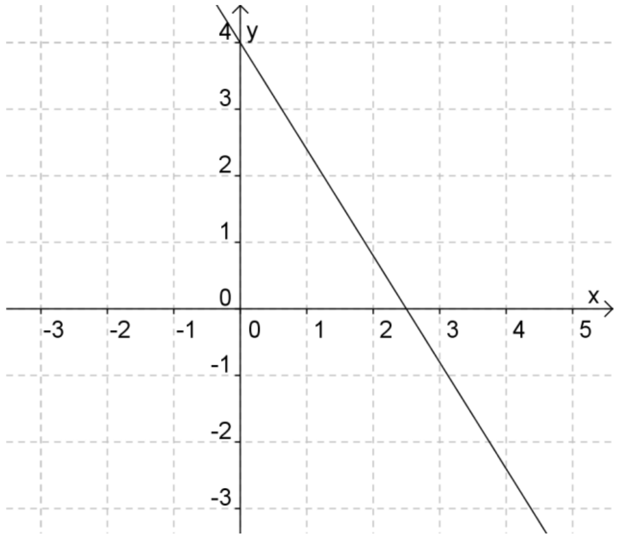


c)

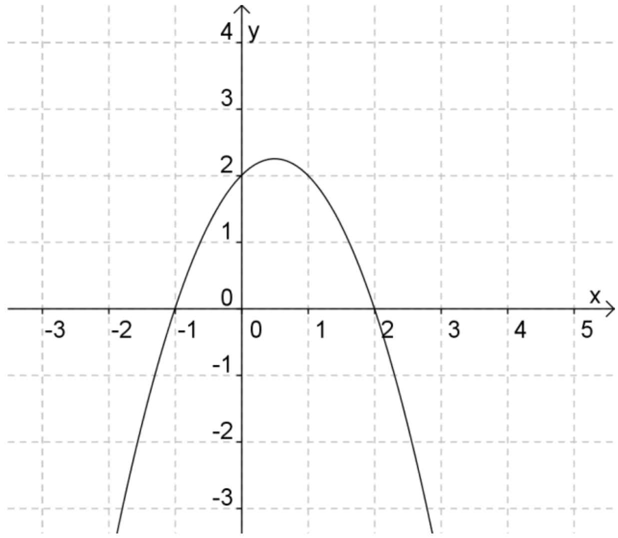


11. Kennzeichne die Nullstellen der folgenden Funktionen und bestimme sie näherungsweise.

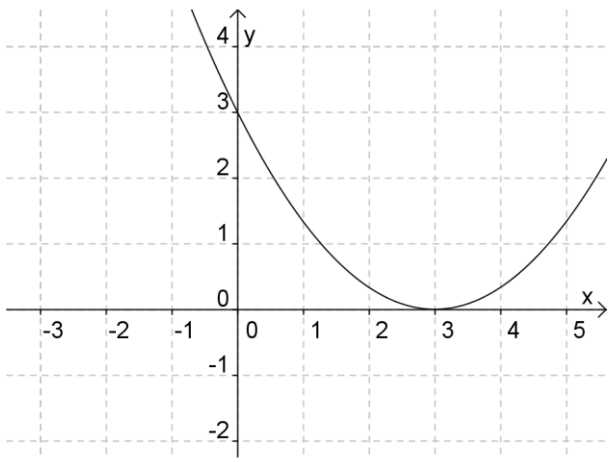
a)



b)



c)



12. Skizziere jeweils den Graphen einer Funktion, die genau die folgenden Nullstellen hat.

a) x = 1 b) $x_1 = -1$ und $x_2 = -2$ c) – 3; 0 und 3

13. Mit welcher der Gleichungen kann man die Nullstellen einer Funktion bestimmen?

a) x = 0 b) f(x) = 0 c) y = f(0)

14. Entscheide, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist. Kreuze jeweils an.

Aussage	wahr	falsch
a) Eine Nullstelle ist der Wert von y, wenn x = 0 ist.		
b) Nullstellen sind alle x-Werte, für die y = 0 ist.		
c) Eine Nullstelle ist ein x-Wert, für den der zugehörige Funktionswert null ist.		

Nur gymnasialer Bildungsgang

15. Gib den Definitionsbereich der folgenden Funktionen an.

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = \sqrt{x-1}$ c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

16. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Der Graph einer Funktion kann die x-Achse in folgender Weise schneiden.

(1) beliebig oft (2) genau einmal (3) gar nicht

b) Der Graph einer Funktion kann die y-Achse in folgender Weise schneiden.

(1) beliebig oft (2) genau einmal (3) gar nicht

17. Die folgenden Formeln können unter bestimmten Bedingungen als Funktionen einer Veränderlichen aufgefasst werden. Gib zu jeder Formel zwei mögliche Funktionsgleichungen und die jeweilige Bedingung an.

a) $A = a \cdot b$ b) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ c) $V = A_g \cdot h$ d) $A = \frac{a+c}{2}h$ e) $v = \frac{s}{t}$ f) $F = m \cdot a$

18. Bestimme zu den Termen jeweils die angegebenen Funktionswerte.

(1) $f(x) = 3x + 4$ a) $f(0)$ b) $f(1)$ c) $f(-\frac{4}{3})$

(2) $f(x) = (x-2)^2$ a) $f(-2)$ b) $f(2)$ c) $f(x + 2)$

(3) $f(x) = x^3$ a) $f(2)$ b) $f(-2)$ c) $f(-x)$

19. Die folgenden Funktionen haben jeweils die gleiche Nullstelle, obwohl sich die Graphen in ihrer Umgebung anders verhalten. Beschreibe die Unterschiede.

a) $f_1(x) = x$ b) $f_2(x) = x^2$ c) $f_3(x) = x^3$

20. Diskutiere folgende Aussage eines Schülers zu Begriff Nullstelle: „Eine Nullstelle ist der Schnittpunkt des Graphen der Funktion mit der x-Achse.“

3 Zum Arbeiten mit Graphen und zu dynamischen Betrachtungen

3.1 Ausgewählte Probleme

Bestandteile des Könnens im Arbeiten mit Graphen

Unter dem Können im Arbeiten mit Graphen (grafisches Können) wird das Können im Skizzieren, Zeichnen und Interpretieren von Graphen verstanden, wobei Graphen grafische Darstellungen von Funktionen bzw. funktionalen Zusammenhängen in einem Koordinatensystem bzw. in einem Diagramm sind.

Mit dem grafischen Können werden auch wesentliche Aspekten des Könnens im Umgang mit grafischen Darstellungen von Daten in der Beschreibenden Statistik erfasst, worauf in dieser Broschüre nicht eingegangen wird.

Das grafische Können ist eine Einheit formaler und inhaltlicher Aspekte. Zu seiner Entwicklung müssen folgende Teilhandlungen ausgebildet werden:

a) Lesen und Interpretieren von Graphen

- Erkennen der auf den Achsen dargestellten Größen
- Ablesen von zugeordneten x- und y-Werten aus einem Graphen
- Erkennen der Einteilung auf den Achsen
- Schätzen von Anstiegen
- Berechnen von Anstiegen durch tatsächliches oder gedankliches Einzeichnen von Anstiegsdreiecken
- Deuten des Anstieges bei realen Zusammenhängen als Verhältnis der Größen

b) Vergleichen von zwei Graphen

- inhaltliches und formales Vergleichen von Anstiegen
- gedankliches Entlanggehen auf Parallelen zur x- bzw. y-Achse und deuten der dabei durchlaufenen Werte
- Verlauf eines Graphen oberhalb oder unterhalb bzw. rechts oder links vom anderen Graphen deuten
- Deuten der Schnittpunkte der Graphen

c) Zeichnen eines Koordinatensystems

- Zuordnung der Größen zu den Achsen: Erkennen der abhängigen Größe
- Festlegen eines Maßstabes: dem größten darzustellenden Wert eine geeignete Längenangabe zuordnen
- Auswählen, Berechnen und Eintragen der Teilbeschriftungen

d) Skizzieren eines Graphen nach einer wörtlichen Beschreibung

- Zeichnen eines Koordinatensystems (siehe c))
- Zeichnen ausgewählter Punkte
- Erkennen der Änderung von y bei Änderung von x
- Erkennen der Änderungsrate und zuordnen eines entsprechenden Anstiegs
- Erkennen der Veränderung der Änderungsrate und Zeichnen einer entsprechenden Krümmung

Zum Können im Durchführen dynamischer Betrachtungen

Unter dem Können im Durchführen dynamischer Betrachtungen zu funktionalen Zusammenhängen zwischen zwei Veränderlichen, wird das Erkennen, Erfassen und Anwenden der Abhängigkeit der Veränderung einer Veränderlichen von der Veränderung der anderen Veränderlichen verstanden. Es können folgende Teilhandlungen unterschieden werden:

(1) Erkennen der Veränderung von y bei Veränderung von x,
(2) Finden einer Möglichkeit x so zu verändern, dass sich y in gewünschter Weise ändert,
(3) Erkennen von Sonder- und Grenzfällen.

Beim Arbeiten mit Funktionen spielen dynamische Betrachtungen an vielen Stellen eine zentrale Rolle, wobei diese Betrachtungen mit unterschiedlichen Bezeichnungen belegt sind.

- Der Standardfall dynamischer Betrachtungen sind Monotoniebetrachtungen zu Funktionen, bei denen untersucht wird, wie sich die y Werte ändern, wenn x wächst. Es handelt sich dabei um qualitative Betrachtungen, die mithilfe von Ungleichungen beschrieben werden können.
- Um das Änderungsverhalten von Funktionen auch quantitativ zu beschreiben, können zwei verschiedene Betrachtungen durchgeführt werden. Zum einen untersucht man, wie sich y ändert, wenn x um einen festen Wert (im Spezialfall um 1) wächst. Zum anderen kann man die Veränderung von y bei der Vervielfachung von x untersuchen.
- Um einen Zusammenhang zwischen der Änderung von y und von x herzustellen, wird die (mittlere) Änderungsrate einer Funktion betrachtet, das heißt der Quotient aus dem Zuwachs von y und dem Zuwachs von x. Die Änderungsrate wird auch als Differenzenquotient bezeichnet. Das erste Mal lernen die Schüler diese Betrachtung beim Anstieg einer linearen Funktion kennen. In der gymnasialen Oberstufe wird diese Betrachtung dann zur Definition der Ableitung einer Funktion an einer Stelle als Maß für die lokale Änderungsrate weitergeführt.
- Anstelle von Änderungsverhalten spricht man auch vom Wachstumsverhalten einer Funktion. Das Wort „Wachstum“ wird in diesem Zusammenhang in zwei Bedeutungen verwendet. Zum einen wird es sowohl für positive und negative Änderungen der Funktionswerte verwendet und ist damit synonym zum Wort Änderung. Insbesondere bei zeitabhängigen Zusammenhängen wird nur von Wachstum gesprochen, wenn die Funktionswerte größer werden. Nehmen die Funktionswerte ab, spricht man von Abnahme bzw. Zerfall. Dies betrifft insbesondere Zusammenhänge die durch Exponentialfunktionen beschrieben werden. (vgl. S. 51)

Dynamische Betrachtungen lassen sich auch an weiteren Stellen im Mathematikunterricht durchführen. Beispiele sind unter anderem:

- Betrachtungen zu Rechenoperationen, die eine Grundlage für propädeutische Grenzwertbetrachtungen sind (vgl. S. 60 ff)
- Betrachtungen zu beweglichen Figuren in der Geometrie,
- Untersuchung von proportionalen Zusammenhängen als Spezialfall der Untersuchung linearer Funktionen,
- Betrachtungen zur Ähnlichkeit von Figuren als Spezialfall der Untersuchung von Potenzfunktionen.

3.2 Sicheres Wissen und Können

Bei den folgenden Forderungen an das sichere Wissen und Können wird stets vorausgesetzt, dass es sich bei außermathematischen Anwendungen um Zusammenhänge aus der Erfahrungswelt der Schüler handelt.

Alle Bildungsgänge

Die Schülerinnen und Schüler

- können für eine grafische Darstellung von funktionalen Zusammenhängen angeben, welche Größe auf der x-Achse und welche auf der y-Achse dargestellt werden sollte,
- können bei einer gegebenen grafischen Darstellung die auf den Achsen dargestellten Größen angeben,
- können für einfache Zahlenwerte eine geeignete Einteilung auf den Achsen ohne Unterbrechung angeben,
- können bei einer gegebenen Einteilung einer Achse diese erkennen und Werte ablesen,
- können zugeordnete Größenpaare in ein vorgegebenes Koordinatensystem eintragen,
- können einander zugeordnete Größenpaare aus einer grafischen Darstellung ablesen,
- können den größten und kleinsten y-Wert sowie die zugeordneten x-Werte in einem Intervall bestimmen und interpretieren,
- können das Wachstumsverhalten eines Graphen zu einem Zusammenhang abschnittsweise umgangssprachlich (ohne Verwendung der Wörter monoton wachsend bzw. monoton fallend) beschreiben,
- können Änderungsraten umgangssprachlich beschreiben und miteinander vergleichen,
- können verbale Beschreibungen von Zusammenhängen und ihre grafische Darstellung zuordnen,
- können bei zwei gegebenen Graphen Vergleiche anstellen, indem sie die Funktionswerte bei gleichen x-Werten sowie die x-Werte bei gleichen Funktionswerten vergleichen und die Schnittpunkte der beiden Graphen interpretieren.

Nur gymnasialer Bildungsgang

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass beim Monotonieverhalten die Frage gestellt wird: „Wie ändert sich y, wenn x wächst?“,
- können inhaltliche Betrachtungen an Graphen und verbale Beschreibungen ohne Nutzung von Ungleichungen formulieren.

3.3 Aufgaben

1. Es soll der Zusammenhang zwischen zwei Größen in einem Diagramm dargestellt werden. Gib jeweils an, welche Größe auf der x-Achse und welche auf der y-Achse darzustellen ist.

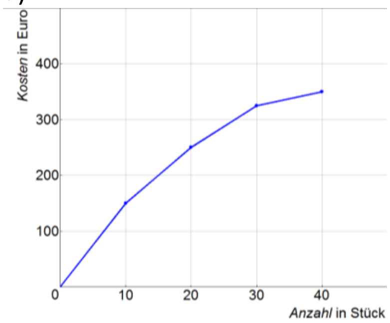
a) die Abhängigkeit der Temperatur von der Uhrzeit an einem bestimmten Ort

b) der Preis von gekauften Brötchen der gleichen Sorte in Abhängigkeit von der Anzahl

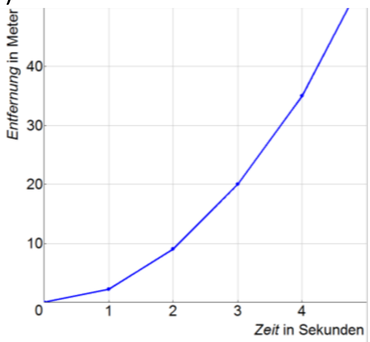
c) die zurückgelegte Wegstrecke bei einer Wanderung in Abhängigkeit von der Wanderzeit

2. Gib für die folgenden grafischen Darstellungen an, welche Zusammenhänge dargestellt sind. Fülle den Lückentext aus.

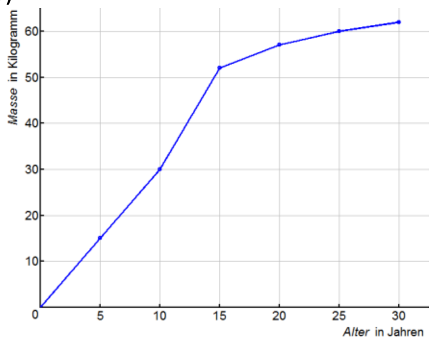
a)



b)



c)



a) ______________________________ in Abhängigkeit von ________________________________

b) ______________________________ in Abhängigkeit von ________________________________

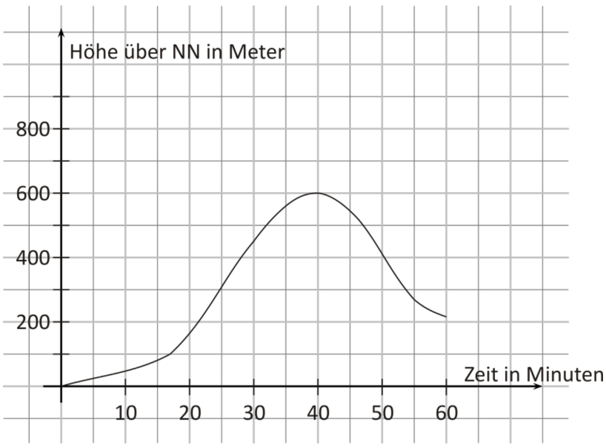
c) ______________________________ in Abhängigkeit von ________________________________

3. Gib die gewählten Einheiten auf der x- Achse und der y-Achse in den Diagrammen in Aufgabe 2 in der Form 1 cm ≙ … an.

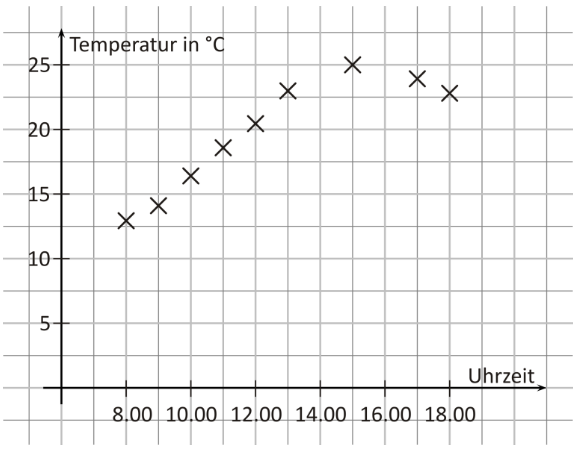
4. Lies aus den grafischen Darstellungen in Aufgabe 2 jeweils drei Wertepaare ab.

5. Lies jeweils den größten y-Wert und den bzw. die zugehörigen x-Werte ab und formuliere eine Aussage zu diesen Werten.

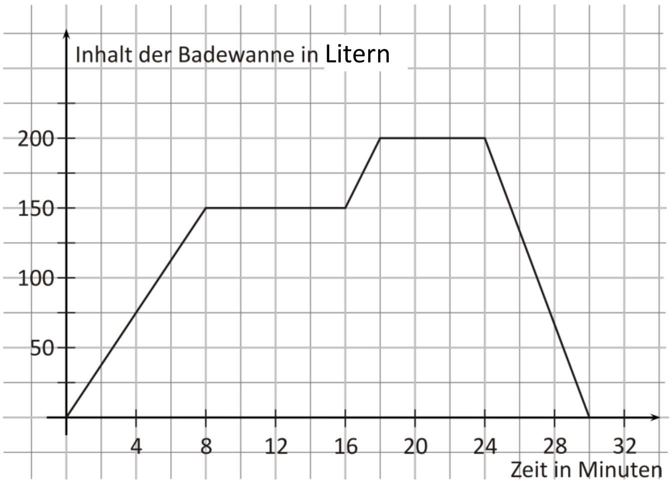
a)



b)



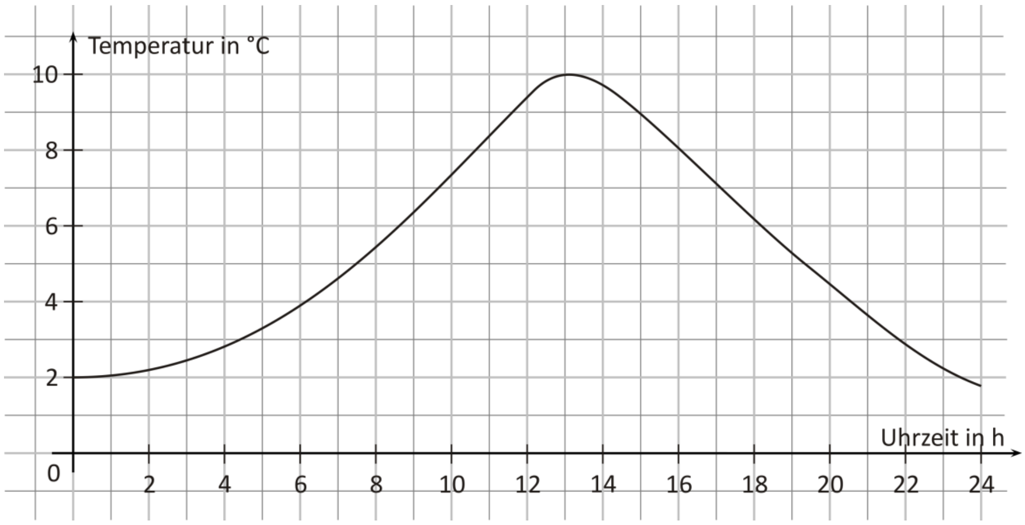
c)



6. Gib eine geeignete Einteilung einer Achse in einem Diagramm in der Form 1 cm ≙ … an, wenn auf der Achse folgende Werte dargestellt werden sollen.

a) Preis in €:	100	500	400	300	200
b) Länge in m:	6	21	9	27	12
c) Anzahl von Personen:	640	240	400	160	800

7. Beschreibe den dargestellten Temperaturverlauf in den folgenden Abschnitten:
a) von 2 Uhr bis 10 Uhr   b) von 10 Uhr bis 16 Uhr   c) von 16 Uhr bis 20 Uhr



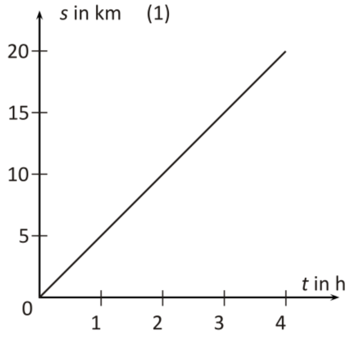
8. Vergleiche die Änderung der Temperatur im Diagramm von Aufgabe 7 in folgenden Zeiten

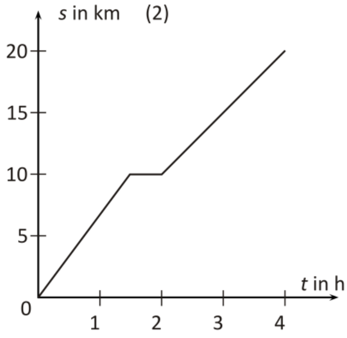
a) von 2 Uhr bis 4 Uhr und von 8 bis 10 Uhr

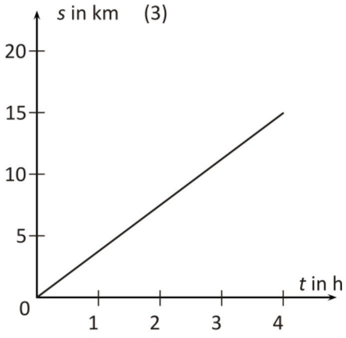
b) von 16 Uhr 17 Uhr und von 17 Uhr bis 18 Uhr

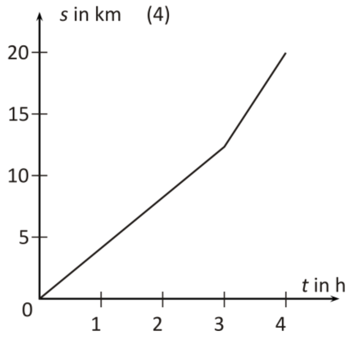
c) von 18 Uhr bis 20 Uhr und von 22 Uhr bis 24 Uhr

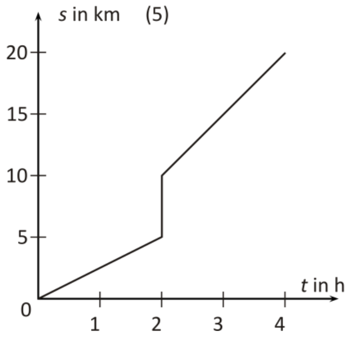
9. Jan ist in vier Stunden 20 km gewandert. Welche Diagramme passen zu dieser Beschreibung?

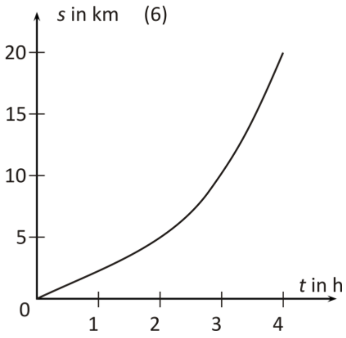










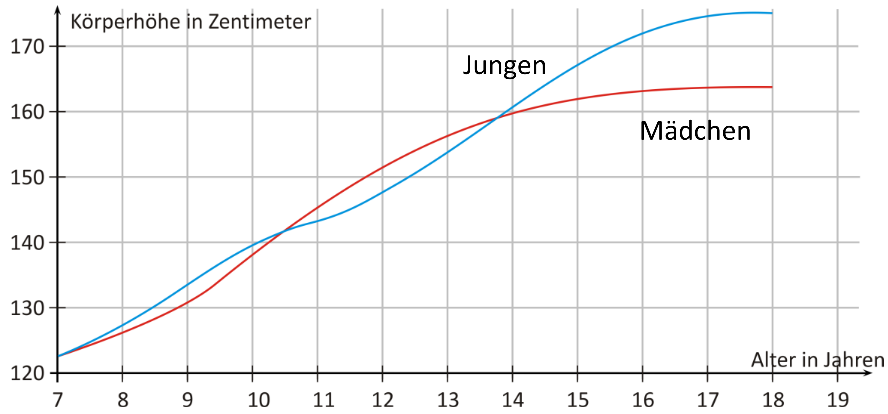


10. Vergleiche die Wachstumskurven von Jungen und Mädchen. Ergänze die folgende Sätze.

a) Im Alter von 8-10 Jahren …

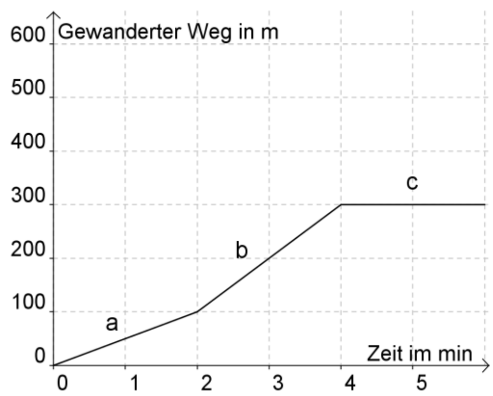
b) im Alter von 11-13 Jahren …

c) Eine durchschnittliche Körperhöhe von 150 cm ….



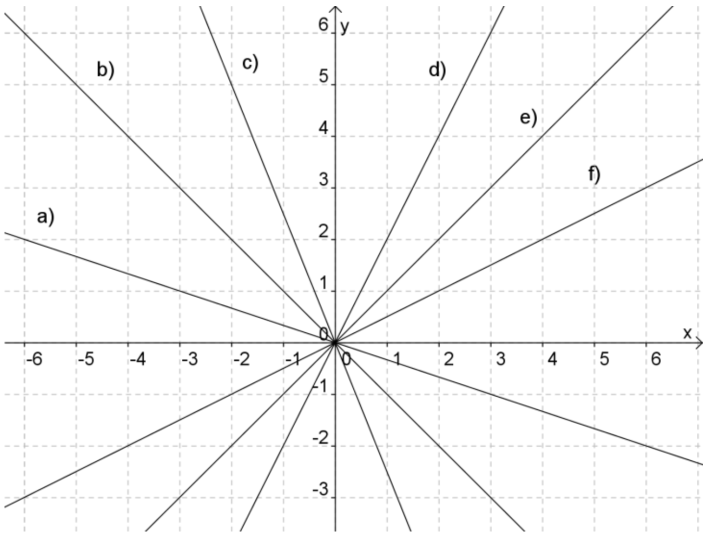
11. Ordne den Aussagen die richtigen Streckenabschnitte zu.

Aussage	Strecke
(1) Der Wanderer steht.	
(2) Der Wanderer geht schnell.	
(3) Der Wanderer geht langsam.	



12. Entscheide ob die Funktion, deren Graph abgebildet ist, fallend oder steigend ist. Kreuze jeweils an.

Funktion	fallend	steigend
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		
f)		



Dynamische Betrachtungen zu Formeln

21. Wie ändert sich in den folgenden Fällen der Umfang eines Rechtecks mit den Seiten a und b?

a) Die Seite a wird um 3 cm verlängert und b bleibt gleich.

b) Die Seite b wird um 2 cm verkürzt und a bleibt gleich.

c) Beide Seiten werden um 5 cm verlängert.

22. Wie ändert sich der Flächeninhalt eines Quadrats, wenn man

a) die Seitenlängen verdoppelt,

b) die Seitenlängen verdreifacht,

c) die Seitenlängen halbiert?

23. Wie ändert sich das Volumen eines Würfels, wenn man die Kantenlänge

a) verdoppelt, b) verdreifacht, c) halbiert?

24. Wie ändert sich das Volumen eines Quaders, wenn man

a) alle Kantenlängen verdoppelt,

b) alle Kantenlängen halbiert,

c) zwei Kantenlängen verdoppelt und die dritte gleich bleibt?

25. Welche der folgenden Aussagen trifft für ein Quadrat zu?

a) Bei Verdoppelung der Seitenlänge eines Quadrates verdoppelt sich auch der Flächeninhalt.

b) Bei Verdoppelung der Seitenlänge eines Quadrates vervierfacht sich der Umfang.

c) Der Flächeninhalt eines Quadrates vervierfacht sich, wenn man die Seitenlänge verdoppelt.

Nur gymnasialer Bildungsgang

26. Entscheide, ob folgende Aussagen für die jeweilige Funktion zutreffen. Kreuze jeweils an.

Aussage	y = 3x		y = 3x + 2	
	trifft zu	trifft nicht zu	trifft zu	trifft nicht zu
a) Wenn x um 1 wächst, wächst y um 3.				
b) Wenn x verdoppelt wird, verdoppelt sich auch y.				
c) Wenn x halbiert wird, wird auch y halbiert.				

27. Ordne den folgenden Aussagen entsprechende Graphen zu.

a) Wenn x wächst, wächst auch y.

b) Wenn x wächst, fällt y.

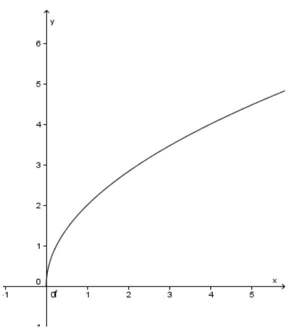
c) Mit wachsendem x wächst y immer stärker.

d) Mit wachsendem x wird der Zuwachs von y geringer.

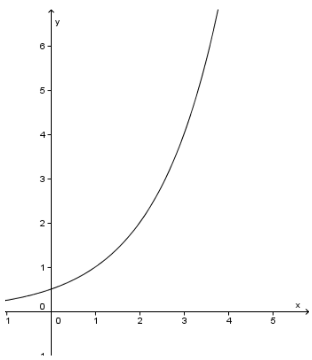
e) Mit wachsendem x wird die Abnahme von y geringer.

f) Mit wachsendem x wird die Abnahme von y immer größer.

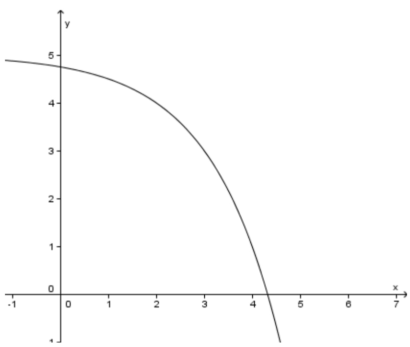
(1)



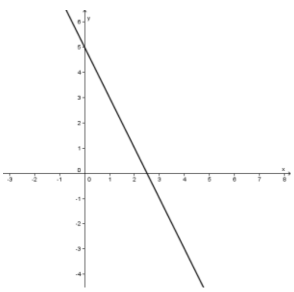
(2)



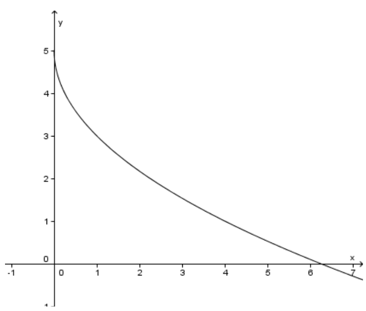
(3)



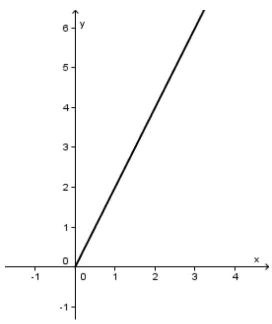
(4)



(5)



(6)



28. Vergleiche die Bedeutung der folgenden Wörter in der Mathematik und in der Umgangssprache.

a) Wachstum

b) Steigung

c) Monotonie

4 Zum Arbeiten mit proportionalen und umgekehrt proportionalen Zusammenhängen

4.1 Ausgewählte Probleme

Zur direkten Proportionalität

Durch die direkte Proportionalität können Zusammenhänge zwischen zwei Größen beschrieben werden. In der folgenden Übersicht sind Merkmale solcher Zusammenhänge dargestellt. Jedes Merkmal kann zur Definition der direkten Proportionalität verwendet werden.

1. Je *größer* die Werte der einen Größe, desto *größer* werden die der anderen Größe.

Wird der Wert einer Größe *verdoppelt*, so *verdoppelt* sich auch der zugehörige Wert der anderen Größe.

	Anzahl von Brötchen	Preis in €	
	1	0,25	
· 2	2	0,50	· 2
	3	0,75	

2. Alle Quotienten einander zugeordneter Werte sind gleich. Der Quotient entspricht dem Proportionalitätsfaktor k. (Quotientengleichheit)

Anzahl von Brötchen	Preis in €	k: Preis pro Brötchen in €
1	0,25	0,25
2	0,50	0,25
3	0,75	0,25

3. Der Wert der zugeordneten Größe ist immer das gleiche Vielfache des Wertes der ersten Größe.
Der stets gleiche Faktor heißt Proportionalitätsfaktor k. Es gilt die Gleichung $y = k \cdot x$.

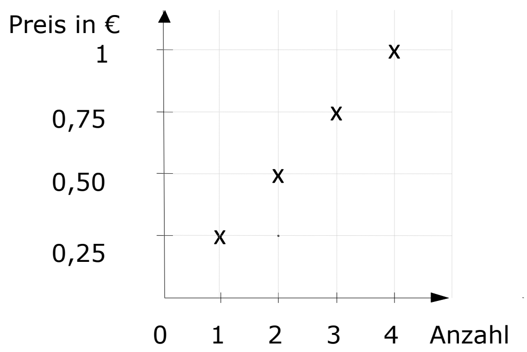
Anzahl der Brötchen — Preis in €

$$1 \xrightarrow{\cdot k} 0{,}25$$
$$2 \xrightarrow{\cdot k} 0{,}50$$
$$3 \xrightarrow{\cdot k} 0{,}75$$

4. Das Verhältnis von 2 Werten der einen Größe ist gleich dem Verhältnis entsprechender Werte der anderen Größe.

$$\frac{2}{3} = \frac{0{,}50\,€}{0{,}75€}$$

5. Wird der Zusammenhang graphisch dargestellt, so liegen alle Punkte auf einer Geraden, die durch den Koordinatenursprung verläuft und nicht mit den Achsen zusammenfällt.



Es sollte in der Regel die Bezeichnung „proportional“ verwendet, d. h. auf den Zusatz „direkt“ verzichtet werden. Dies entspricht dem üblichen Sprachgebrauch in der Mathematik, den Naturwissenschaften und dem späteren Mathematikunterricht. Auf das Zeichen ~ kann auch verzichtet werden, da es zu Verwechslungen führen kann (rund, ähnlich) und nicht unbedingt benötigt wird.

Die dynamischen Betrachtungen zur Veränderung einer Größe beim Verdoppeln, Halbieren usw. der anderen Größe (Merkmal 1) sind bei ganzzahligen Werten für die Schüler inhaltlich gut zu verstehen und können zum Nachweis der Proportionalität verwendet werden. Sie sind innermathematisch für das Verständnis des Dreisatzes wichtig, der auch eine Möglichkeit für die Berechnung von interessierenden Werten ist.

Aus fachübergreifender Sicht sollte die Konstanz (Gleichheit) eines bestimmten Verhältnisses als ein wesentliches Merkmal eines proportionalen Zusammenhangs herausgestellt werden (Merkmal 2). Als Verhältnis wird dabei der Bezug einer Größe auf eine Einheit der anderen angesehen, was die Formulierung „pro“ zum Ausdruck bringt. (z. B. Preis pro Kilogramm, Verbrauch pro 100 km, Weg pro Stunde). Dies muss nicht allgemein formuliert, sondern kann an Beispielen verdeutlicht werden.

Analog zu den Bedingungen eines gesetzmäßigen Zusammenhangs in den Naturwissenschaften ist die Konstanz des Proportionalitätsfaktors eine Bedingung für die Proportionalität des Zusammenhangs.

Beispiele:

- Der Preis für ein Getränk ist proportional zur Anzahl der Flaschen, wenn sich der Preis pro Flasche nicht ändert, unabhängig wie viel man kauft.
- Der Preis für ein Waschmittel ist nicht proportional zur gekauften Menge, da der Preis pro Kilogramm bei größeren Verpackungen geringer ist.
- Der Weg ist proportional zu der gefahrenen Zeit, wenn die Geschwindigkeit konstant bleibt.
- Der Fahrpreis eines Taxis ist nicht proportional zur Kilometerzahl, da der Preis pro Kilometer wegen eines festen Grundpreises nicht gleich bleibt.

Wenn sich die Gleichheit des Verhältnisses der Größen nicht aus dem Sachverhalt ergibt oder noch überprüft bzw. erst gefunden werden muss, müssen die Quotienten der zugeordneten Werte der Größen ermittelt werden. Die so überprüfte Quotientengleichheit dient also zum Nachweis der Proportionalität und kann dann zur Berechnung fehlender Werte der zugeordneten Größe genutzt werden. Weiterhin kann der Proportionalitätsfaktor in einigen Fällen als neue Größe interpretiert werden (z.B. als Geschwindigkeit, Leistung)

Das Merkmal 3 kann in vielen Fällen ebenfalls gut zur Feststellung der direkten Proportionalität verwendet werden. Es bereitet das Arbeiten mit Funktionsgleichungen vor und ist für die Anwendung der Proportionalität im Physikunterricht von Bedeutung. Dort werden proportionale Zusammenhänge meist durch Formeln ausgedrückt ($m = \rho \cdot V$, $s = v \cdot t$). Inhaltlich lässt sich das Merkmal weniger gut aus dem Sachverhalt ableiten, als die Merkmale 1 und 2. Es setzt zudem die Bestimmung des Proportionalitätsfaktors voraus, der oft nicht gegeben ist.

Das Verständnis für die Gleichheit von Verhältnissen aus je einer Größenart (Merkmal 4) ist für Schüler schwer zu verstehen. Es kann für den Nachweis der Proportionalität genutzt werden, sollte aber wegen des sehr formalen Charakters nicht weiter betrachtet werden.

Grafische Darstellungen (Merkmal 5) dienen der Vorbereitung des grafischen Könnens beim Arbeiten mit Funktionen und festigen die Fähigkeiten der Schüler beim Arbeiten mit Koordinatensystemen. Dieses Merkmal sollte daher oft in die Betrachtungen zur Proportionalität eingeschlossen werden, wobei darauf zu achten ist, dass in vielen Anwendungsbeispielen diskrete Werte wie z.B. Anzahlen benutzt werden, bei denen im Koordinatensystem nur Punkte gezeichnet werden dürfen. Die Gerade, auf der die Punkte liegen, ist nur ein gedankliches Objekt, das nicht eingezeichnet werden sollte.

Zum Verhältnisbegriff

Die Proportionalität ist eng mit dem Verhältnisbegriff verbunden. Es muss zwischen Verhältnissen von Werten der gleichen Größe (Maßstab, Mischungsverhältnis, Chancenverhältnis, Verhältnis von Anzahlen) und dem Verhältnis verschiedener Größen, das beim Proportionalitätsfaktor Anwendung findet, unterschieden werden.

In beiden Fällen bedeutet Proportionalität, dass zwei und mehr Verhältnisse gleich sind. Damit wird in diesem Stoffgebiet auf die Bruchrechnung aufgebaut, in der Brüche in verschiedenen Darstellungen als Anteile, Verhältnisse oder Quotienten gedeutet wurden.

Bei aller Schwierigkeit des Verhältnisbegriffes und der altersbedingten Probleme im proportionalen Denken kann auf diesen mathematisch wichtigen und praktisch bedeutsamen Begriff nicht verzichtet werden. Es bietet sich an, im Anschluss an seine Einführung in der Bruchrechnung eine weitere Etappe seiner Entwicklung im Stoffgebiet Proportionalität zu konzipieren, bei der besonders dynamische Betrachtungen und der Nachweis der Gleichheit von Verhältnissen im Sinne von Quotienten einander zugeordneter Werte zweier verschiedener Größen im Vordergrund stehen. In diesem Fall bedeutet der (ausgerechnete) Wert des Verhältnisses der Zahlenwerte der Größen, wie viel von der Größe im Zähler einer Einheit der Größe im Nenner entspricht. Dies wird durch die Verwendung der Formulierung „pro“ zum Ausdruck gebracht. Durch das Verhältnis wird praktisch eine Normierung der einen Größe in Bezug auf die andere vorgenommen.

Dynamische Betrachtungen erfordern kein proportionales Denken, da keine Verhältnisse verglichen werden. Sie stellen eine inhaltliche Grundlage für die Prozentrechnung und für das funktionale Denken dar. Da sie sowohl für den schnellen Umgang mit vorliegenden Wertepaaren in der Praxis, für das Verständnis der direkten Proportionalität als auch für die Dreisatzrechnung von Bedeutung sind, sollte diese Art der Bildung, Berechnung und Interpretation von Verhältnissen als sichere Grundfertigkeit ausgebildet werden.

Das Vergleichen von Verhältnissen unterschiedlicher Größen und damit das Arbeiten mit Verhältnisgleichungen sollte nur am Rande behandelt werden, da es inhaltlich verzichtbar ist und auf große Verständnisschwierigkeiten stößt. Bei der notwendigen Reaktivierung der Proportionalität in der 9. und 10. Klasse sollte eine entsprechende Erweiterung erfolgen.

Zur umgekehrten Proportionalität

Anstelle der Bezeichnung umgekehrte Proportionalität wird in Schulbüchern auch die Bezeichnung „indirekte Proportionalität“ oder Antiproportionalität“ verwendet. Wir empfehlen, das Begriffspaar proportional - umgekehrt proportional zu verwenden. Mit den Bezeichnungen „indirekt“ und „Anti…“ können fehlerhafte Gedankenverbindungen beim Schüler entstehen.

Die wesentlichen Merkmale der umgekehrten Proportionalität sind im Folgenden analog zu denen der direkten Proportionalität dargestellt:

1. Je *größer* die Werte der einen Größe, desto *kleiner* werden die der anderen Größe.

Wird der Wert einer Größe *verdoppelt*, *halbiert* sich auch der zugehörige Wert der anderen Größe.

	Anzahl von Katzen	Anzahl der Tage, für die das Futter reicht	
	1	18	
· 2	2	9	: 2
	3	6	

2. Alle Produkte einander zugeordneter Werte sind gleich. (Produktgleichheit)

Katzen	Tage	Produkt P: Futtervorrat in Tagesrationen
1	18	18
2	9	18
3	6	18

3. Der Wert der einen Größe ist immer das Produkt aus einer Konstanten (dem Produkt der beiden Größen) und dem Kehrwert der anderen Größe ist.

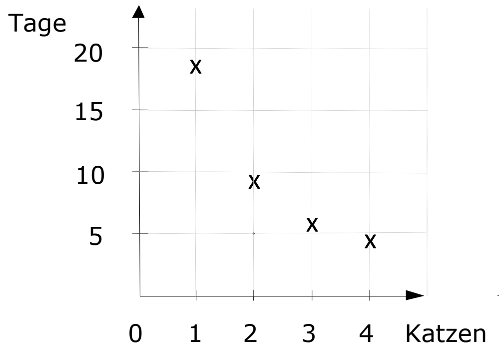
Es gilt allgemein die Gleichung $y = P \cdot \frac{1}{x}$

Katzen	Tage
1	18
2	$9 = 18 \cdot \frac{1}{2}$
3	$6 = 18 \cdot \frac{1}{3}$

4. Das Verhältnis von 2 Werten der einen Größe ist gleich dem umgekehrten Verhältnis entsprechender Werte der anderen Größe.

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

5. Wird der Zusammenhang graphisch dargestellt, so liegen alle Punkte auf einer gekrümmten Linie, die nicht die Achsen berührt.



Analog zu der direkten Proportionalität sollten im Unterricht dynamische Betrachtungen zu den Werten der Größen angestellt werden (Merkmal 1), wodurch sich auch die Bezeichnung „umgekehrte Proportionalität“ erschließt. Damit kann als erster Schritt festgestellt werden, ob es sich um einen umgekehrt proportionalen Zusammenhang handelt. Allerdings eignen sich diese Betrachtungen dann oft nicht so sehr für die Berechnung fehlender Größen, da die Schüler bei der Anwendung der „umgekehrten“ Rechnung sehr schnell durcheinander kommen können.

In den meisten Fällen geht es bei Aufgaben zur umgekehrten Proportionalität um den Zusammenhang zwischen drei Größen, wobei eine das Produkt der beiden anderen ist und konstant bleibt. Deshalb ist es zur Berechnung des gesuchten Wertes meist am günstigsten, auch hier die Frage zu beantworten „Was bleibt gleich?“, d. h. die Produktgleichheit zu verwenden (Merkmal 2).

Die Bedeutung des Produktes muss allerdings in den meisten Fällen erst aus dem Sachverhalt erschlossen werden, da in der Regel nur die zwei sich ändernden Größen gegeben sind. Bei Sachverhalten zur umgekehrten Proportionalität handelt sich meist um einen der in den folgenden Beispielen genannten Typen.

Auch bei umgekehrt proportionalen Zusammenhängen zwischen Größen sind die Bedingungen zu beachten, unter denen ein solcher Zusammenhang nur gilt. Sie werden oft nicht genannt bzw. nicht beachtet, wodurch die Aufgaben oft wenig realistisch sind.

Beispiele:

(1) Abhängigkeit der Zeit für einen bestimmten Weg bei verschiedenen gleichförmigen Geschwindigkeiten: Das Produkt aus Zeit und Geschwindigkeit ist der konstante Weg.

(2) Abhängigkeit des Geldbetrages, den eine Person erhält, wenn ein Betrag gleichmäßig auf eine unterschiedliche Anzahl von Personen aufgeteilt wird:
Das Produkt aus dem Geldbetrag für eine Person und der Anzahl der Personen ergibt den aufzuteilenden Betrag.

(3) Abhängigkeit der Zeit, die für die Verrichtung einer bestimmte Arbeit durch Menschen oder Maschinen erforderlich ist (z. B. Pflastern eine Straße, Mähen eines Feldes, Füllen eines Wasserbeckens), von der Anzahl der zur Verfügung stehenden Menschen bzw. Maschinen:
Das Produkt der beiden Größen entspricht der insgesamt zu verrichtenden Arbeit (z. B. Arbeitsstunden, Mähdreschertage, Pumpstunden).
Dabei wird in Aufgabenstellungen oft nicht beachtet, dass umgekehrte Proportionalität nur bei bestimmten Bedingungen vorliegt, z. B. wenn alle Menschen bzw. Maschinen die gleiche Arbeitsleistung erbringen und sich gegenseitig nicht behindern.

(4) Tage, die ein bestimmter Vorrat (z. B. Futtervorrat) reicht in Abhängigkeit von der Anzahl der davon zu versorgenden Lebewesen (z. B. Pferde):
Das Produkt aus beiden Größen ist die Anzahl der vorhandenen Tagesrationen für ein Lebewesen. Auch hier muss vorausgesetzt werden, dass alle Lebewesen jeden Tag die gleiche Tagesration verbrauchen.

Bei diesen Aufgaben ist es sinnvoll, direkt die Gleichheit der Produkte zweier Größen zu untersuchen, seine inhaltliche Bedeutung zu erschließen und die jeweils gesuchte Größe aus dem konstanten Produkt durch Division zu berechnen.

Da das Arbeiten mit den Merkmalen 3 und 4 im Vergleich zur direkten Proportionalität noch schwieriger ist und inhaltliche Bezüge zum Sachverhalt kaum noch ersichtlich sind, sollte auf die Verwendung dieser Merkmale zur Charakterisierung der umgekehrten Proportionalität verzichtet werden.

Bei der umgekehrten Proportionalität handelt es sich um einen nichtlinearen Zusammenhang. Die Funktion $f(x) = a \cdot x^{-1}$ wird erst im Rahmen der Potenzfunktionen in der 9. oder 10. Klasse als Spezialfall behandelt. Die Kenntnisse über die funktionale Charakterisierung und die grafische Darstellung dieser Funktion werden im Unterschied zur linearen Abhängigkeit im Falle direkter Proportionalität im folgenden Mathematikunterricht also kaum benötigt.

Zum Lösen von Sachaufgaben zur Proportionalität

Bei allen entsprechenden Sachaufgaben muss zunächst die Art des Zusammenhangs zwischen den Größen untersucht werden. Dazu gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten. Man kann zum einen einander zugeordnete Wertepaare betrachten und sich fragen: "Was bleibt gleich, der Quotient oder das Produkt der beiden Größen?" Die zweite Möglichkeit wäre die Durchführung dynamischer Betrachtungen. Diese sollten generell mit der Frage beginnen: "Wie ändert sich die eine Größe bei Änderung der anderen?“ Diese dynamischen Betrachtungen sollten zunächst qualitativ erfolgen, indem Formulierungen der Form „Je … desto …“ verwendet werden. Diese Betrachtungen zur Monotonie sind zur Feststellung des Zusammenhanges notwendig aber nicht hinreichend und müssen deshalb durch quantitative dynamische Betrachtungen der folgenden Art ergänzt werden: "Wie ändert sich die eine Größe, wenn ich die andere verdopple oder halbiere?“ Diese beispielhaften quantitativen Überlegungen sollten als hinreichende Kriterien angesehen werden.

Es sollte darauf verzichtet werden, eine vollständige Orientierungsgrundlage zum Lösen der Sachaufgaben zu vermitteln, die sämtliche Möglichkeiten und Einzelschritte für das Lösen von Sachaufgaben zur direkten und indirekten Proportionalität erfasst. Eine solche Handlungsvorschrift wäre auf Grund des begrenzten Aufgabenfeldes zwar möglich, ist aber nicht zweckmäßig, da die Vorschrift infolge der zahlreichen Verzweigungen sehr unübersichtlich ist, der Eindruck entsteht, dass das Lösen von Sachaufgaben zur Proportionalität nach Vorschrift erfolgen kann und von den verschiedenen Lösungsmöglichkeiten nur eine genannt werden kann.

Die Orientierungen zum Lösen von Aufgaben zur Proportionalität sollten in die allgemeinen Schritte zum Lösen von Sachaufgaben, die die Schüler aus dem bisherigen Unterricht kennen, eingeordnet werden. Dazu sollten spezielle Hinweise zum Finden von Lösungsideen gegeben werden.

Zur Verwendung des Dreisatzes

Sachaufgaben zur direkten Proportionalität sollten vor allem mit dem Dreisatz gelöst werden. Die Anwendung des Dreisatzes bzw. das so genannte *isomorphe Schließen* beim Lösen von Sachaufgaben ist eine elementare und grundlegende Lösungsmethode, die den Schülern bereits aus der Grundschule bekannt ist (dort oft als Schließen von einer Vielheit auf eine andere Vielheit bezeichnet). Sie sollte durch die Schüler im Stoffgebiet Proportionalität wiederholt und sicher angeeignet werden. Das Arbeiten mit dem Dreisatz sollte deshalb möglichst bereits zu Anfang des Stoffgebietes eingeführt und im Laufe seiner Behandlung ständig gefestigt werden.

Das allgemeine Vorgehen bei der Anwendung des Dreisatzes, das auch für andere Stoffgebiete (z. B. Prozentrechnung) von Bedeutung ist, besteht in folgenden Schritten:

- Der so genannte erste Satz bedeutet ein Ausgehen vom Gegebenen (Vorwärtsarbeiten) und stellt die Beziehung zwischen einem gegeben Größenpaar dar.
- Der wesentliche Gedanke des zweiten „Satzes“ besteht in der Rückführung auf eine Einheit einer der Größen (bzw. eines geeigneten Vielfachen dieser Einheit). Dabei orientiert man sich im Sinne eines zielgerichteten Arbeitens an der Größe, von der zwei Werte bekannt sind und auch an dem konkreten dritten Wert.
- Der dritte „Satz“ beinhaltet den Übergang von der ermittelten Einheit der einen Größe (und dem ihr zugeordneten Wert der anderen Größe) zu einem bestimmten Vielfachen dieser Größe.

Sachaufgaben zur umgekehrten Proportionalität sollten möglichst nicht mit dem Dreisatz gelöst werden, sondern durch Betrachtung des Produktes der beiden Größen.

4.2 Sicheres Wissen und Können

Bei den folgenden Forderungen an das sichere Wissen und Können wird stets vorausgesetzt, dass es sich bei außermathematischen Anwendungen um Zusammenhänge aus der Erfahrungswelt der Schüler handelt.

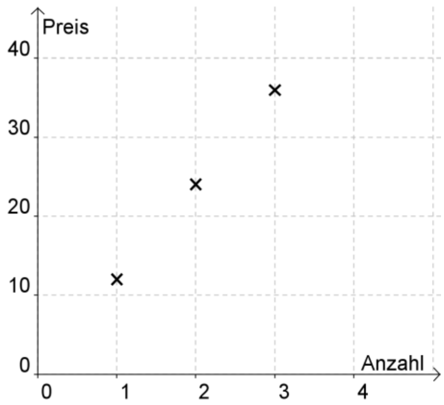
Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass bei der grafischen Darstellung eines proportionalen Zusammenhanges alle Punkte auf einer Geraden liegen, die durch den Ursprung geht und können grafische Darstellungen proportionaler Zusammenhänge identifizieren,
- können einen proportionalen Zusammenhang durch qualitative und quantitative dynamische Betrachtungen identifizieren,
- wissen, dass die Proportionalität zwischen Größen immer nur unter bestimmten Bedingungen gilt,
- können begründen, warum ein Zusammenhang zwischen zwei Größen nicht proportional ist, wenn dieser Zusammenhang in Worten, als Tabelle oder als Graph gegeben ist,
- können Bedingungen dafür angeben, dass zwischen zwei Größen ein proportionaler Zusammenhang besteht,
- können bei proportionalen Zusammenhängen von einer Vielheit auf eine Einheit, von einer Vielheit auf eine andere Vielheit direkt oder über eine Einheit oder eine andere Vielheit (Dreisatz) schließen, wenn die Rechnungen im Kopf auszuführen sind,
- können einen Proportionalitätsfaktor bei gegebenen Werten der Größen berechnen, wenn das im Kopf möglich ist und ihn für typische Sachsituationen deuten.

4.3 Aufgaben

1. Können die Graphen proportionale Zusammenhänge darstellen? Kreuze jeweils an.

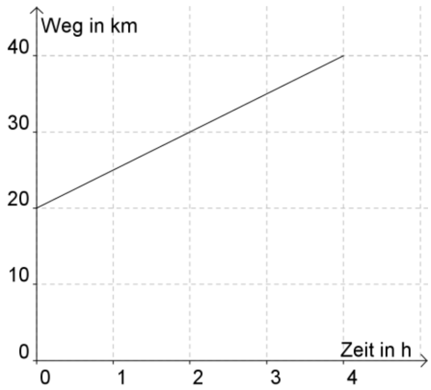
a)



ja : ☐

nein: ☐

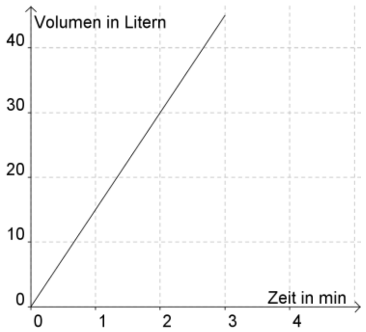
b)



ja : ☐

nein: ☐

c)



ja : ☐

nein: ☐

2. Die Größen sollen proportional zueinander sein.
Markiere jeweils das Wertepaar farbig, das nicht in die proportionale Zuordnung gehört.

a)

Strecke in km	**Diesel-ver-brauch** in l
0	0
20	1
50	2
60	3
80	4

b)

Nach-hilfe in h	**Preis** in €
1	8
2	16
3	24
4	30
5	40

c)

Katzen Anzahl	**Katzenfutter** in g
0	0
5	1250
10	3000
15	4500
20	6000

3. Trage fehlende Werte so ein, dass die beiden Größen in den Tabellen direkt proportional zueinander sind. Fülle danach jeweils die Lückentexte aus.

a)

Anzahl der Kühe	10	20		80
gelieferte Milch, in Litern	250	500	1000	2000

Je mehr ____, desto

____.

Wenn sich ____ verdoppelt, so

____.

b)

Zeit, in h	0	1	2	4	8
zurückgelegte Strecke, in km	0	80	160	320	

Je mehr____, desto

____.

Wenn sich ____ verdoppelt,

dann ____.

c)

Anzahl der Getränkeflaschen	1	3	9	27
Pfand für die Flaschen, in €	0,25	0,75		6,75

Je mehr____, desto

____.

Wenn sich ____ verdreifacht,

so ____.

4. Vervollständige die Aussagen.

a) Wenn 5 kg Äpfel 10 € kosten, dann bezahlt man für 1 kg Äpfel der gleichen Sorte _______ €.

b) Wenn man 5 km in 20 Minuten zurücklegt, dann wandert man bei gleich bleibender Geschwindigkeit 10 km in _______ Minuten.

c) Wenn man auf einer Strecke von 1000 km 60 Liter Benzin benötigt hat, kann man bei gleicher Fahrweise mit _______ Litern pro 100 km rechnen.

5. Welche der folgenden Zusammenhänge zwischen den Größen 1 und 2 sind **sicher nicht** direkt proportional zueinander? Gib in diesen Fällen jeweils eine Begründung an.

Größe 1	Größe 2	Begründung, wenn **nicht** direkt proportional
Anzahl von Wasserflaschen	Preis für die Flaschen	
Alter eines Menschen	Größe dieses Menschen	
Brenndauer einer Kerze	Länge der Kerze	
Anzahl der Töne in einem Musikstück	Dauer des Musikstücks	
Flugzeit	zurückgelegte Flugstrecke	
Anzahl der Arbeiter zum Pflastern eines Weges	Zeit für das Pflastern des Weges	
Anzahl der Arbeitsstunden	Lohnkosten	

6. Unter welchen Bedingungen sind die folgenden Zusammenhänge zwischen den Größen 1 und 2 direkt proportional zueinander? Gib die Bedingung an.

Größe 1	Größe 2	Bedingung für direkte Proportionalität
Anzahl von Wasserflaschen	Preis für die Flaschen	
Zeit, die eine Frau an einer Decke strickt	Anzahl der gestrickten Reihen der Decke	
Dauer der Internetnutzung	Preis für die Internetnut-zung	
Anzahl der Töne in einem Musikstück	Dauer des Musikstücks	
Flugzeit	zurückgelegte Flugstrecke	
Anzahl der Arbeiter zum Pflastern eines Weges	Länge der Straße, die gepflastert wird	
Anzahl der Arbeitsstunden	Lohnkosten	

7. Berechne die fehlenden Werte der proportionalen Zuordnung.

a)

Anzahl	Preis (€)
1	4,00
5	

b)

Anzahl	Preis (€)
3	2,50
12	

c)

Anzahl	Preis (€)
6	1,20
48	

d)

Anzahl	Preis (€)
12	33
4	

e)

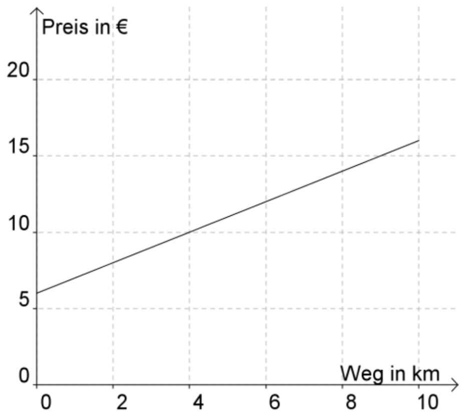
Anzahl	Preis (€)
21	4,20
3	

f)

Anzahl	Preis (€)
45	6,30
5	

8. Die folgenden Zuordnungen sind **nicht** proportional zueinander. Gib eine Begründung an.

a)



Begründung:

____

____

b)

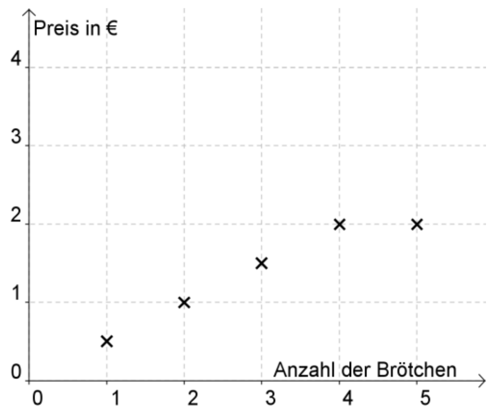
erreichtes Level bei einem Computerspiel	Dauer des Computerspiels in min
0	0
1	10
2	20
3	40
4	80

Begründung:

____

____

c)



Begründung:

____

____

d)

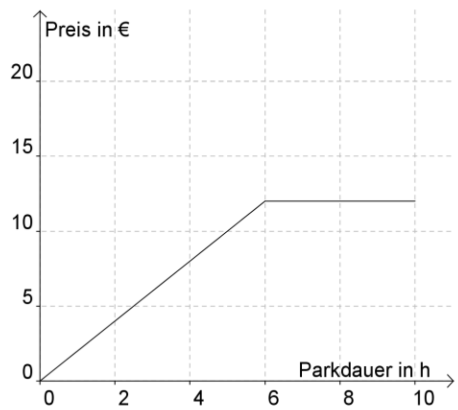
Dauer der Telefonverbindungen im Monat in h	Preis in €
0	9,99
10	9,99
20	9,99
30	9,99
40	9,99

Begründung:

____

____

e)



Begründung:

____

____

f)

Brötchen	Preis in €	Preis pro Brötchen
1	0,20	0,20
2	0,40	0,20
3	0,60	0,20
4	0,80	0,20
5	0,55	0,11
6	1,20	0,20

Begründung:

____

____

9. Bestimme für die folgenden proportionalen Zusammenhänge den Proportionalitätsfaktor. Gib seine Bedeutung für den Sachverhalt an.

a)

Zeit in h	Weg in km	Weg/Zeit in km/h
2	100	
4	200	
6	300	
8	400	

Der Quotient aus Weg und Zeit gibt an

____

____

b)

Arbeits-zeit in h	Lohn in €	Lohn/Arbeits-zeit in €/h
5	35	
10	70	
20	140	
50	350	

Der Quotient aus Lohn und Arbeitszeit gibt an

____

____

c)

Masse in kg	**Preis** in €	**Preis/Masse** in €/kg
2	4	
5	10	
7	14	
8	16	

Der Quotient aus Preis und Masse gibt an

____

____

10. Berechne die fehlenden Werte möglichst vorteilhaft. Es handelt sich um proportionale Zuordnungen.

a) 5 kg Mandarinen kosten 5,50 €. 3 kg dieser Mandarinen kosten dann __________€.

b) Für 9 Stunden Arbeit erhält Monika 99 €. Für 5 Stunden dieser Arbeit bekommt sie _________€.

c) In 4 Stunden werden 40 km zurückgelegt. In 6 Stunden werden dann ________ km zurückgelegt.

11. Markiere die Sachaufgaben farbig, die du mit dem Dreisatz lösen kannst.

Paul kauft 2 kg Äpfel für 1,99 € und 3 kg Kartoffeln für 2, 79 €.

Reichen 5 €?

Max hat gestern für 3 kg Äpfel 4,77 € bezahlt. Heute soll er 2 kg derselben Sorte holen. Wie viel muss er bezahlen?

Unser Auto verbraucht auf 100 km ungefähr 7 l Benzin. Wie viele Liter Benzin werden wir auf einer Fahrt von 750 km benötigen?

20 Schokoriegel sollen gerecht auf 8 Kinder aufgeteilt werden. Wie würdest du das machen?

Zwei Katzen fressen am Tag zusammen 1 Dose Futter. Wie viele Dosen braucht ein Tierheim am Tag, wenn dort 28 Katzen leben?

5 Zum Arbeiten mit linearen Funktionen

5.1 Ausgewählte Probleme

Zur Einführung der Bedeutung des Wortes „Funktion" in der Mathematik

Unmittelbar vor der Behandlung der linearen Funktionen in Klasse 8 wird mit den Schülern die Bedeutung des Wortes „Funktion" in der Mathematik erarbeitet. Dabei sollte an die bisherige Entwicklung der inhaltlichen Vorstellungen zum Funktionsbegriff in den Entwicklungsphasen 1 – 3 (vgl. S. 5/6) angeknüpft werden.

Es sollte deshalb vor den linearen Funktionen in einem entsprechenden zeitlichen Umfang eine möglichst aspektreiche Ausbildung des Funktionsbegriffs beim Schüler erfolgen (vgl. Kap. 2), wobei insbesondere an die Entwicklungsphase im Zusammenhang mit der Behandlung der direkten und umgekehrten Proportionalität angeknüpft werden sollte.

Zur Anknüpfung an das Wissen und Können zur Proportionalität

Direkt proportionale Zusammenhänge können mit Gleichungen der Form $y = mx$ mit $m > 0$ und $x \geq 0$ beschrieben werden. Um eine enge Verbindung zum Wissen und Können der Schüler zur Proportionalität herzustellen, sollte im Unterschied zur üblichen Vorgehensweise in vielen Schulbüchern bei der Behandlung der Funktion $y = mx$ zunächst eine Beschränkung auf $m > 0$ vorgenommen werden. Eine Funktion $y = mx$ mit $m < 0$ kann nicht als proportionaler Zusammenhang angesehen werden, da mit wachsendem x die y-Werte kleiner werden. Es gibt weiterhin kaum praktische Beispiele für Zusammenhänge, die durch eine Gleichung $y = mx$ mit $m < 0$ beschrieben werden können. Negative Anstiege sind aus Sicht der Anwendungen erst bei Funktionen mit der Gleichung $y = mx + n$ sinnvoll. Außerdem kann so eine schrittweise Steigerung der Anforderungen erfolgen.

Zur grafischen Darstellung von linearen Funktionen

Die grafische Darstellung linearer Funktionen sollte vor allem unter Verwendung der Bedeutung des Anstiegs erfolgen, um die Schüler an dynamische Betrachtungen zu gewöhnen. Dazu muss der Begriff des Anstiegsdreiecks allgemein und sicher angeeignet werden. Außer den oft verwendeten dynamischen Begriffen Anstieg, wachsen und fallen, sollten zur sprachlichen Vielfalt auch die synonymen Begriffe Steigung, steigen, vergrößern, größer werden, kleiner werden, verringern oder sinken verwendet werden.

Zum Begriff der linearen Funktion

Oft wird die Funktion $y = n$ als Spezialfall einer linearen Funktion angesehen. Dies ist aus fachlicher Sicht nicht gerechtfertigt. Die linearen Funktionen sind ein Spezialfall der Polynomfunktionen. Die Gleichung einer Polynomfunktion (bzw. eines Polynoms oder einer ganzrationalen Funktion) n-ten Grades lautet. $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ mit a_i, $x \in R$ und $a_n \neq 0$. Eine Funktion mit der Gleichung $y = mx + n$ ist ein Polynom 1. Grades, wenn $m \neq 0$ ist. Die Funktion $y = n$ ist ein Polynom 0. Grades.

Auch bei einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ mit $x \in R$ (einem Polynom 2. Grades) muss $a \neq 0$ vorausgesetzt werden, d. h. eine lineare Funktion ist auch kein Spezialfall einer quadratischen Funktion.

5.2 Sicheres Wissen und Können

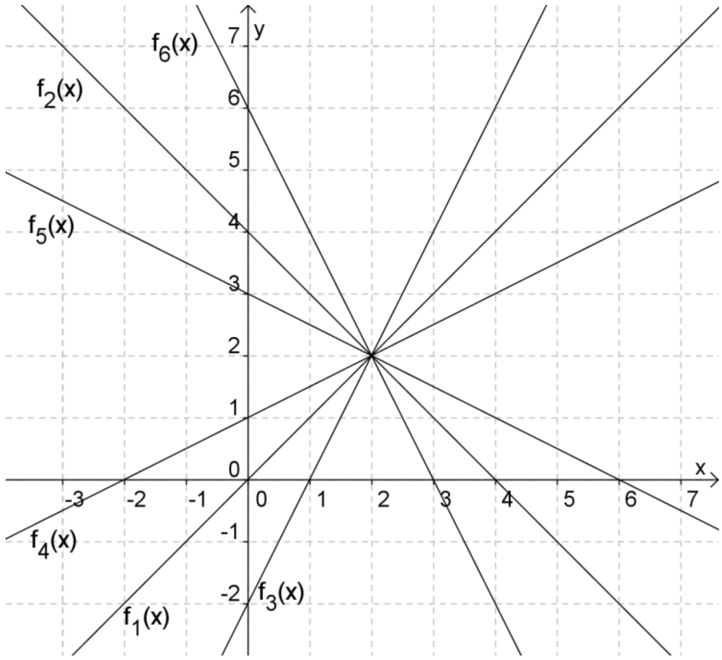
Die Schülerinnen und Schüler

- kennen den Begriff Anstieg einer linearen Funktion
- können in einfachen Fällen entscheiden, ob ein Zusammenhang zwischen zwei Größen durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann,
- können aus der grafischen Darstellung einer linearen Funktion bzw. eines linearen Zusammenhangs mithilfe des Anstiegsdreiecks den Anstieg der Funktion (bei Sachverhalten auch mit Einheit) bestimmen,
- können durch Einsetzen in die Funktionsgleichung entscheiden, ob ein gegebener Punkt auf dem Graphen einer gegebenen linearen Funktion liegt,
- können die Funktionswerte einer linearen Funktion für ein gegebenes Argument aus dem Bereich der rationalen Zahlen bestimmen,
- können bei einer gegebenen Funktionsgleichung den Anstieg der Funktion angeben,
- können bei einer gegebenen Funktionsgleichung den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ angeben,
- können zu einem gegebenen Graphen einer linearen Funktionen die Funktionsgleichung angeben,
- können den Graphen einer linearen Funktion mithilfe des Anstiegsdreiecks zeichnen,
- können die Nullstelle einer linearen Funktion bestimmen.

5.3 Aufgaben

1. Bestimme jeweils den Anstieg der dargestellten linearen Funktion.

Funktion	Anstieg
$f_1(x)$	
$f_2(x)$	
$f_3(x)$	
$f_4(x)$	
$f_5(x)$	
$f_6(x)$	



2. Die folgenden Zusammenhänge zwischen zwei Größen können durch eine lineare Funktion beschrieben werden. Gib die beiden Größen und den Anstieg der Funktion in Worten an.

Sachverhalt	**Größe X**	**Größe Y**	**Anstieg**
Beispiel: Der LKW fährt in jeder Stunde 80 km.	Fahrzeit	Fahrweg	80 km pro Stunde
a) Für jede Ananas muss man 2 € bezahlen.			
b) Der Heizölvorrat nimmt jede Woche um 100 l ab.			
c) Die Einwohnerzahl nimmt jedes Jahr um 100 zu.			
d) Für 100 km verbraucht ein Auto 5 Liter.			
e) Das Rad macht 30 Umdrehungen pro Minute.			
f) Die Kerze wird in 2 Stunden um 4 cm kürzer.			

3. Gehören die folgenden Punkte zum Graphen der Funktion $y = 3x$?

a) $P_1(2; 6)$ b) $P_2(7; 20)$ c) $P_3(1{,}5; 4{,}5)$

d) $P_4(4{,}5; 12{,}5)$ e) $P_5(-3; 9)$ f) $P_6(-1; -3)$

4. Berechne für die lineare Funktion $y = f(x) = 2x - 4$ die folgenden Funktionswerte.

a) $f(7)$ b) $f(2)$ c) $f(-5)$ d) $f(-1)$ e) $f(-3)$ f) $f(0)$

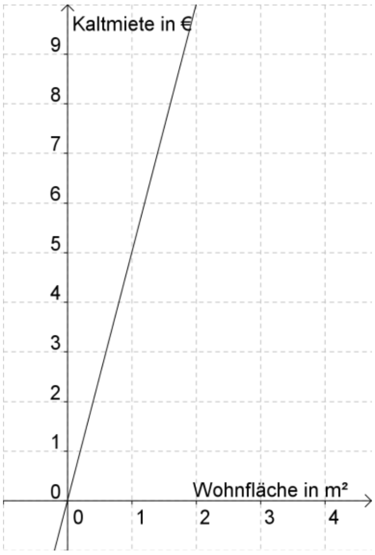
5. Gib jeweils den Anstieg der folgenden Funktionen an.

a) y = 3x   b) y = 1,5x   c) y = 6x

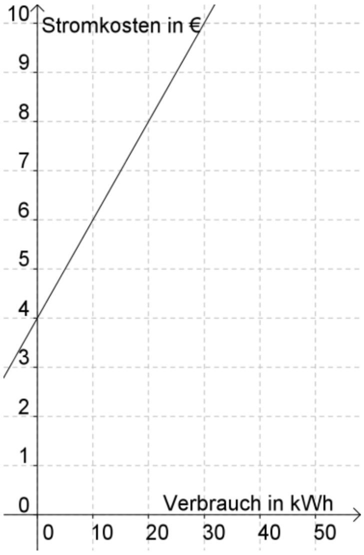
d) y = − 2x   e) y = 0,5x   f) y = − 3x

6. Bestimme den Anstieg der linearen Funktionen (mit Einheit).

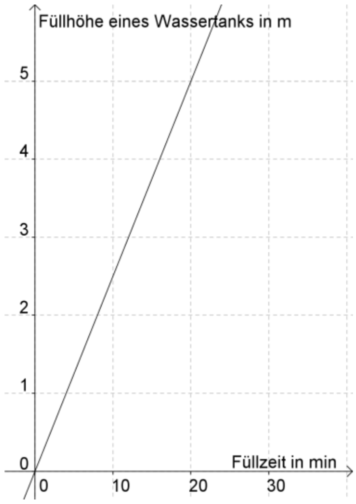
a)



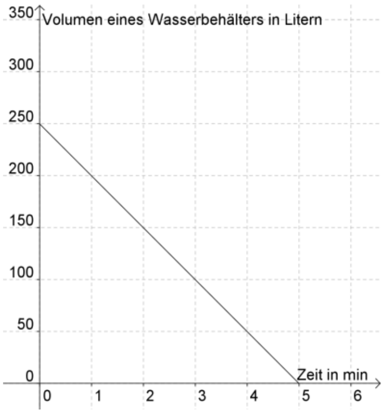
b)



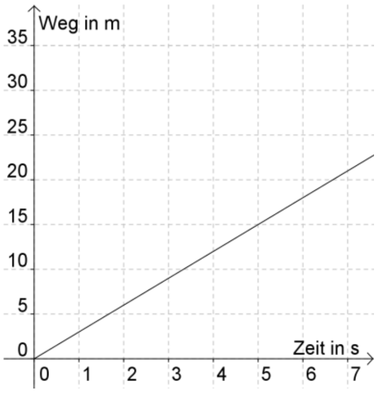
c)



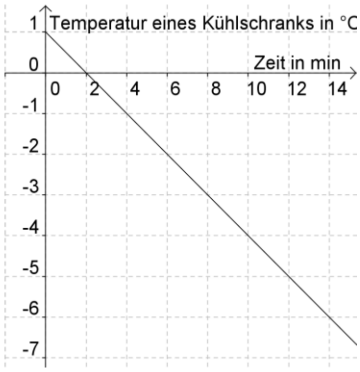
d)



e)



f)



7. Gib für die folgenden Funktionen den Funktionswert für x = 0 an.

a) f(x) = − 2x + 3   b) g(x) = 0,5x − 1,5   c) h(x)= x – 4

8. Stelle die Funktionen grafisch dar. Nutze jeweils ein geeignetes Steigungsdreieck.

a) y = 2x – 3   b) y = − x + 2,5   c) y = 3x – 1,5

d) y = 0,5x – 5   e) y = − 1,5x + 4   f) y = − 3x + 4,5

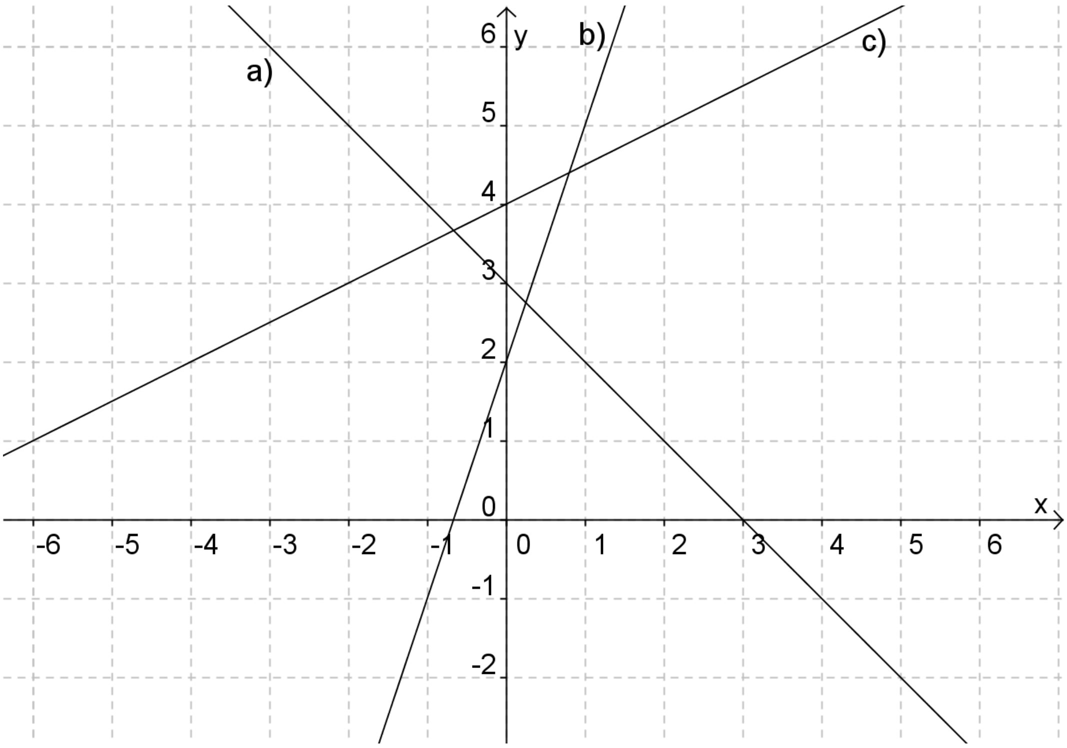
9. Bestimme die Nullstellen der linearen Funktionen rechnerisch.

a) f(x) = 2x – 3   b) f(x) = − x + 2,5   c) f(x) = 3x – 1,5

d) f(x) = 0,5x – 5   e) f(x) = − 1,5x + 4   f) f(x) = − 3x + 4,5

10. Ermittle für die dargestellten linearen Funktionen die Funktionsgleichung y = mx + n.
Fülle die Tabelle aus.

	m	n	Funktionsgleichung
a)			y =
b)			y =
c)			y =



11. Gib die Funktionsgleichung der linearen Funktionen an und zeichne die Graphen in das Koordinatensystem.

	m	n	Funktionsgleichung
d)	2	− 1	y =
e)	1	− 1	y =
f)	− 0,5	− 0,5	y =

6 Zum Arbeiten mit quadratischen Funktionen

6.1 Ausgewählte Probleme

Beschreibung von Zusammenhängen durch quadratische Funktionen

Für quadratische Funktionen gibt es im Unterschied zu den linearen Funktionen viel weniger Zusammenhänge zwischen Größen, die in für Schüler verständlicher Weise beschrieben werden können. Das Hauptanwendungsfeld sind neben den Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Quadraten und Kreisen die beschleunigten Bewegungen, die im Physikunterricht systematisch aber erst in der 10. Klasse behandelt werden.

Trotzdem sollten exemplarisch gegebene Daten (Messreihen) zu quadratischen Zusammenhängen bei Bewegungsvorgängen untersucht und durch quadratische Funktionen modelliert werden.

Zur Reihenfolge der Behandlung von quadratischen Gleichungen und quadratischen Funktionen

Die quadratischen Gleichungen sollten aus folgenden Gründen vor den quadratischen Funktionen behandelt.

- Auf diese Weise kann die Eigenständigkeit der Entwicklung des Könnens im Lösen von Gleichungen stärker hervorgehoben werden. Der mathematische Bezug zu den quadratischen Funktionen kann auch nach deren Behandlung erarbeitet werden.
- In der Kl. 8 wurden auch zuerst die linearen Gleichungen und dann die linearen Funktionen behandelt. Es sollte in Kl. 9 eine möglichst weitgehende Analogie zwischen der Behandlung der Gleichungen bzw. Funktionen angestrebt werden.
- Das Lösen quadratischer Gleichungen ist einfacher als die Bearbeitung der oft komplexen Probleme im Zusammenhang mit quadratischen Funktionen.
- Durch die Behandlung quadratischer Gleichungen können einige Elemente bei der Behandlung quadratischer Funktionen vorbereitet werden (Diskriminante, quadratische Ergänzung, Nullstellenberechnung). Die Zusammenhänge zwischen quadratischen Gleichungen und quadratischen Funktionen können dann im Zusammenhang mit der Berechnung von Nullstellen der quadratischen Funktionen erarbeitet und auch in den gemischten Übungen gefestigt.

Zur Bestimmung der Koordinaten des Scheitelpunktes quadratischer Funktionen aus der Normalform

Zur Bestimmung der Scheitelpunktskoordinaten aus der Normalform gibt es drei Möglichkeiten:

(1) Überführung in die Scheitelpunktsform mithilfe der quadratischen Ergänzung

(2) Verwenden der allgemeinen Formeln zur Berechnung der Koordinaten

(3) Berechnen der x-Koordinate mit dem Term $-\frac{p}{2}$ und der y-Koordinate als Funktionswert $f(-\frac{p}{2})$.

Die erste Möglichkeit sollte nicht verwendet werden, da bei der Behandlung quadratischer Gleichungen keine Fertigkeiten im Bestimmen der quadratischen Ergänzung ausgebildet wurden und die Rechnungen zudem sehr fehleranfällig sind.

Wenn ein Tafelwerk zur Verfügung steht, können die allgemeinen Formeln verwendet werden, was in Vorbereitung der Abschlussprüfungen sinnvoll ist.

Am einfachsten ist die Verwendung der dritten Möglichkeit. Die Berechnung des Term $-\frac{p}{2}$ ist bei der Lösungsformel für quadratische Gleichungen geübt worden. Der Zusammenhang mit der Lösungsformel ist grafisch leicht einsichtig, wenn die Nullstellen existieren und die Berechnung von Funktionswerten ist ohnehin eine notwendige Grundhandlung.

Die dritte Möglichkeit lässt sich auch auf den Fall der allgemeinen Form einer quadratischen Funktion übertragen. Die x-Koordinate des Scheitelpunktes ist in diesem Fall $-\frac{b}{2a}$. Bei Anwendung dieser Vorgehensweise sollte zuerst die Nullstellenberechnung vorgenommen werden. Die dabei zu berechnenden Terme $-\frac{p}{2}$ bzw. $-\frac{b}{2a}$ können dann als x-Koordinate des Scheitelpunktes verwendet werden.

Beziehungen von linearen und quadratischen Funktionen

Bei der Behandlung der quadratischen Funktionen können folgende Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu linearen Funktionen betrachtet werden. Damit können die Kenntnisse der Schüler zu Eigenschaften von Funktionen wie z.B. der Einfluss von Parametern auf den Graphen systematisch entwickelt werden.

- Die Graphen beider Funktionen sind besondere geometrische Linien (Kurven), die einen eigenen Namen haben (Gerade bzw. Parabel). Mit den Funktionsgleichungen können deshalb auch diese Kurven beschrieben werden.
- In den Funktionsgleichungen treten neben den Variablen x und y weitere Variable auf, die Parameter heißen. Bei linearen Funktionen sind dies m und n und bei quadratischen a, b, c, d, e, p und q. Von ihnen hängt der Verlauf der Graphen ab.
- Es gibt eine Normalparabel, aber keine „Normalgerade“, da alle Graphen linearer Funktionen die gleiche geometrische Form haben. Bezüglich der Lage im Koordinatensystem spielt aber der Graph von $y = x$ die Rolle einer „Normalgerade“, da sich alle anderen Graphen der linearen Funktionen durch Verschieben oder Strecken/Stauchen aus dieser Geraden ergeben.
- Der Parameter m bewirkt wie der Parameter a eine Streckung bzw. Stauchung des Graphen bezüglich der x-Achse.
- Unterscheiden sich die Anstiege m und die Parameter a je zweier linearer bzw. quadratischer Funktionen $y = mx$ und $y = ax^2$ nur um das Vorzeichen, gehen die Graphen der Funktionen durch Spiegelung an der x-Achse auseinander hervor.
- Die Parameter n und e (in $y = x^2 + e$) haben die gleiche Bedeutung. Sie geben die Richtung und Weite der Verschiebung bezüglich der y-Achse an.
- Im 1. Quadranten gilt für beide Funktionen bei positivem m und positivem a: Wenn x wächst, wächst auch y. Allerdings ist bei konstantem Zuwachs von x der Zuwachs von y bei einer linearen Funktion auch immer konstant, während er bei einer quadratischen Funktion umso größer ist, je größer der Ausgangswert von x ist.

6.2 Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass der Graph einer quadratischen Funktion „Parabel“ und der Graph der Funktion $y = x^2$ „Normalparabel“ heißt,
- können durch Einsetzen in die Funktionsgleichung entscheiden, ob ein gegebener Punkt auf dem Graphen einer gegebenen quadratischen Funktion liegt,
- können Funktionswerte einer quadratischen Funktion für einen gegebenen x-Wert bestimmen,
- können für eine gegebene Funktionsgleichung mit einer unabhängigen Variablen entscheiden, ob es die Gleichung einer quadratischen Funktion ist,
- können für eine Größengleichung mit maximal 3 Größen entscheiden, ob diese als Gleichung einer quadratischen Funktion aufgefasst werden kann,
- können Aussagen zu Wachstumseigenschaften quadratischer Funktionen bewerten,
- können die Gleichung einer quadratische Funktion angeben, deren Graph durch Verschieben der Normalparabel in y-Richtung oder durch Spiegeln an der x-Achse entstanden ist, wobei maximal eine Verschiebung und eine Spiegelung kombiniert werden,
- wissen, wie man Nullstellen einer quadratischen Funktion berechnet und können diese ermitteln, wenn die entsprechende quadratische Gleichung inhaltlich lösbar ist.

6.3 Aufgaben

1. Prüfe, ob folgende Punkte auf der Normalparabel $y = x^2$ liegen.

a) A (1; 2) b) B (– 3; 9) c) C (– 2; – 4) d) D (7; 14) e) E (81; 9) f) F(− 8, 64)

2. Gehören die folgenden Punkte zum Graphen der Funktion $y = x^2 - 2x + 1$?

a) A (0; 1) b) B (– 1; 1) c) C (– 2; 9) d) D (1; 0) e) E (3; 7) f) F(− 3, 15)

3. Berechne für die quadratische Funktion $y = f(x) = 2x^2 - 4$ die folgenden Funktionswerte.

a) f(7) b) f(2) c) f(− 5) d) f(− 1) e) f(− 3) f) f(4)

4. Entscheide, ob es sich bei den folgenden Gleichungen um eine Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion handelt.

a) $y = (x - 1)^2 + 5$ b) $f(x) = 9(x - 4) + 1$ c) $x^2 - 2x + 1 = 0$

d) $y = \frac{2}{x^2} + 1$ e) $f(x) = -\frac{x^2 + 1}{2}$ f) $y = 5 + x^2$

5. Welche der folgenden Größengleichungen können als Funktionsgleichungen einer quadratischen Funktion aufgefasst werden?

a) $A = a^2$ b) $u = 4a$ c) $A = a \cdot b$

d) $A = \pi r^2$ e) $s = \frac{g}{2} t^2$ f) $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

6. Welche Aussagen treffen für die quadratische Funktion $y = x^2$ zu?

a) Wenn x größer wird, wird auch y größer.

b) Wenn x um 1 vergrößert wird, vergrößert sich der y-Wert auch immer um 1.

c) Wenn sich der x-Wert verdoppelt, vervierfacht sich der y-Wert.

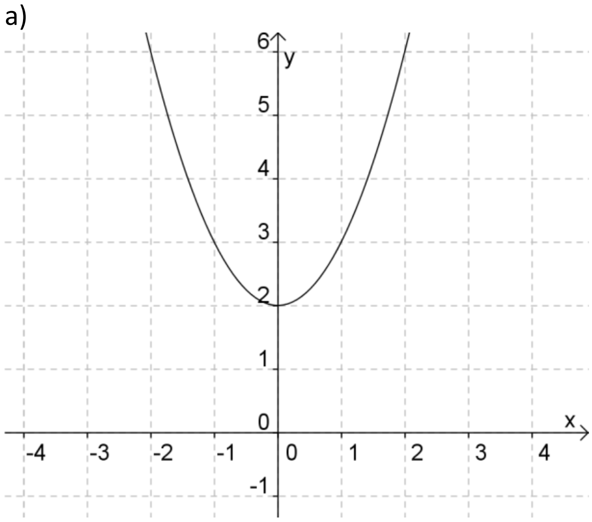
d) Alle Punkte liegen auf einer Geraden.

e) Der Graph der Funktion ist eine Parabel.

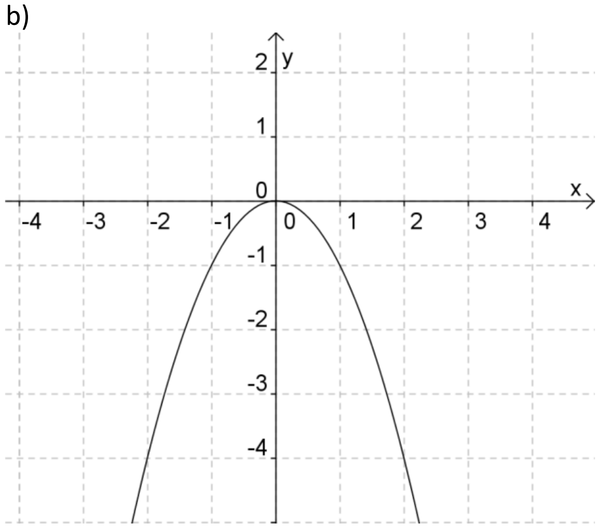
f) Der Quotient aus y und x ist immer konstant.

7. Die dargestellten Funktionsgraphen sind aus dem Graphen der Funktion $y = x^2$ durch Verschieben oder Spiegeln an der x-Achse hervorgegangen. Bestimme die Funktionsgleichungen.

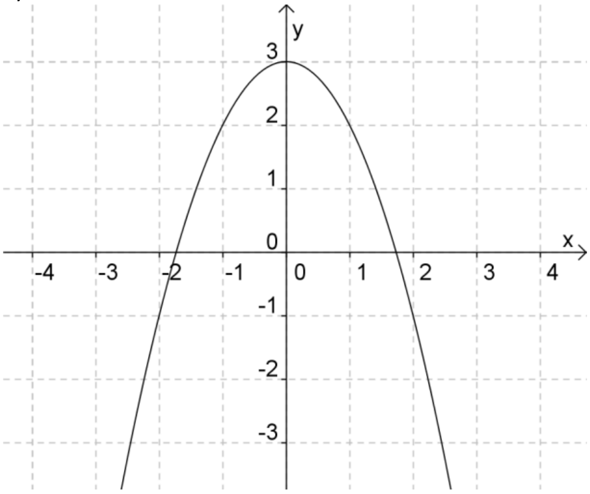
a)



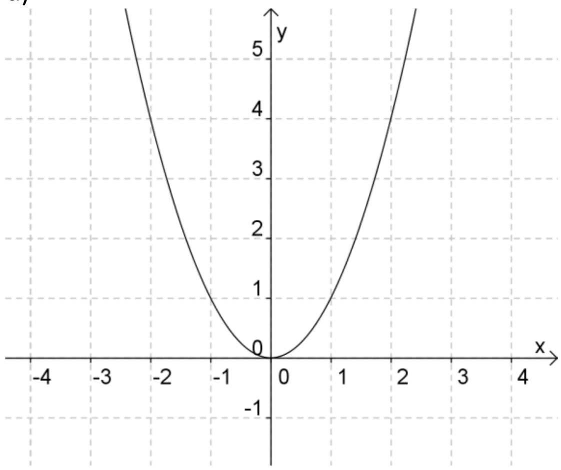
b)



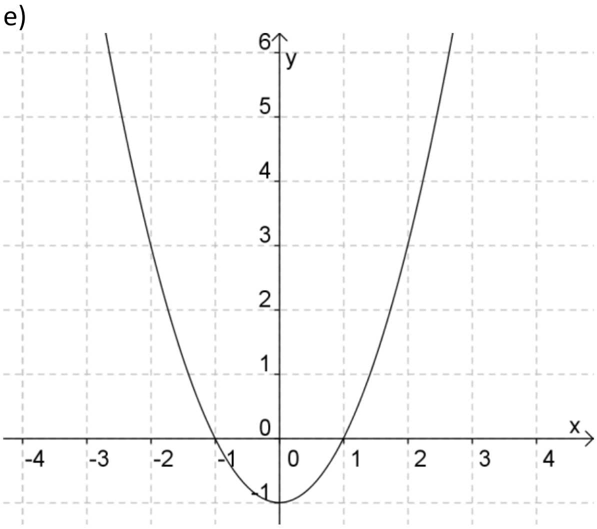
c)



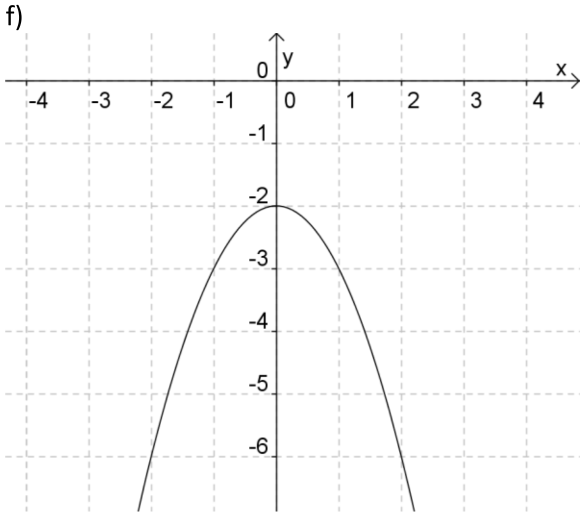
d)



e)



f)



8. Vergleiche die Graphen der folgenden Funktionen mit dem Graphen von $f(x) = x^2$ und beschreibe, wie diese aus der Normalparabel hervorgehen können.

a) $g(x) = x^2 + 5$ b) $h(x) = x^2 - 7$ c) $s(x) = -x^2$

d) $t(x) = -x^2 + 5$ e) $k(x) = -x^2 - 7$ f) $m(x) = x^2 - 12$

9. Berechne die Nullstellen der folgenden quadratischen Funktionen.

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = (x - 1)^2$ c) $f(x) = (x + 2)^2 - 9$

d) $f(x) = x^2 - x$ e) $f(x) = x^2 - 5x$ f) $f(x) = -x^2 + 16$

7 Zum Arbeiten mit Potenzfunktionen

7.1 Ausgewählte Probleme

Behandlung von Potenzfunktionen

Im Regionalschulbildungsgang sollte eine Beschränkung auf die exemplarische Behandlung von Prototypen erfolgen, wozu die folgenden Funktionen gehören sollten: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich deshalb vor allem auf den Unterricht im gymnasialen Bildungsgang.

Der Begriff *Potenzfunktion* wird in der Literatur nicht einheitlich gebraucht. Im engsten Sinne werden darunter nur Funktionen der Form $y = x^n$, $n \in N$, $x \in R$ verstanden. Bei der weitesten Fassung des Begriffs in Anlehnung an den allgemeinen Potenzbegriff versteht man darunter Funktionen der Form $y = x^r$, $r, x \in R$, $x > 0$. In diesen Fall sind die Wurzelfunktionen ein Spezialfall der Potenzfunktionen, und es lassen sich fast keine gemeinsamen Eigenschaften formulieren, die für alle Potenzfunktionen gelten. Es sollte deshalb der Begriff *Wurzelfunktion* für Funktionen mit der Gleichung $y = \sqrt[n]{x}$ $x \in R$, $x \geq 0$ eingeführt werden.

Meist ist es üblich, unter Potenzfunktionen Funktionen mit der Gleichung $y = x^n$, $n \in Z$, $x \in R$, $x \neq 0$ zu verstehen. Damit werden allerdings Vertreter zweier verschiedener Klassen von Funktionen zusammengefasst, nämlich ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen.

In Analogie zur empfohlenen Bezeichnung für Potenzen sollten die verschiedenen Arten von Potenzfunktionen durch die Angabe des Grundbereiches des Exponenten charakterisiert werden. Man sollte also Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten, mit negativem ganzzahligem Exponenten und mit rationalem Exponenten unterscheiden.

Funktionen der Form $y = x^{\frac{n}{m}}$, $n, m \in N$, $x \in R$, $x > 0$ können auch als Verkettungen von Wurzel und Potenzfunktionen angesehen werden, sie sollten nur am Rande behandelt werden.

Es gibt allerdings sehr wenige reale Zusammenhänge, die durch Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten modelliert werden können. Eine gewisse Erweiterung des Anwendungsfeldes, insbesondere durch die umgekehrte Proportionalität ist möglich, wenn man auch Funktionen der Form $y = a \cdot x^n$, $a \in R$, $n \in Z$, $x \in R$, $x \neq 0$ betrachtet, die teilweise sogar auch als Potenzfunktionen bezeichnet werden. Trotzdem muss das Arbeiten mit Potenzfunktionen hauptsächlich auf formale Aufgaben beschränkt bleiben.

Als für viele Anwendungen wichtige Ergänzung sollten Funktionen mit der Gleichung $y = a(x + d)^n + e$ untersucht werden.

Der schwierige Begriff Umkehrfunktion sollte im Zusammenhang mit den Wurzelfunktionen eingeführt werden. Um eine inhaltliche Vorstellung zu vermitteln, sollten zunächst Umkehrungen von Zusammenhänge bzw. Abhängigkeiten von Größen betrachtet werden, sofern dies sinnvoll ist. Im Unterschied zur mathematischen Abstraktion ändern sich im konkreten Fall allerdings nicht die Bezeichnungen der Größen in den Gleichungen und auf den Achsen werden demzufolge die Bezeichnungen vertauscht.

7.2 Sicheres Wissen und Können

Nur gymnasialer Bildungsgang

Die Schülerinnen und Schüler

- können Sachverhalte durch Funktionen der Form $y = a \cdot x^n$ mit $-3 \leq n \leq 3$ beschreiben,
- wissen, dass Funktion der Form $y = x^{-n}$, $n \in N$, für $x = 0$ nicht definiert sind,
- können zum gegebenen Graphen der Funktion $y = x^2$ die Graphen der Funktion $y = 2x^2$ bzw. $y = 0{,}5x^2$ skizzieren,
- wissen, dass Potenzfunktionen mit ganzzahligen negativen Exponenten Polstellen besitzen und können diese im Graphen erkennen,
- können Graphen zu Funktionen der Form $y = x^n + e$ mit $-4 \leq n \leq 5$ skizzieren,
- können die Graphen der Potenzfunktionen $y = x^2$ und $y = x^4$, $y = x^3$ und $y = x^5$, $y = x^{-1}$ und $y = x^{-3}$, $y = x^{-2}$ und $y = x^{-4}$ jeweils in einem Koordinatensystem skizzieren,
- wissen, dass die Funktionen mit der Gleichung $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $x \in R$, $x \geq 0$, Wurzelfunktionen heißen und können $y = \sqrt[n]{x}$ für $n = 2$ und $n = 3$ in ein Koordinatensystem skizzieren.

7.3 Aufgaben

Nur gymnasialer Bildungsgang

1. Welche der folgenden Abhängigkeiten lassen sich durch Funktionen mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^n$, $a \in R$, $n \in Z$, $x \in R$, $x \neq 0$ beschreiben? Gib jeweils die Gleichung an.

a) die Abhängigkeit des Flächeninhalts eines Kreises vom Radius eines Kreises

b) die Abhängigkeit des Volumen eines Stahlwürfels von seiner Kantenlänge

c) die Abhängigkeit der benötigte Zeit für 100 km von der Geschwindigkeit des Autos

d) die Abhängigkeit der Höhe eines Zylinders mit einem Volumen von 10 dm^3 vom Grundkreisradius

e) die Abhängigkeit des Volumens einer Kugel vom Radius einer Kugel

f) die Abhängigkeit der Personenzahl pro Gruppe von der Anzahl der Gruppen bei insgesamt 100 Personen

2. Welche Funktionen sind Potenzfunktionen mit einem natürlichen Exponenten?

a) $y_1 = x^2$ b) $y_2 = x^5$ c) $y_3 = 2x$ d) $y_4 = x$ e) $y_5 = x^{0,5}$ f) $y_6 = x^{-3}$

3. Gegeben sei die Funktion mit der Gleichung $y = x^3$. Prüfe, ob folgende Punkte auf dem Graphen der Funktion liegen.

a) A(1; –1) b) B(3; 27) c) C(– 2; 8) d) D(5; 125) e) E(0; 0) f) F(– 4; 16)

4. Bestimme die Funktionswerte der Funktion $f(x) = x^3$ zu folgenden x-Werten.

a) 2 b) – 2 c) 0 d) – 3 e) 5 f) – 1

5. Bestimme die x-Werte der Funktion $f(x) = x^3$ zu folgenden Funktionswerten.

a) 8 b) 0 c) – 8 d) 27 e) – 1 f) 0,125

6. Welche der folgenden Punkte liegen auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^{-2}$?

a) A(0,5; 8) b) B(5; 25) c) C(1; 1)

d) D(– 1; – 1) e) E(10; 0,01) f) F(0; 0)

7. Die folgenden Punkte liegen auf dem Graphen der Funktion $y = x^{-1}$.
Bestimme die fehlenden Koordinaten

a) A(1; *) b) B(3; *) c) C(*; 0,1)

d) D(*; – 1) e) E(*; 0) f) F(*; 4)

8. Skizziere die Graphen folgender Funktionen jeweils in ein gemeinsames Koordinatensystem.

a) $y = x^2$ und $y = x^2 + 1$ b) $y = x^2$ und $y = x^2 - 2$

c) $y = x^3$ und $y = x^3 + 2$ d) $y = x^{-1}$ und $y = x^{-1} - 1$

e) $y = x^{-2}$ und $y = x^{-2} + 1$ f) $y = x$ und $y = x^{-1}$

9. Skizziere in das nebenstehende Koordinatensystem die Graphen der Funktionen $y = 2x^2$ und $y = 0,5x^2$.

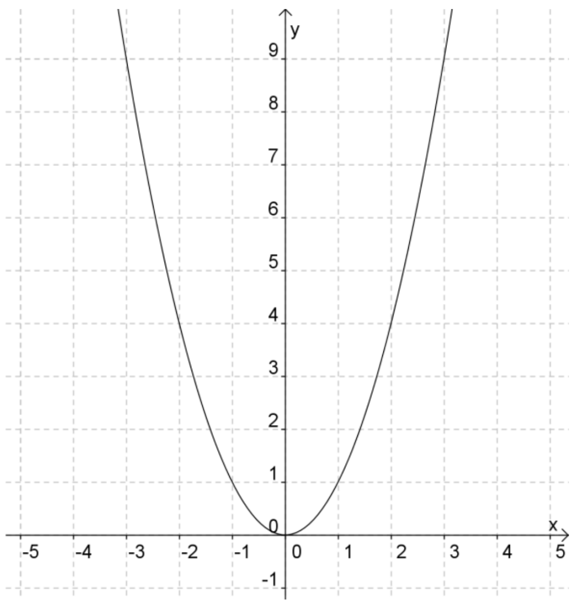


Abbildung zu Aufgabe 9

10. Entscheide jeweils, ob die folgenden Wertepaare zu einer linearen, einer quadratischen oder einer kubischen Funktion gehören können.

	x	0	0,1	0,5	1	2	3	10
a)	f(x)	0	0,001	0,125	1	8	27	1000
b)	g(x)	0	0,01	0,25	1	4	9	100
c)	h(x)	0	0,2	1	2	4	6	20

11. Wie ändern sich die Funktionswerte von folgenden Funktionen, wenn der x-Wert
(1) verdoppelt, (2) halbiert oder (3) vervierfacht wird?

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = x^{-1}$

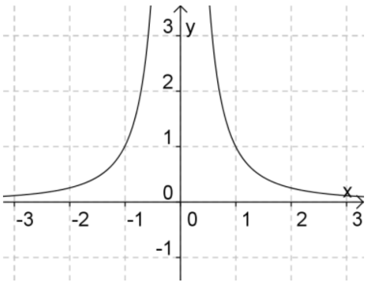
12. Skizziere die Graphen folgender Funktionen jeweils in ein gemeinsames Koordinatensystem.

a) $y = x^2$ und $y = x^4$ b) $y = x^3$ und $y = x^5$ c) $y = x^{-1}$ und $y = x^{-3}$

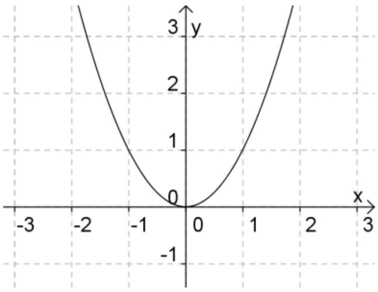
d) $y = x^{-2}$ und $y = x^{-4}$ e) $y = -x$ und $y = x^{-1}$ f) $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt[3]{x}$

13. Ordne den Funktionsgraphen die richtige Gleichung zu.

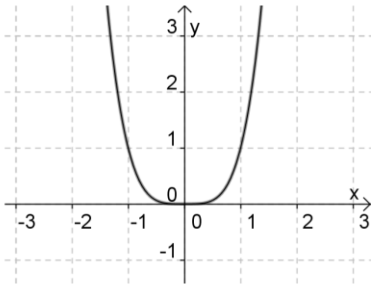
a)



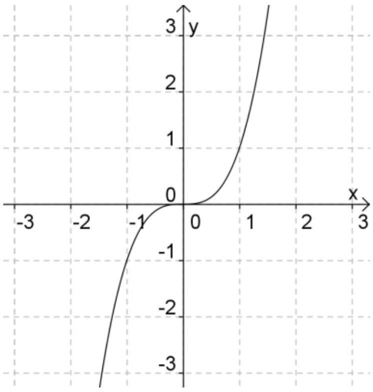
b)



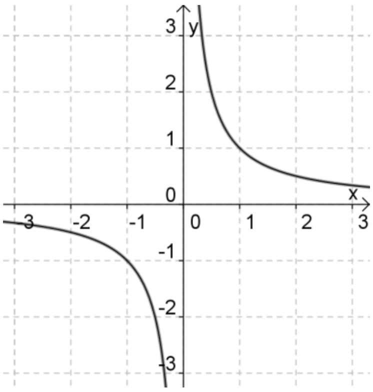
c)



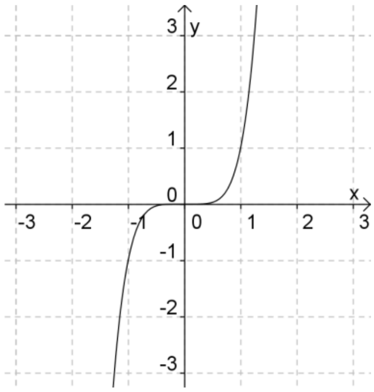
d)



e)



f)



(1) $f(x) = x^2$ (2) $f(x) = x^3$ (3) $f(x) = x^5$

(4) $f(x) = x^4$ (5) $f(x) = x^{-2}$ (6) $f(x) = x^{-1}$

14. Bestimme falls vorhanden die Polstellen der Funktionen in Aufgabe 13.

15. Die folgenden Punkte sollen auf dem Graphen der Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ liegen. Gib jeweils die fehlende(n) Koordinate(n) an.

a) A(9; *) b) B(*; 2) c) C(7^2; *) d) D(*; $\sqrt{2}$) e) E(0; *) f) F(f; f)

8 Zum Arbeiten mit Exponential- und Logarithmusfunktionen

8.1 Ausgewählte Probleme

Zur Behandlung der Funktionen in den Bildungsgängen

An Regionalen Schulen sollten Betrachtungen zu Exponentialfunktionen auf zeitliche Prozesse, d.h. auf zeitlich Wachstums- und Abnahmevorgänge, beschränkt bleiben, da diese die Hauptanwendungen von Exponentialfunktionen im Alltag und in den Naturwissenschaften sind. Wegen der unterschiedlichen Eigenschaften und auch Begriffsbildungen sollten Wachstums- und Abnahmeprozesse getrennt betrachtet werden. Mit den zahlreichen möglichen Anwendungen zu exponentiellen Wachstums- bzw. Abnahmeprozessen ist das Arbeiten mit Funktionen auf inhaltlicher Ebene sehr gut möglich.

Als Funktionsgleichung zur Beschreibung des Wachstums einer Größe y sollte folgende Gleichung verwendet werden.

$$y = f(t) = a \cdot b^t \text{ mit } a, b, t \in R, a > 0, b > 1$$

Dabei wurde zur Bezeichnung des Faktors in Analogie zu den quadratischen und Potenzfunktionen der Buchstabe a, der hier auch den Anfangswert bedeutet, verwendet. Für die Basis wurde der Buchstabe b und für unabhängige Variable der Buchstabe t (für die Zeit) verwendet.

Die Basis b wird als Wachstumsfaktor und der Prozentsatz p %, mit b = 1 + p %, als prozentuale Wachstumsrate bezeichnet.

Eine analoge Gleichung kann für Abnahmeprozesse aufgestellt werden, wobei b, mit 0 < b < 1, als Abnahmefaktor und p %, mit b = 1 – p%, als Abnahme- oder Zerfallsrate bezeichnet werden können.

Im Unterschied zu diesen Modellierungen sollte die Exponentialfunktion allgemein durch die Gleichung definiert werden

$$f(x) = b^x,\ b, x \in R,\ b > 0,\ b \neq 1,.$$

Dies wird im Realschulbildungsgang nicht für erforderlich gehalten.

Im gymnasialen Bildungsgang sollten die Logarithmusfunktionen als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion eingeführt werden. Als umkehrbarer realer Zusammenhang eignet sich der Zusammenhang von Höhe und Luftdruck.

Zum Änderungsverhalten von Exponentialfunktionen

Das Änderungsverhalten kann im Vergleich mit den linearen Funktionen untersucht werden. Mit Blick auf das weitere Arbeiten mit Funktionen ist im gymnasialen Bildungsgang eine allgemeine Beschreibung der Eigenschaften durch Funktionalgleichungen sinnvoll.

Fälle	lineare Funktion $y = f(x) = mx + n$	Exponentialfunktion $y = f(x) = b^x$
Prototypen, verbale Beschreibung	$y = 2x + 3$ Wenn x um 1 wächst, wächst y um 2.	$y = 2^x$ Wenn x um 1 wächst, wird y verdoppelt.
allgemein, verbale Beschreibung	Wenn x um 1 wächst, ändert sich y um m.	Wenn x um 1 wächst, ändert sich y um das b-fache.
allgemein, Beschreibung durch Funktionalgleichungen	$f(x + 1) = f(x) + m$	$f(x + 1) = b \cdot f(x)$

8.2 Sicheres Wissen und Können

Nur gymnasialer Bildungsgang

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen Funktionsgleichungen der Form $y = b^x$ für Exponentialfunktionen
- können zu einer gegebenen Wertetabelle die Gleichung einer Exponentialfunktion angeben,
- wissen, dass es typische Beispiele für das exponentielle Wachstum bzw. für den Zerfall gibt und kennen Prototypen (z. B. Zinseszinsen, Algenwachstum, radioaktiver Zerfall),
- können bei einfachen Sachverhalten entscheiden, ob es sich um ein exponentielles Wachstum bzw. um eine exponentielle Abnahme handelt.
- kennen wesentliche Eigenschaften, insbesondere Wachstumseigenschaft der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ und können deren Graphen skizzieren.
- können das Änderungsverhalten von Exponentialfunktionen verbal beschreiben.

8.3 Aufgaben

Nur gymnasialer Bildungsgang

1. Handelt es sich bei den Sachverhalten um ein exponentielles Wachstum? Kreuze jeweils an.

	Sachverhalt	Ja	Nein
a)	Tom hat 500 € auf dem Konto und legt es für 10 Jahre mit einem jährlichen Zinssatz von 5 % an.		
b)	Anne hat bereits 300 € auf dem Konto. Monatlich erhöht sie ihren Kontostand um 5 €.		
c)	Nach dem Verzehr von Süßigkeiten verdoppeln sich die Bakterien des Zahnbelages in 15 min.		
d)	Nach dem Zähneputzen verdoppelt sich die Zahl der Bakterien nur alle 120 min.		
e)	Die Temperatur im Backofen erhöht sich in jeder Minute um 10 Grad.		
f)	Salmonellen sind Bakterien, die sich in warmen Speisen schnell vermehren. Schon nach jeweils 20 Minuten kann sich ihre Anzahl verdoppeln.		

2. Handelt es sich bei den Sachverhalten um eine exponentielle Abnahme? Kreuze jeweils an.

	Sachverhalt	Ja	Nein
a)	Jens hat 400 €, von denen er monatlich 80 € ausgibt.		
b)	Jens hat 400 €, von denen er jeweils monatlich die Hälfte des noch vorhandenen Geldes ausgibt.		
c)	Ein Patient erhält 100 mg eines Medikamentes vom dem stündlich in seinem Körper 15 % abgebaut werden.		
d)	Die Länge einer brennenden Kerze nimmt stündlich um 5 cm ab.		
e)	Der Alkoholgehalt im Blut sinkt pro Stunde um 10 %.		
f)	Bei einer Diät sollen die Teilnehmer 2 kg pro Woche abnehmen.		

3. Untersuche die Funktion $f(x) = 2^x$.

a) Gib den Definitionsbereich der Funktion an.
b) Gib den Wertebereich der Funktion an.
c) Ergänze folgende Tabelle.

x	2			-3		0	
f(x)		8	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		2

d) Skizziere die Funktion mit Hilfe der Tabelle.
e) Gib die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen an.
f) Wie verhalten sich die Funktionswerte von f(x) für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$?

4. Welche der folgenden Funktionsgleichungen sind Gleichungen für eine Exponentialfunktion?

a) $y = x^3$ b) $y = 3^x$ c) $y = x^{-2}$ d) $y = \frac{1}{x}$ e) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ f) $y = 2^{-x}$

5. Skizziere die Graphen der Funktion $f(x) = 2^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

6. Untersuche die Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Gib den Definitionsbereich der Funktion an.
b) Fertige eine Wertetabelle für $-3 \le x \le 3$ an und skizziere den Graphen der Funktion mit Hilfe der Tabelle.
c) Gib den Wertebereich der Funktion an.
d) Gib die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen an.
e) Wie verhalten sich die Funktionswerte von f(x) für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$?
f) Wie ändern sich die y-Werte, wenn man den x-Wert verdoppelt?

7. Kreuze jeweils an, ob die Aussage für die Funktion zutrifft. Es ist stets $x \ge 0$.

Aussage	$y = 2x$		$y = x^2$		$y = 2^x$	
	ja	nein	ja	nein	ja	nein
a) Wird der x -Wert um eins erhöht, so erhöht sich der y-Wert um 2.						
b) Wird der x -Wert um eins erhöht, so verdoppelt sich der y-Wert.						
c) Wird der x –Wert verdoppelt, so vervierfacht sich der y-Wert.						
d) Wird der x -Wert um eins vermindert, so verringert sich der y-Wert um 2.						
e) Wird der x -Wert um eins vermindert, so halbiert sich der y-Wert.						
f) Wird der x –Wert halbiert, so wird der y-Wert geviertelt.						

8. Gib die Gleichung einer Exponentialfunktion an, zu der die Wertetabelle passt.

a)

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

b)

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

c)

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

9 Zum Arbeiten mit Winkelfunktionen

9.1 Ausgewählte Probleme

Mit der Behandlung der Trigonometrie und der Winkelfunktionen werden zwei Entwicklungslinien miteinander verbunden, die bisher relativ getrennt verliefen, die Entwicklung des geometrischen Könnens und die Entwicklung des Könnens im Arbeiten mit Funktionen. Eine zu starke Vermischung sollte aber vermieden werden, um die Eigenständigkeit der jeweiligen Betrachtungen zu erhalten. Deshalb wird vorgeschlagen, zunächst die Trigonometrie relativ abgeschlossen zu behandeln und dann erst die Winkelfunktionen als reelle Funktionen einzuführen.

Mit Blick auf die hautsächlichen Anwendungen der Winkelfunktionen für trigonometrische Berechnungen sollten zuerst der Sinus, Kosinus und Tangens eines Winkels *am rechtwinkligen Dreieck* als Streckenverhältnisse eingeführt werden. Zur Vereinfachung der Sprechweise kann aber schon die Bezeichnung „Winkelfunktion" verwendet werden, ohne die Funktionen selbst näher zu betrachten. Mit der Einführung am rechtwinkligen Dreieck verbunden ist jedoch eine Beschränkung des Definitionsbereiches auf Winkel von 0° bis 90°. Dies ist jedoch für trigonometrische Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken völlig ausreichend. Die sofortige Verwendung der allgemeinen Definition am Einheitskreis kann die Schüler nur unnötig verwirren und bringt keinen Nutzen für die Trigonometrie.

Zur Erfassung der Bedeutung von Sinus-, Kosinus- bzw. Tangenswerten ist es günstig, einige Funktionswerte und Argumente als Verhältnisse in beliebigen rechtwinkligen Dreiecken zeichnerisch zu ermitteln.

Die Erweiterung des Definitionsbereiches der Sinus- und Kosinusfunktion sollte im Zusammenhang mit der Herleitung des *Sinus- bzw. Kosinussatzes* erfolgen. Die Definitionen erscheinen dann sinnvoll für den Umgang mit den beiden Sätzen. Ansonsten ist es schwer verständlich, dass ein Kosinuswert als Streckenverhältnis auch negativ sein kann.

Komplexe trigonometrische Aufgaben sind deshalb besonders schwierig, weil für die Berechnungen oft verschiedene Hilfsmittel eingesetzt bzw. zur Auswahl herangezogen werden können (Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck, Sinus- und Kosinussatz, Flächenberechnungen, Satz des Pythagoras, Strahlensätze, Innenwinkelsumme im Dreieck u. a.). Die Strategie des Rückwärtsarbeitens zum Finden von Lösungsideen ist deshalb für diesen Aufgabentyp besonders zu empfehlen. Die Verwendung von Lösungsgraphen kann den individuellen Prozess der Ideenfindung unterstützen. Ein weiteres wichtiges heuristisches Mittel ist das Arbeiten mit Skizzen, insbesondere des Zerlegen und Ergänzen von Strecken und Flächen.

Das wesentliche Merkmal der Winkelfunktionen, das sie von allen anderen bisher behandelten Funktionen unterscheidet, ist die Eigenschaft der *Periodizität*. Da periodische Vorgänge auch im täglichen Leben und den Naturwissenschaften auftreten, sollten gesonderte allgemeine Betrachtungen zu periodischen Funktionen angestellt und zeitliche periodische Vorgänge durch Funktionsgraphen modelliert werden.

Mit der Einführung von *positiven und negativen Drehwinkeln* wird die Entwicklung des Winkelbegriffs an der Schule abgeschlossen. Die Schüler lernen damit eine weitere Bedeutung negativer Zahlen, die hier zur Kennzeichnung einer Drehrichtung dienen, kennen.

Bei der *Definition der Winkelfunktionen* am Einheitskreis ist zu beachten, dass die Sinus- bzw. Kosinuswerte der Winkel Koordinaten eines Punktes sind und nicht als Streckenlängen veranschaulicht werden sollten, die ja dann auch negative Werte annehmen könnten, was dem inhaltlichen Verständnis einer Strecke widersprechen würde.

9.2 Sicheres Wissen und Können

Alle Bildungsgänge

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass die Sinus- , Kosinus- und Tangensfunktion periodische Funktionen sind und haben Vorstellungen von den Graphen dieser Funktionen,
- können unterscheiden zwischen Anwendungen der Winkelfunktionen in der Trigonometrie zur Dreiecksberechnung und Anwendungen zur Beschreibung periodischer Vorgänge.

Nur gymnasialer Bildungsgang

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass es Winkel gibt, die kleiner als 0° oder größer als 360° sind,
- wissen, dass Winkel einen positiven oder negativen Drehsinn haben können,
- wissen, dass jeder Winkel darstellbar ist als $\alpha = \alpha` + k \cdot 360°$ mit $0° \leq \alpha` \leq 360°$, $k \in Z$,
- Winkel im Grad- oder Bogenmaß angegeben werden können, wobei π dem Gradmaß 180° und 2π dem Gradmaß 360° entspricht,
- wissen, dass nur eine im Bogenmaß beschriftete x-Achse einen Vergleich von Graphen von Winkelfunktionen mit anderen Funktionsgraphen ermöglicht,
- könne bei einfachen Sachverhalten erkennen, ob es sich um periodische Vorgänge handelt

9.3 Aufgaben

Alle Bildungsgänge

1. Welche der folgenden Vorgänge können zumindest näherungsweise durch eine periodische Funktion beschrieben werden? Nenne jeweils Bedingungen, unter denen dies zutrifft.

a) Bewegung eines Uhrzeigers

b) Wasserstand an einem Nordseestrand

c) von einem festen Ort der Erde aus sichtbarer Teil des Mondes

d) Wachstum der Früchte eines Obstbaumes

e) Drehen eines Windrades

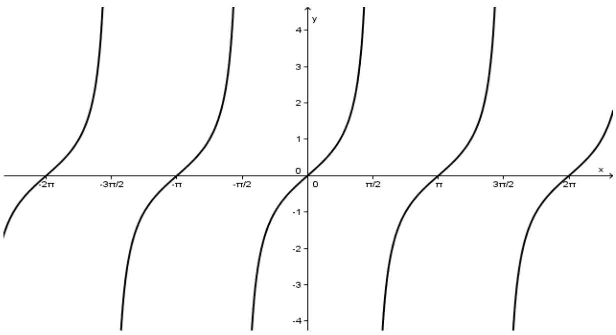
f) Erddrehung

2. Skizziere den Graphen einer periodischen Funktion.

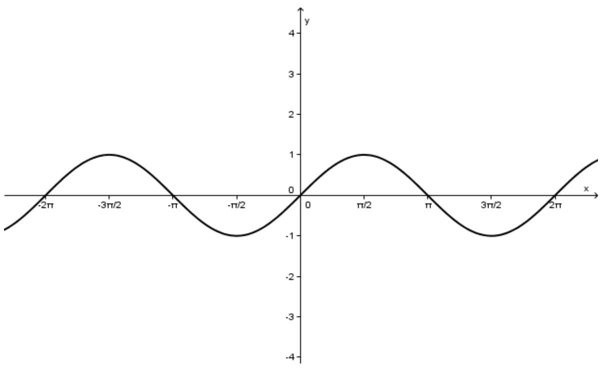
3. Ordne den folgenden Ausschnitten aus Graphen die richtige Funktionsgleichung zu.

A: $y = \sin x$ B: $y = \cos x$ C: $y = \tan x$

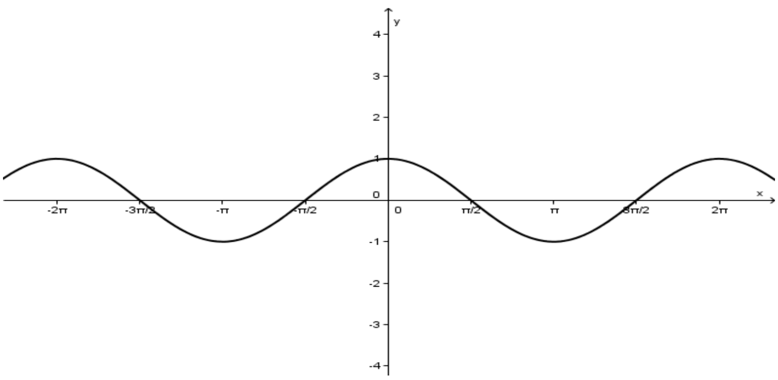
I:



II:



III:



Nur gymnasialer Bildungsgang

4. Der Punkt P(1; 0) ist ein Punkt des Einheitskreises um den Koordinatenursprung.
Gib die Koordinaten des Punktes P' an, auf den der Punkt P bei einer Drehung um folgenden Winkel abgebildet wird.

a) 270° b) – 180° c) 360° d) – 270° e) 450° f) 900°

5. Stelle die folgenden Winkel dar in der Form $\alpha = \alpha' + k \cdot 360°$ mit $0° \leq \alpha' \leq 360°$, $k \in Z$.

a) 400° b) – 80° c) 650° d) – 900° e) – 630° f) 360°

6. Ergänze die Tabelle so, dass sich in jeder Zeile einander entsprechende Winkelmaße ergeben.

Gradmaß	Bogenmaß
90°	
	π
	2π
	π/2
360°	

7. Zeichne drei verschiedene Dreiecke jeweils mit den Innenwinkeln von 30^0, 60^0 und 90^0.
Gib Unterschiede und Gemeinsamkeiten dieser drei Dreiecke an.

8. Bei welchen Sachverhalten würdest du den Winkel im Bogenmaß bzw. im Gradmaß angeben?

(1) Ablesen des Schnittpunktes von 2 Graphen, wobei einer zu einer Sinusfunktion und der andere zu einer linearen Funktion gehört

(2) Berechnung des Neigungswinkels einer Pyramidenfläche zur Grundfläche

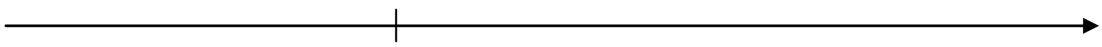
(3) Beschreibung eines periodischen Prozesses, bei dem die Amplitude exponentiell abnimmt

(4) Berechnung der Breite eines Flusses mit trigonometrischen Mitteln

(5) Berechnung des Schnittwinkels eines Graphen einer linearen Funktion mit der x-Achse mithilfe ihres Anstiegs

(6) Berechnung einer Seitenlänge in einem Dreieck mit dem Kosinussatz

9. Beschrifte die x-Achse jeweils untereinander im Bogenmaß mit Vielfachen von π und mit ganzen Zahlen, so dass eine Einheit 1 cm entspricht.

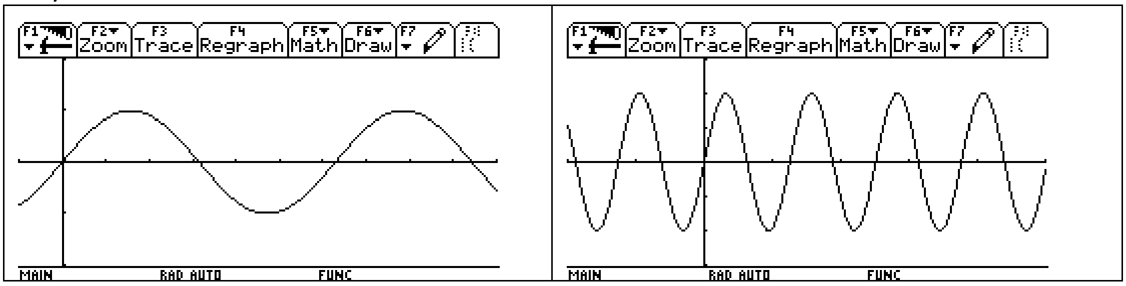


0 reelle Zahlen

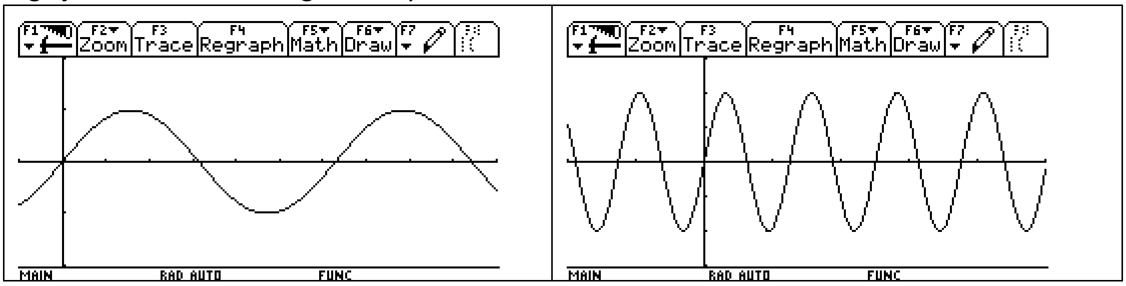
0 Bogenmaß

10. In den folgenden Abbildungen ist jeweils der Verlauf der Funktion f(x) = sin x in einem Intervall dargestellt.

a) Trage auf der x- Achse 0, π / 2, π; 3/2 π; 2 π und 3 π ein und lege jeweils die Einteilung für die y-Achse fest.

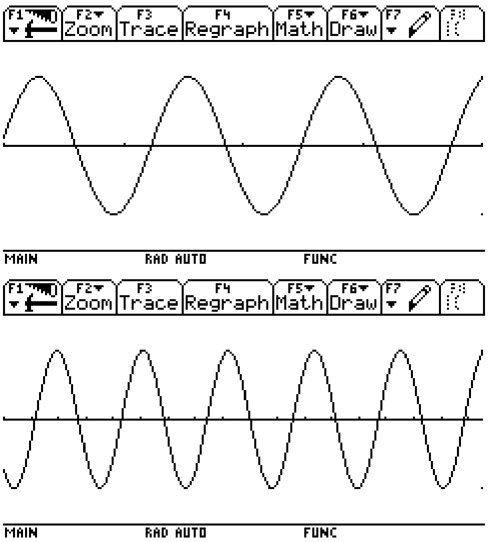


b) Trage auf der x- Achse 0°; 90°; 180°; 270°; 360° und im 2. Bild auch 540° und 720° ein und lege jeweils die Einteilung für die y-Achse fest.

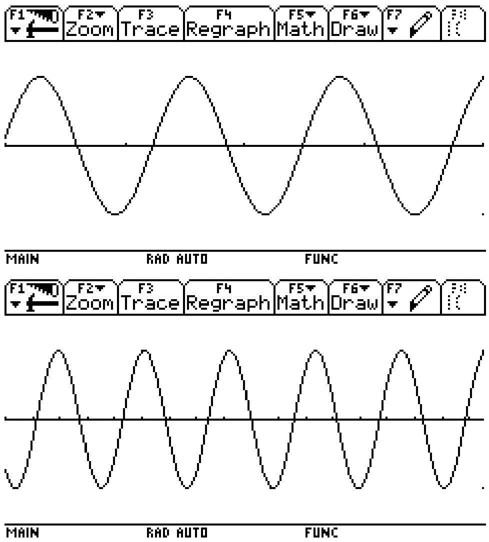


11. Lege für die untenstehenden Graphen den Koordinatenursprung fest und zeichne die y-Achse sowie die Einteilung für die Koordinatenachsen ein, so dass der Graph dargestellt wird.

a) Sinusfunktion



b) Kosinusfunktion



10 Zu Systematisierung von Funktionen im gymnasialen Bildungsgang in Klasse 10

10.1 Ausgewählte Probleme

Zur Rolle und Art der Systematisierung zu Funktionen in Klasse 10

Wie bereits dargestellt (vgl. S. 6) sollte in der Jahrgangsstufe 10 des gymnasialen Bildungsganges, also in der Einführungsphase der Gymnasialen Oberstufe, eine Zusammenfassung und Systematisierung der wesentlichen Eigenschaften der bisher behandelten Funktionen erfolgen. Dabei sollten inhaltliche Vorstellungen zu wesentlichen Grundbegriffen der Analysis wie Monotonie, Grenzwert, insbesondere Verhalten im Unendlichen und an Polstellen sowie Extrema erfolgen. Auf diese Weise kann die Untersuchung von Funktionen mit Mitteln der Differenzialrechnung in der Qualifikationsphase vorbereitet werden. Dies entspricht dem Vorschlag der Arbeitsgruppe "Gymnasiale Oberstufe Mathematik" (vgl. Handreichung „Ziele und Aufgaben zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe - Klassen 10 – 12“, www.mathe-mv.de).

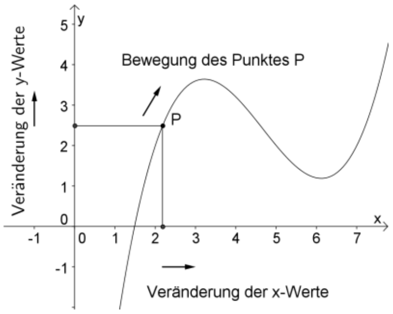
In der zur Verfügung stehenden Zeit können nicht alle bisher behandelten Funktionen mit allen ihren Eigenschaften wiederholt werden. Es sollte deshalb eine Beschränkung auf ausgewählte Prototypen für Funktionsgleichungen und Graphen erfolgen, so dass die Vorstellungen und Kenntnisse zu den genannten Grundbegriffen eng mit diesen Prototypen verbunden sind. Zu den Prototypen sollten die Funktionen mit folgenden Funktionsgleichungen gehören:

$$y = x \qquad y = x^2 \qquad y = x^3 \qquad y = \frac{1}{x} \qquad y = \frac{1}{x^2} \qquad y = 2^x \qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Bei der Modellierung von Sachverhalten und der Angabe von Funktionsgraphen kann ein zusätzlicher Parameter verwendet werden. Für die Begriffe zu Extrema wird auch der Graph einer kubischen Funktion verwendet.

Dynamische Betrachtungen an Funktionsgraphen

Bei dynamischen Betrachtungen an Funktionsgraphen in der Analysis müssen drei Veränderungen simultan betrachtet werden.



1. Veränderung der x-Werte: Es handelt sich um eine Bewegung auf der x-Achse, die in beiden Richtungen erfolgen kann. Zur Beschreibung der Veränderung der x-Werte können z. B. folgende Formulierungen verwendet werden: x wächst, x wird größer, x strebt gegen plus Unendlich, x strebt von rechts gegen die Polstelle, u. a.
2. Bewegung eines Punktes auf dem Funktionsgraphen: Die Bewegung erfolgt in Abhängigkeit von der Veränderung der zugeordneten x-Werte. Zur Beschreibung der Bewegung des Punktes werden Aussagen über die Eigenschaften des Graphen bzw. der Funktion verwendet, z. B. der Graph steigt, fällt, hat ein Maximum, schmiegt sich der x-Achse an u. a.
3. Veränderung der zugeordneten y-Werte: Es handelt sich um eine Bewegung auf der y-Achse, die in zwei verschiedenen Richtungen erfolgen kann in Abhängigkeit von der Veränderung der Lage des Punktes auf dem Graphen. Zur Beschreibung der Veränderung der y-Werte können z. B. folgende Formulierungen verwendet werden: die Funktion ist monoton steigend, mit wachsendem x wird y größer.

Diese drei simultanen und voneinander abhängigen Veränderungen müssen bei vielen Betrachtungen zu Funktionen unterschieden werden. Dazu gehören u. a. die folgenden Aufgabenstellungen, die bei einem gegebenen Funktionsgraphen bearbeitet werden können.

(1) Untersuchung des Monotonieverhaltens

Zur Untersuchung des Monotonieverhaltens erfolgt die Bewegung auf der x-Achse immer von links nach rechts. Bei der Beschreibung des Monotonieverhaltens liegen die Betrachtungen und Formulierungen zum Verhalten eines Punktes auf dem Graphen und zur Veränderung der y-Werte sehr dicht beieinander. Das Steigen bzw. Fallen des Graphen ist mit dem Wachsen (größer werden) beziehungsweise Fallen (kleiner werden) der y-Werte eng verbunden. Zur Untersuchung des Monotonieverhaltens können Extremstellen genutzt werden, um geeignete Intervalle zu finden.

(2) Untersuchung des Verhaltens an Polstellen

Zur Untersuchung des Verhaltens an Polstellen muss die Annäherung der x-Werte stets von beiden Seiten gegen die Polstelle betrachtet werden. Als Formulierung sind z. B. möglich: x nähert sich von links der Polstelle, x strebt von links gegen die Polstelle, u. a.

Zur Beschreibung des Verhaltens des Graphen an der Polstelle sind Kenntnisse zur Lage der Asymptote und zum asymptotischen Verhalten erforderlich, die etwa zu folgenden Aussagen führen können:

- Der Graph nähert sich der senkrechten Asymptote an der Stelle x_P immer weiter an.
- Der Graph schmiegt sich der senkrechten Asymptote an der Stelle x_P immer mehr an.

Zur vollständigen Beschreibung des asymptotischen Verhaltens sind auch Aussagen zur Veränderung der y-Werte erforderlich, etwa: y strebt gegen plus Unendlich.

(3) Untersuchung des Verhaltens im Unendlichen

Das Verhalten einer Funktion im Unendlichen lässt sich an einem gegebenen Graphen nur als eine Vermutung formulieren, da über den weiteren Verlauf des Graphen keine sicheren Aussagen gemacht werden können, sofern die Funktionsgleichung nicht bekannt ist. Auf der x-Achse müssen Veränderungen der x-Werte ausgehend vom Ursprung nach rechts und nach links betrachtet werden. Dabei sind drei Fälle für das Verhalten der y-Werte zu unterscheiden, wobei der zweite Fall ein Spezialfall des dritten ist:

A: Die y-Werte streben gegen plus oder minus unendlich.
B: Die y-Werte streben gegen eine waagerechte Asymptote.
C: Die y-Werte streben gegen eine asymptotische Funktion.

Im Fall B und im Fall C, der erst in Kl. 11 behandelt werden sollte, sind auch Aussagen zum Verhalten des Graphen erforderlich. Analog zur Beschreibung des Verhaltens an Polstellen sollten auch hier Formulierungen zum Graphen und zu den y Werte erfolgen, zum Beispiel bei Betrachtungen zur Funktion $y = x^{-1}$ in folgender Weise:

- Wenn x gegen $+\infty$ strebt, schmiegt sich der Funktionsgraph immer mehr an die x-Achse an.
- Wenn x gegen $+\infty$ strebt, werden die Funktionswerte immer kleiner und streben gegen Null.

Mit dynamischen Betrachtungen an Funktionsgraphen können auch Betrachtungen zum Grenzwert einer Funktion an einer Stelle und damit zur Stetigkeit beziehungsweise Unstetigkeit der Funktion an dieser Stelle erfolgen, die erst in Kl. 11 benötigt werden.

Es können weiterhin die Wachstumseigenschaften zweier Funktionen miteinander verglichen werden. So kann man am Graphen feststellen, ob eine Funktion in einem Intervall schneller (stärker) wächst als eine andere.

Zu Extremaleigenschaften von Funktionen

Ein Bestandteil dynamischer Betrachtungen ist die Untersuchung von Sonder- bzw. Spezialfällen (vgl. S. 18). Für dynamische Betrachtungen an Funktionsgraphen bedeutet dies, dass man die Lage spezieller Punkte auf dem Graph betrachtet, die man bei der Bewegung auf dem Graphen erreicht. Dazu gehören die Schnittpunkte mit den Achsen sowie die Extrempunkte der Funktion. Auch in diesen

Fällen sind immer drei Objekte gleichzeitig zu betrachten, die zum Teil mit speziellen Begriffen bezeichnet werden.

Wert bzw. Bezeichnung für		
x-Wert	**y-Wert**	**Punkt auf dem Graphen**
Nullstelle	0	Schnittpunkt mit der x-Achse
Extremstellen: – Maximumstelle (Maximalstelle) – Minimumstelle (Minimalstelle)	Extremwerte: – Maximum – Minimum	Extrempunkte: – Hochpunkt – Tiefpunkt

Die Beherrschung dieser Begriffe ist eine wichtige Voraussetzung für die Kurvendiskussionen in Klasse 11. Erst in dieser Klasse sollte dann auch der Unterschied zwischen lokalen und globalen Extremaleigenschaften genauer betrachtet werden. Die Schüler sollten erkennen, dass in der Umgebung eines Extremwertes, etwa eines Maximums, die y-Werte bis zum Maximum wachsen und danach fallen.

Dynamische Betrachtungen an Funktionsgleichungen

Dynamische Betrachtungen können auch an Funktionsgleichungen erfolgen. Dabei handelt es sich um dynamische Betrachtungen zu Rechenoperationen, meist zur Division, die sich durchaus formalisieren lassen und deshalb als präformal bezeichnet werden können. Diese Betrachtungen können bereits in der Bruchrechnung angewendet werden, indem man untersucht, wie sich der Wert eines Bruches verändert, wenn z. B. der Nenner bei konstantem Zähler immer größer wird.

Es sollte aber jetzt beachtet werden, dass sich die Bedeutungen der Begriffe Bruch, Zähler und Nenner seit ihrer Einführung in der Orientierungsstufe verändert haben, wo lediglich natürliche Zahlen als Belegungen möglich waren. Mit der Erweiterung der Zahlenbereiche kann ein Bruch jetzt auch als eine andere Schreibweise für einen Quotienten aus reellen Zahlen bzw. Termen im Bereich der reellen Zahlen aufgefasst werden. Treten Variable im Bruch auf, wird oft auch von Bruchtermen gesprochen.

Mit diesen Betrachtungen kann das Verhalten von Funktionen im Unendlichen und an Polstellen untersucht werden. Dabei sollte eine bestimmte Sprech- und Schreibweise eingeführt werden. Mit der Einführung dieser Schreibweisen wird die Limes-Schreibweise vorbereitet, die aber in Kl. 10 noch nicht verwendet werden sollte.

(1) Verhalten von Funktionen im Unendlichen

Beispiel: $y = \frac{2}{x} - 1$ Wird x immer größer, das heißt, strebt x gegen Unendlich, wird der Quotient $\frac{2}{x}$ immer kleiner, das heißt, er strebt gegen Null. Die Differenz $\frac{2}{x} - 1$ strebt dann gegen – 1.

Schreibweise: für $x \to \infty$ gilt $y \to -1$

(2) Verhalten an Polstellen

Beispiel: $y = \frac{2}{x-1}$ Wenn x gegen 1 strebt, strebt x – 1 gegen Null. Der Wert des Bruchterms $\frac{2}{x-1}$ wird dann betragsmäßig immer größer und strebt gegen Unendlich. Ist x stets größer als 1, d. h. strebt x von rechts gegen 1, so ist der Term $\frac{2}{x-1}$ stets größer als Null und strebt gegen plus Unendlich. Ist x stets kleiner als 1, d. h. strebt x von links gegen 1, so ist der Term $\frac{2}{x-1}$ stets kleiner als Null und strebt gegen minus Unendlich.

Schreibweise: für $x \to 1,\ x > 1$ gilt $y \to +\infty$ und für $x \to 1,\ x < 1$ gilt $y \to -\infty$

Zur Beschreibung von Eigenschaften von Funktionen durch Funktionalgleichungen

Eine Funktionalgleichung ist eine Gleichung, in der eine oder mehrere Funktionen als Unbekannte (Variable) auftreten. Die Schüler lernen Funktionalgleichungen erstmalig im Zusammenhang mit den Symmetrieeigenschaften von Funktionen kennen. Alle geraden Funktionen (die y-Achse ist Symmetrieachse des Graphen) erfüllen die Funktionalgleichung $f(x) = f(-x)$ und alle ungeraden Funktionen (der Graph ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung) die Funktionalgleichung $f(x) = -f(-x)$.

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung der wesentlichen Eigenschaft einer Klasse von Funktionen ist die Charakterisierung periodischer Funktionen durch die Funktionalgleichung $f(x + p) = f(x)$, wobei p eine positive reelle Zahl ist und (eine) Periode der Funktion genannt wird.

Ein weiteres Beispiel für Funktionalgleichungen im Analysisunterricht in der Oberstufe ist die Gleichung $f'(x) = f(x)$, die für die Funktion $y = e^x$ erfüllt wird. Hierbei handelt es sich sogar um eine Differenzialgleichung als ein Spezialfall einer Funktionalgleichung.

In Funktionalgleichungen können außer Variablen für Funktionen auch die unabhängige Variable x sowie Parameter auftreten.

Mit der Betrachtung solcher Gleichungen können die Kenntnisse zum Gleichungs- und Funktionsbegriff qualitativ erweitert werden. Es ist dabei nicht notwendig, die Bezeichnung „Funktionalgleichung“ zu verwenden.

Weiterhin können durch die Verwendung funktionaler Schreibweisen wesentliche Eigenschaften von elementaren Funktionen beschrieben und damit gefestigt werden. Ein Beispiel ist die Funktionalgleichung mit weiteren Parametern $f(x + a) = f(x) + m \cdot a$. Diese Gleichung wird durch die lineare Funktion $y = mx + n$ erfüllt und beschreibt die grundlegende Wachstumseigenschaft einer linearen Funktion. Für den Spezialfall $a = 1$ ergibt sich die Aussage, dass bei Wachstum von x um 1 sich der Funktionswert um m verändert, was beim Anstiegsdreieck verwendet wird (vgl. S. 37).

Für Potenzfunktionen mit der Gleichung $y = a \cdot x^n$, $a \in R$, $n \in Z$, gilt die Funktionalgleichung $f(k \cdot x) = k^n \cdot f(x)$. Damit werden die dynamischen Eigenschaften der direkten und umgekehrten Proportionalität beschrieben (vgl. S. 22 ff):

$$\text{Für } n = 1 \text{ gilt: } f(k \cdot x) = k \cdot f(x) \quad \text{und für } n = -1 \text{ gilt: } f(k \cdot x) = \frac{f(x)}{k}$$

Mit der Funktionalgleichung für eine Potenzfunktion werden weiterhin die dynamischen Eigenschaften der Funktionen $y = a \cdot x^2$ und $y = a \cdot x^3$ beschrieben, die Grundlage für die Sätze zum Oberflächeninhalt und zum Volumen ähnlicher Körper sind.

Das Verwenden von Funktionalgleichungen sollte in Klasse 10 ausgehend vom Beispiel der Betrachtung von Symmetrieeigenschaften gefestigt und vertieft werden.

10.2 Sicheres Wissen und Können

Hinweis: Für Funktionen und Graphen sollten in der Regel nur die in 10.1 genannten Beispiele verwendet werden.

Die Schülerinnen und Schüler

- können reale Sachverhalte durch Funktionen in geeigneter Darstellung beschreiben.
- können das Monotonieverhalten von Funktionen durch dynamische Betrachtungen beschreiben, wenn eine Funktionsgleichung oder ein Funktionsgraph gegeben sind,
- wissen, dass „∞“ das Symbol für „Unendlich“ ist,
- können die Schreibweise $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ und $x \to x_P$ und die entsprechenden Sprechweisen „x geht gegen ..“ verwenden,
- wissen, dass der Verlauf des Graphen für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ untersucht werden muss, wenn das Verhalten im Unendlichen betrachtet werden soll,
- wissen, dass der Verlauf des Graphen für $x \to x_P$ von rechts und links betrachtet werden muss, wenn das Verhalten an Polstellen betrachtet werden soll und wissen, dass die Polstellen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden,
- wissen, dass das Verhalten im Unendlichen und an Polstellen durch Asymptoten beschrieben werden kann,
- können Polstellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten in gegebenen Graphen erkennen,
- können bei einem gegebenen Graphen Aussagen über das Verhalten im Unendlichen und an Polstellen formulieren,
- können den Verlauf des Graphen an Polstellen und Asymptoten skizzieren, wenn Aussagen über den Graphen gegeben sind,
- können durch dynamische Betrachtungen an der Funktionsgleichung den Grenzwert einer Funktion im Unendlichen bestimmen,
- wissen, dass Funktionen minimale und maximale Funktionswerte besitzen können, die man Extremwerte nennt und dass die entsprechenden x-Werte Extremstellen heißen (Maximumstelle und Minimumstelle),
- wissen, dass Funktionsgraphen Hoch- und Tiefpunkte besitzen können, die man Extrempunkte nennt,
- können an gegebenen Graphen mit maximal zwei Extrempunkten Maxima, Minima, Hochpunkte bzw. Tiefpunkte ablesen und die Eigenschaften beschreiben,
- können Skizzen von Graphen anfertigen, wenn die Art eines Extremums und die Extremstelle gegeben sind,
- können die Symmetrieeigenschaften von Potenzfunktionen mit den Gleichungen $f(x) = f(-x)$ und $f(x) = -f(-x)$ beschreiben bzw. untersuchen,
- können inhaltliche Betrachtungen zu Umkehrfunktionen anstellen.

10.3 Aufgaben

Hinweis: Bei allen angegebenen Funktionsgleichungen gilt immer $x \in \mathbb{R}$ zusammen mit den eventuell erfolgten Einschränkungen des Definitionsbereiches.

1. Beschreibe die folgenden Sachverhalte durch eine Funktion.

a) In den letzten 5 Jahren ist mein Einkommen jährlich um 50 € gewachsen.
b) In den letzten 5 Jahren ist mein Einkommen jährlich um 1 % gewachsen.
c) In den letzten 5 Jahren hatte ich stets dasselbe Einkommen.
d) In den letzten 5 Jahren hatte ich kein Einkommen.

2. Ordne den folgenden Sachverhalten je eine der folgenden Funktionsgleichungen zu.
Gib jeweils den Definitionsbereich und wenn möglich, die Werte von Parametern an.

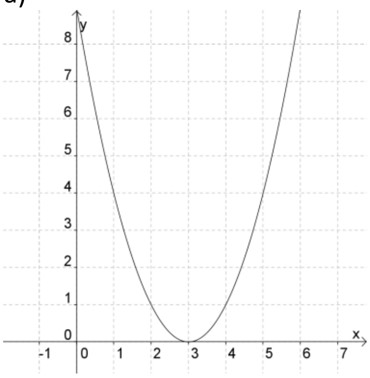
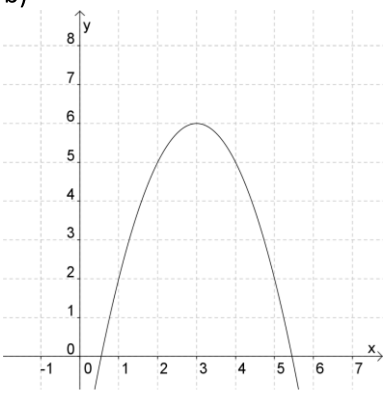
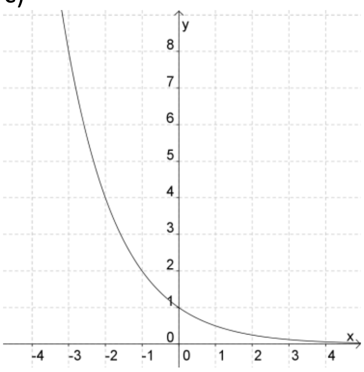
(1) $f(x) = x^3$ (2) $f(x) = a \cdot x^2$ (3) $f(x) = a \cdot x^{-1}$, $x \neq 0$ (4) $f(x) = mx + n$ (5) $f(x) = a \cdot b^x$

Sachverhalte:
A: Die Fläche eines Kreises ist proportional zum Quadrat seines Radius.
B: Je mehr Arbeiter auf einer Baustelle arbeiten, desto kürzer ist die Zeit, in der die Arbeit bewältigt ist.
C: Das Volumen eines Würfels entspricht der 3. Potenz seiner Seitenlänge.
D: Eine Bakterienart verdoppelt ihren Anfangsbestand stündlich.
E: Alkohol wird im Körper so abgebaut, dass sich der Blutalkoholspiegel stündlich um 0,2 ‰ verringert.

3. Beschreibe das Monotonieverhalten folgender Funktionen. Wähle geeignete Intervalle.

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = -x^2$ e) $f(x) = 2^x$ f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4. Beschreibe das Monotonieverhalten der dargestellten Funktionen

a)

b)

c)


5. Beschreibe das Verhalten folgender Funktionen bei Annäherung an x = 0 von links und von rechts. Bei d) und e) gilt: $x \neq 0$.

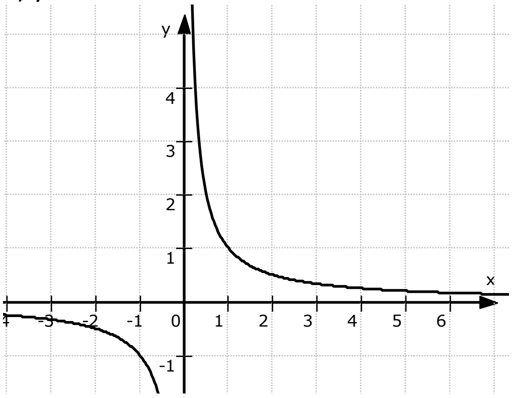
a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ f) $f(x) = 2^x$

6. Beschreibe das Verhalten folgender Funktionen im Unendlichen. Bei d) und e) gilt: $x \neq 0$.

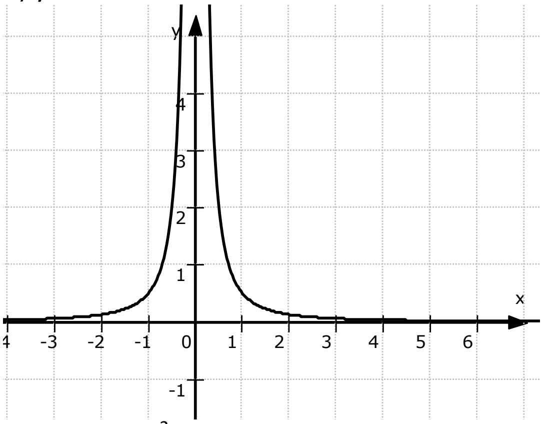
a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ f) $f(x) = 2^x$

7. Markiere die Polstellen in den grafischen Darstellungen und beschreibe das Verhalten der Funktionen an den Polstellen.

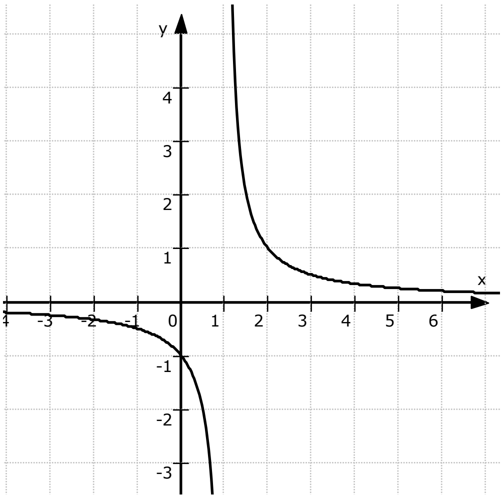
a) $y = x^{-1}$



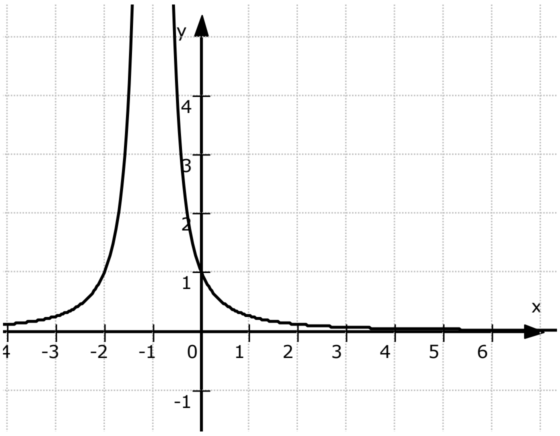
b) $y = x^{-2}$



b) $y = (x - 1)^{-1}$



c) $y = (x + 2)^{-2}$



8. Beschreibe das Verhalten der in Aufgabe 11 dargestellten Funktionen für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.

9. Skizziere jeweils einen Funktionsgraphen, für den die folgende Beschreibung zutreffend ist.

a) Wenn x wächst, strebt y gegen Unendlich.

b) Für $x \to \infty$ nähert sich der Graph immer mehr der Geraden $y = -1$.

c) Für $x \to -1$ von rechts strebt y gegen $-\infty$.

d) Wenn x immer kleiner wird, wird y immer größer.

e) Wenn x von links gegen 2 strebt, schmiegt sich der Graph der senkrechten Asymptote an der Stelle 2 immer mehr an und strebt gegen Unendlich.

f) Für $x \to -\infty$ gilt $y \to 0$.

10. Gib eine mögliche Funktionsgleichung für eine Funktion an, die folgende Eigenschaft hat.

a) Für $x \to \infty$ gilt $y \to \infty$.

b) Für $x \to 0$ (von links und von rechts) gilt $y \to \infty$.

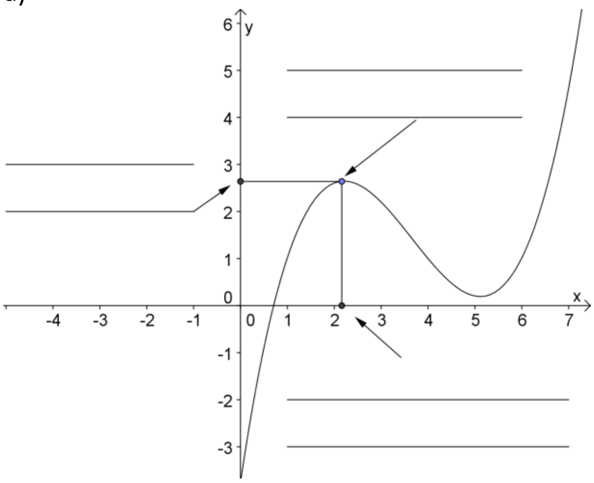
c) Für $x \to 3$ von links gilt $y \to -\infty$ und für $x \to 3$ von rechts gilt $y \to \infty$.

11. Skizziere je einen Graphen für eine Funktion mit folgender Eigenschaft.

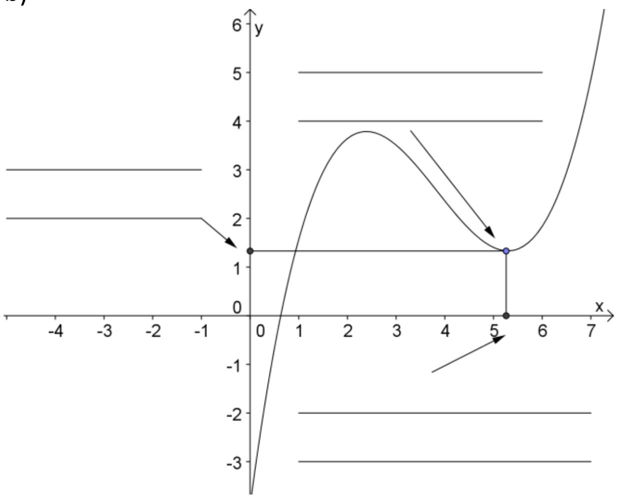
a) Die x-Achse ist eine Asymptote der Funktion.
b) Die y-Achse ist eine Asymptote der Funktion.
c) Die Gerade y = 6 ist Asymptote der Funktionen.
d) Die Funktion hat bei x = − 1 eine senkrechte Asymptote.

12. Beschrifte die Markierungen. Verwende dazu folgenden Begriffe: Hochpunkt, Tiefpunkt, Maximum, Minimum, Maximumstelle, Minimumstelle, Extrempunkt, Extremstelle
Beschreibe das Monotonieverhalten der Funktion in der Umgebung des markierten Extrempunktes.

a)



b)

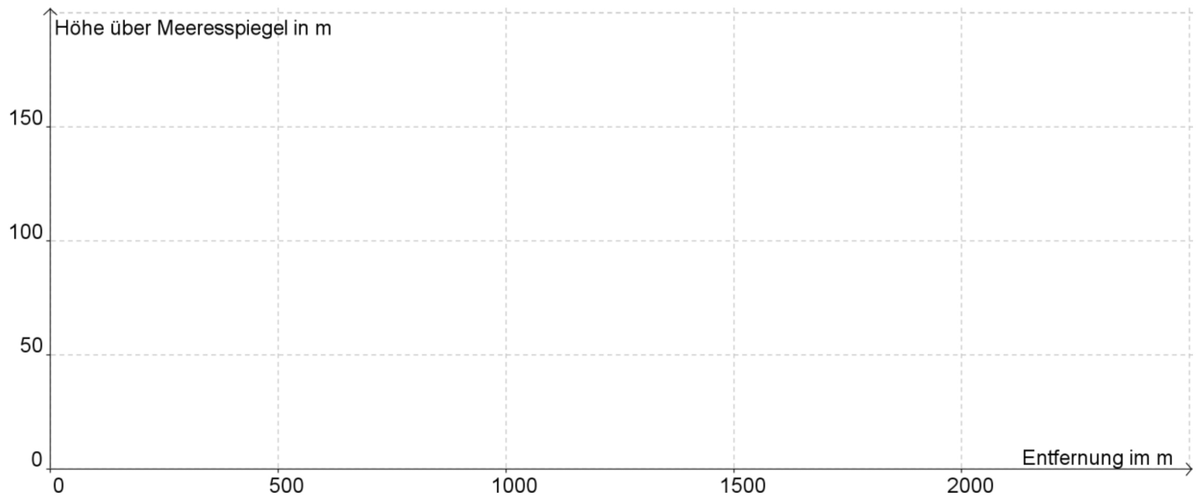


13. Tim fährt von A-Dorf, das in einer Höhe von 50 m liegt, in das 2 km entfernte C-Dorf. 500 m entfernt von A-Dorf befindet sich der höchste Punkt seiner Tour, das 150 m hoch gelegene B-Dorf. Danach geht es zuerst steil abwärts. Auf dem letzten Kilometer sind bis in das auf Meeresspiegelhöhe gelegene C-Dorf nur 25 m bergab zu fahren.

a) Zeichne in das Koordinatensystem ein mögliches Streckenprofil.

b) Gib einen Extremwert, eine Extremstelle und einen Extrempunkt des Streckenprofils an.

c) Beschreibe das Monotonieverhalten des Streckenprofils.



14. Entscheide, ob die Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuze jeweils an.

	wahr	falsch
a) Ein Minimum einer Funktion ist ein bestimmter Punkt des Graphen.	☐	☐
b) Eine Minimumstelle ist ein bestimmter x-Wert.	☐	☐
c) Eine Maximumstelle ist ein bestimmter y-Wert.	☐	☐
d) Ein Tiefpunkt ist ein Punkt des Graphen der Funktion.	☐	☐
e) Extremstellen sind bestimmte y-Werte.	☐	☐
f) Ein Maximum ist die y-Koordinate eines Hochpunktes.	☐	☐

15. Es sollen Zusammenhänge zwischen der Größe Y und der Größe X untersucht werden.

a) Beschreibe die Abhängigkeit der Größe Y von der Größe X in Worten.

b) Gib eine Funktionsgleichung für die Abhängigkeit der Größe Y von der Größe X an.

c) Beschreibe umgekehrt einen Zusammenhang, bei dem die Größe X von der Größe Y abhängt.

d) Gib eine Funktionsgleichung für den umgekehrten Zusammenhang an.

Größe X	**Größe Y**
(1) Anzahl n von Mineralwasserflaschen zu 0,35 €	Preis P für n Flaschen
(2) Volumen V eines Eisenstücks mit einer Dichte von 7,9 g/cm^3	Masse m des Eisenstücks
(3) Anzahl n von Pumpen mit einer Leistung von je 10 m^3/h	Zeit t zum Leeren eines Beckens von 5000 m^3

16. In den Diagrammen werden zwei verschiedene Bewegungen einer Person dargestellt.

Diagramm 1

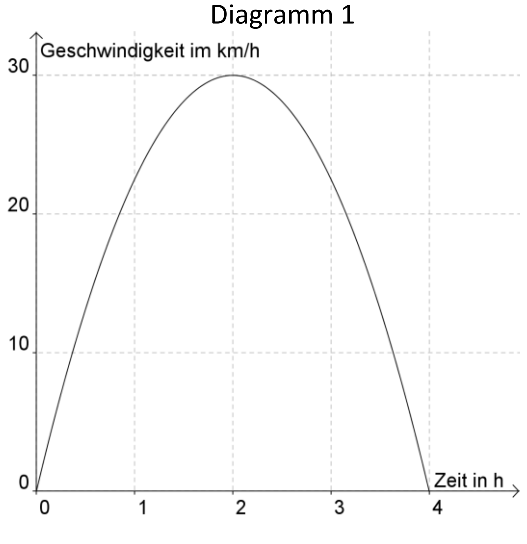
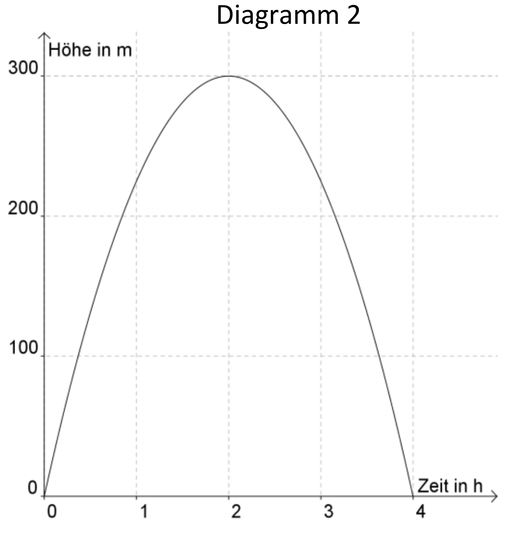


Diagramm 2

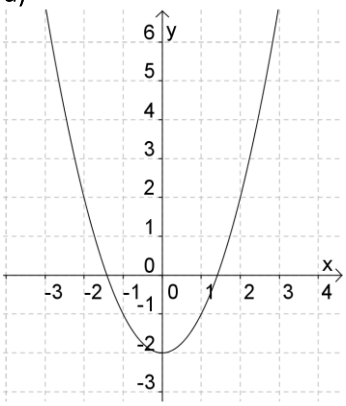


Kreuze jeweils an, ob die Aussage für das Diagramm 1 oder 2 zutrifft.

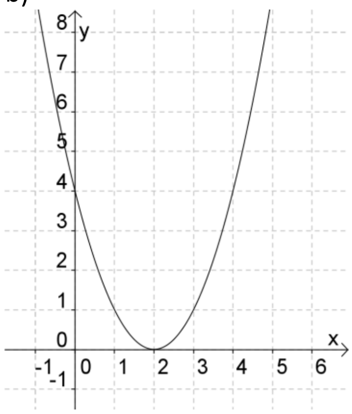
	Diagramm 1	Diagramm 2
Nach 2 Std. hat die Person ihre größte Geschwindigkeit erreicht.		
In den ersten beiden Stunden steigt die Geschwindigkeit an.		
Nach 2 Std. macht die Person eine Pause.		
In den letzten beiden Stunden bewegt sich die Person bergab.		
In den letzten beiden Stunden wird die Person langsamer.		
Nach 2 Std. hat die Person den höchsten Punkt erreicht.		

17. Im Folgenden sind verschiedene Graphen dargestellt. Kreuze an, welche der Funktionen aufgrund der Form des dargestellten Graphen achsensymmetrisch bzw. punktsymmetrisch sind.

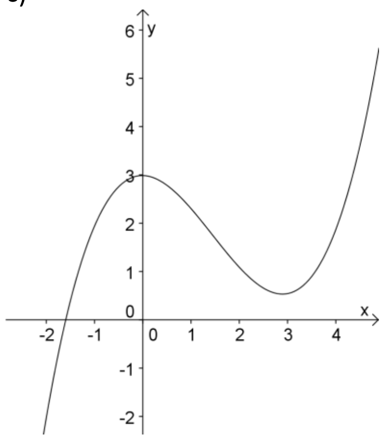
a)



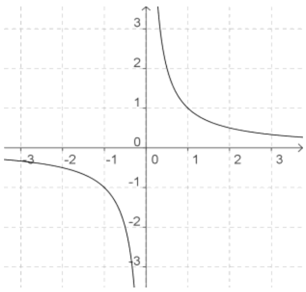
b)



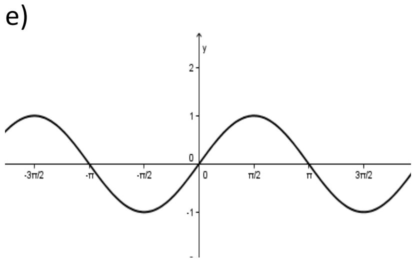
c)



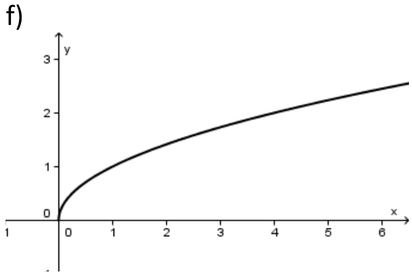
d)



e)



f)



	a)	b)	c)	d)	e)	f)
achsensymmetrisch						
punktsymmetrisch						

18. Skizziere jeweils einen möglichen Funktionsgraphen mit folgenden Eigenschaften.

a) Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) Die Funktion besitzt nur die Nullstellen – 2 und 4. Der Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse lautet $S_y(0 \mid -4)$.

c) Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Die Funktion besitzt genau 4 Nullstellen.

19. Berechne $f(-x)$ und $-f(-x)$ und kreuze an, welcher der Zusammenhänge für alle x gilt.

	$f(-x)$	$-f(-x)$	$f(x) = f(-x)$	$f(x) = -f(-x)$
a) $f(x) = x^3$				
b) $f(x) = x^{-2}$				
c) $f(x) = x^4$				