

# **Probleme beim Arbeiten mit Variablen, Termen und Gleichungen**

Tage des Unterrichts in Mathematik,  
Naturwissenschaften und Technik  
Rostock 2010

Prof. Dr. Hans-Dieter Sill, Universität Rostock, <http://www.math.uni-rostock.de/~sill/>

## **Vorbemerkungen**

- Befähigung zum verständnisvollen und freudigen Arbeiten mit Termen ist eines der schwierigsten bisher ungelösten Problem in didaktischer Theorie und schulischer Praxis
- Hauptproblem: Meisterung des dialektischen Wechselverhältnisses von inhaltlichen und formalen Aspekten, Beispiel: Gleichung
- Vernachlässigung der Algebra in den Bildungsstandards von 2003
- Bitte um Mithilfe beim Projekt SWK in MV:  
Mail an: [mathedidaktik@uni-rostock.de](mailto:mathedidaktik@uni-rostock.de)

## Warum mögen Schüler Terme nicht?

- (1) Sie machen oft sehr viele Fehler und bekommen schlechte Noten.

## Empirische Ergebnisse zum Arbeiten mit Termen und Gleichungen

Vergleichsarbeit Nordrhein-Westfalen, Sachsen-Anhalt,  
Kl. 9, Dez. 1990

Aufgabe	Erfüllung in %					
	EOS	POS	Gy	GS	RS	HS
Vereinfache: $3x - (2x - b)$	69	41	45	19	41	34
Vereinfache: $(u - 1)(u + 1)$	78	51	74	31	44	20
Löse die Gleichung $+ 2 = 8$	86	79	75	71	72	54

Vergleichsarbeit MV, Kl. 7, Nov. 2000

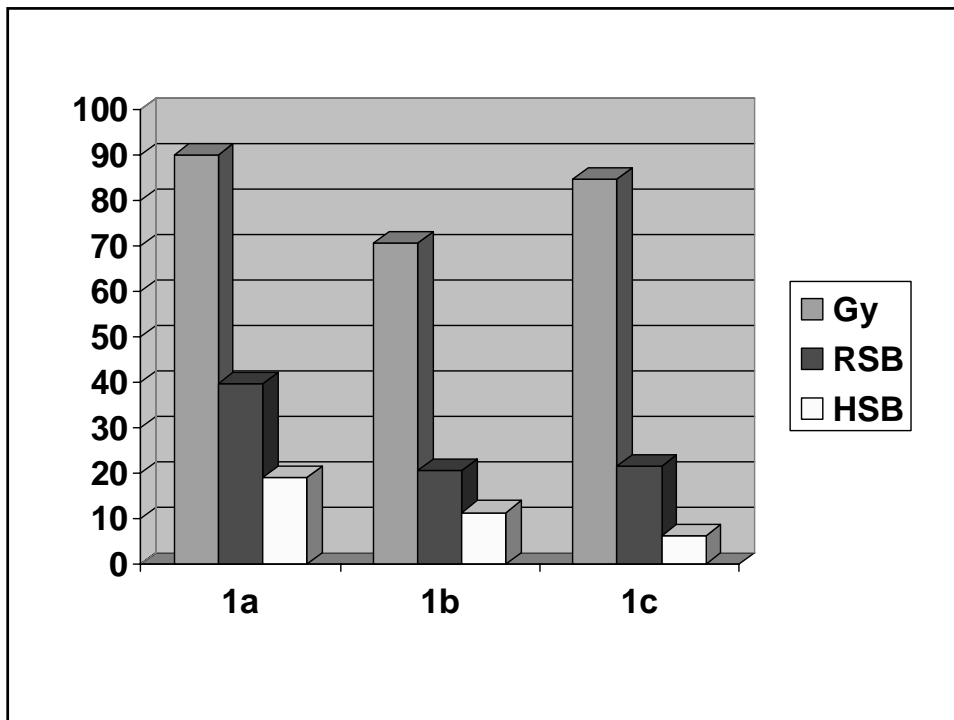
Aufgabe	RSB	HSB
a) Bestimme x! $7 + x = 16$	98 %	91 %
b) Bestimme x! $3 \cdot x - 2 = 16$	93 %	78 %
c) Bestimme x! $15 - 2 \cdot x = 5$	22 %	14 %

Ergebnisse der Vergleichsarbeit MV Klasse 9, Schuljahr 2001/02

Aufgabe

Schreiben Sie als Term.

Termbeschreibung	Term
a) Die Summe aus a und der Hälfte von b.	
b) Der Quotient aus a und dem Doppelten von b.	
c) Das Quadrat der Differenz von a und b.	



Anzahl unterschiedlicher Eintragungen Aufgabe 1/2001

	alle	Gymnasium	Haupt-/Realschulen
1a	276	47	253
1b	304	72	262
1c	194	41	174

Beispiele für Eintragungen bei 1 a):

$a + b$     $ab/2$     $a/b$     $2/b$     $a + a$     $a = b/2$     $a + a = b:2$   
 $+ a :2:b$     $a + :2b$

	GY	RSB	HSB
kein Eintrag	1,4	21,3	40,4

Kenntnisse von Erwachsenen  
aus: G. Malle: Didaktische Probleme der  
elementaren Algebra, Vieweg, 1993

Interviewer legt Christa (36, Akademikerin)  
folgende Aufgabe vor:

An einer Universität sind P Professoren und  
S Studenten. Auf einen Professor kommen  
6 Studenten. Drücken Sie die Beziehung  
zwischen S und P durch eine Gleichung aus!

Ch: (schreibt)  $6S = P$

I: Nehmen wir einmal an, es sind 10 Professoren.  
Wie viele Studenten sind es dann?

Ch: 60.

I: Setzen Sie das in die Gleichung ein!

Ch:  $6 \cdot 60 = 10$ . Aha, das kann nicht stimmen.  
(Nach einer Pause schreibt sie)

$$P + 6S = P + S.$$

I: Was bedeutet das?

Ch: Die Professoren und die auf jeden Professor  
fallenden 6 Studenten ergeben zusammen alle  
Professoren und Studenten.

I: Hmm ... Bei dieser Gleichung könnte man  
auf beiden Seiten P subtrahieren. Was ergibt  
sich dann?

Ch: (streicht P auf beiden Seiten durch)  $6S = S$ .

I: Kann das stimmen?

Ch: Ja natürlich ... die Gruppen zu 6 Studenten  
ergeben zusammen alle Studenten.

I: Setzen Sie wieder die Zahlen ein!

Ch: 10 Professoren und 60 Studenten. Dann ist das  $6 \cdot 60 = 10$ . Das kann nicht stimmen. (Nach einer Pause schreibt sie)  $P + S = 7$ .

I: (räuspert sich)

Ch: (bessert aus zu)  $P + 6S = 7$

I: Was bedeutet das?

Ch: Ein Professor und seine 6 Studenten sind zusammen 7 Personen.

Walter (23, Akademiker)

I: Können Sie die Gleichung  $x/8 = 9$  lösen?

W: (schweigt minutenlang) Ich weiß nicht mehr, wie das geht. Da gibt es eine Regel, aber die habe ich leider vergessen.

## Warum mögen Schüler keine Terme ?

- (1) Sie machen oft sehr viele Fehler und bekommen schlechte Noten.
- (2) Ihre Lehrer verstehen oft nicht, warum sie solche Probleme haben.

## Probleme mit Variablen

- Ist eine Variable veränderlich?  
Ja:  $y = x + 1$   
Nein:  $x + 1 = 0$ ;  $a = 3 \text{ cm}$   
Ja und Nein: Parameter  $m$  in:  $y = m \cdot x + n$
- Ist eine Variable ein Platzhalter für Zahlen?  
Ja:  $3 \cdot x = 12$   
Nein:  $A = a \cdot b$ ;  $y = f(x)$ ;  $x$  wächst;  $P(x | y)$
- Kann man für eine Variable beliebige Buchstaben verwenden?  
Ja: Punkte in der Geometrie  
Nein: sonst, z. B. Parameter: nur  $a$  bis  $q$

## Vorschläge zur Entwicklung des Variablenbegriffs

- Keine allgemeinen Debatten und Erklärungen
- Alle Aspekte an Beispielen bewusst machen
- Buchstaben nur als „Variable“ bezeichnen, wenn sie auch variabel sind
- Ansonsten von „Unbekannte“, „Bezeichnung“ oder „Konstante“ sprechen
- Belegen von Variablen durch Zahlen und Terme als sichere Fertigkeit ausbilden, dazu Handlungen auf gegenständlicher Ebene

## Vorschläge für SWK

1. Gib zwei Bedeutungen an, die der folgende Buchstabe in der Mathematik haben kann.  
a) a            b) b            c) m            (Kl. 6)
2. Nenne drei Objekte, die in der Mathematik mit dem Buchstaben p bezeichnet werden. Gib jeweils zwei mögliche Belegungen für p an. (Kl. 8)
3. Erläutere am Beispiel der Funktionsgleichung  $y = m \cdot x + n$  Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen einer Variablen und einem Parameter. (Kl. 10 Gy)

## Warum mögen Schüler keine Terme ?

- (1) Sie machen oft sehr viele Fehler und bekommen schlechte Noten.
- (2) Ihre Lehrer verstehen oft nicht, warum sie solche Probleme haben.
- (3) Sie sehen keinen Sinn in Termen.



## Wozu braucht man Terme?

- Mit Termen kann man Rechnungen mit Zahlen oder Größen mit gleicher Struktur *allgemein* beschreiben.
- Mit Termen kann man Sachverhalte mit gleicher Struktur *allgemein* beschreiben.
- Mit Termen können Eigenschaften von Zahlen *allgemein* beschrieben werden.

Beispiele:

eine ungerade Zahl:  $2n + 1$

eine durch 3 teilbare Zahl:  $3n$

## Vorschläge für SWK

1. Beschreibe die folgenden Rechnungen mit Größen allgemein durch einen Term mit Variablen für die Größenangaben.

a)  $4\text{ m} \cdot 5\text{ m}$     b)  $2 \cdot (4\text{ m} + 5\text{ m})$     c)  $0,5 \cdot 120\text{ €}$

2. Aus Regalen der Länge 40 cm und 80 cm kann eine Regalwand zusammengestellt werden. Gib einen Term an, mit dem die Länge der Regalwand allgemein beschrieben werden kann.



## Warum mögen Schüler keine Terme ?

- (1) Sie machen oft sehr viele Fehler und bekommen schlechte Noten.
- (2) Ihre Lehrer verstehen oft nicht, warum sie solche Probleme haben.
- (3) Sie sehen keinen Sinn in Termen.
- (4) Sie erkennen die Struktur von Termen nicht.

## Wie sieht man die Struktur von Termen ?

- Begriff: Erkennen der Rechenoperationen und der Reihenfolge ihrer Ausführung
- Ausbildung der Handlung beginnt beim Rechnen mit Zahlen und Größen in Kl. 5/6
- als Teilhandlung *vor* den Termumformungen automatisieren, dabei beachten:
  - Verkürzung der Schreibweise
  - Rechenoperationen erhalten Ergebnischarakter
  - Erkennen der Struktur von „außen nach innen“: Grundstruktur eines Terms, „Einkringeln“

## Vorschläge SWK

1. Gib an, ob es sich bei den folgenden Termen um eine Summe, eine Differenz, ein Produkt, einen Quotienten oder eine Potenz handelt.  
a)  $5 \cdot 100 + 210$                       b)  $5 + 100 \cdot 210$  (Kl. 6)
2. Die folgenden Terme haben die Struktur  $T_1 + T_2 + T_3$ . Gib jeweils  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$  an.  
a)  $7x + 3y + z$                       b)  $-x^2 + 2x - 1$  (Kl. 8)
3. Schreibe die folgenden Quotienten zweier Terme als Produkte zweier Terme. (Kl. 10 Gy)  
a)  $\frac{(a+b)c}{d}$                       b)  $\frac{ab}{cd}$                       c)  $\frac{x - x_1}{2(x - x_2)}$

## Warum mögen Schüler keine Terme ?

- (1) Sie machen oft sehr viele Fehler und bekommen schlechte Noten.
- (2) Ihre Lehrer verstehen oft nicht, warum sie solche Probleme haben.
- (3) Sie sehen keinen Sinn in Termen.
- (4) Sie erkennen die Struktur von Termen nicht.
- (5) Sie können nicht heuristisch vorgehen.

## Wie sollte man heuristisch vorgehen?

- Algorithmisch: Ausbilden von Fertigkeiten: „Handeln ohne Nachzudenken“
- Heuristisch: Ausbilden von Fähigkeiten: „Erst denken, dann handeln.“
- Verhältnis von separater Entwicklung der einzelnen Fertigkeiten und ihre Integration zu einer Fähigkeit
- Bringen Sie Ihre Schüler auf TRAP!
  1. Typ der Aufgabe erkennen  
Worum geht es in der Aufgabe?
  2. Regeln überlegen, die anwendbar sind  
Kann ich mir ein Beispiel bilden?
  3. Ausführen der Rechnungen/Umformungen
  4. Probe/Kontrolle. Kann das wahr sein?

## Beispiel aus Duden/Paetec MV 8 R

1. Forme die folgenden Terme um. Gehe in vier Schritten vor.

(1) Bestimme den Aufgabentyp. Ermittle die Umformung.

(2) Nenne die anzuwendende Regel.

(3) Führe die Umformung durch.

(4) Kontrolliere.

a)  $-3a + 5a$

b)  $-(2b + 3b)$

c)  $(27x - 9y) \cdot 3$

d)  $-5ab^2 + 2a^2b$

e)  $(x - 1) \cdot (x + 2)$

f)  $12x - 4xy + 8x$

g)  $(x - 2y) \cdot (-2x)$

h)  $(2x - 2y) - (2y + 2x)$

2. Vereinfache folgende Terme.

a)  $13a - 28a + 17a$

b)  $5a \cdot (-7b) \cdot 2a$

c)  $5 \cdot (3x + 16) - 50$

d)  $(a + 2) \cdot (a - 5)$

e)  $199 \cdot 201$

f)  $25c + (-c + 11d)$

g)  $a \cdot (2 + a) - a^2$

h)  $300am + 400bm - 500 cm$



## Warum mögen Schüler keine Terme ?

- (1) Sie machen oft sehr viele Fehler und bekommen schlechte Noten.
- (2) Ihre Lehrer verstehen oft nicht, warum sie solche Probleme haben.
- (3) Sie sehen keinen Sinn in Termen.
- (4) Sie erkennen die Struktur von Termen nicht.
- (5) Sie können nicht heuristisch vorgehen.
- (6) Die Terme kommen schlagartig auf sie zu.
- (7) Sie müssen oft mit viel zu komplizierten Termen arbeiten.

## Was soll das?

15. a) $\frac{3x+2y}{4x} - \frac{x-3y}{2y}$	b) $\frac{2p-q}{3q} + \frac{5q-3p}{4p}$	c) $\frac{r+3s}{2r} + \frac{s-3r}{3s}$	d) $\frac{x^2-y^2}{x^2y} + \frac{x^2+y^2}{xy^2}$
e) $\frac{u-3v}{2u} + \frac{3u+v}{5v} - \frac{1}{3}$	f) $\frac{1}{u^2} - \frac{2}{uv} + \frac{1}{v^2}$	g) $\frac{2a-b+c}{ab} - \frac{a-2b+3c}{bc} + \frac{2a+b-2c}{ac}$	
h) $\frac{4p+7q}{5pr} - \frac{p-5r}{2qr} + \frac{2q-r}{pq}$	i) $\frac{3a-b}{4ab} + \frac{5b-3c}{6bc} + \frac{2c-a}{8ac}$	j) $\frac{4m+3n}{5mk} - \frac{7n-4k}{9nk} + \frac{6m-5k}{15mn}$	
16. a) $\frac{a+2}{2a+2} + \frac{3a-1}{3a+3}$	b) $\frac{5m+1}{3m-12} - \frac{2m-1}{4m-16}$	c) $\frac{x-3}{4x+12} + \frac{1-x}{6x+18}$	d) $\frac{x-3y}{2x+4y} - \frac{2x+y}{3x+6y}$
e) $\frac{x+2y}{6x-3y} + \frac{2y-x}{10x-5y}$	f) $\frac{3a+b}{a^2-b^2} + \frac{2a-b}{a^2-ab}$	g) $\frac{y}{x^2+xy} + \frac{3y+x}{y^2-x^2}$	h) $\frac{r+s}{r^2-rs} - \frac{4s}{r^2-s^2}$
i) $\frac{p}{p^3-p^2q} - \frac{p+q}{q^3-p^2q}$	j) $\frac{m}{m^2+mn} + \frac{m-n}{m^2+2mn+n^2}$	k) $\frac{x^2+y^2}{x^2y-y^2} + \frac{2x}{x^2-y^2}$	l) $\frac{3m-n}{m^2-n^2} - \frac{p+q}{mn-n^2}$
m) $\frac{1}{pq+q^2} - \frac{2}{p^2-q^2} + \frac{1}{p^2-pq}$	n) $\frac{b}{a^2-b^2} + \frac{a}{ab-b^2} - \frac{a}{b^2-a^2}$	o) $\frac{1}{x^2-x} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}$	
p) $\frac{u+3}{u^2-6u+9} - \frac{2u}{u^2-9} - \frac{u-3}{u^2+6u+9}$	q) $\frac{2p-q}{p^2+2pq+q^2} + \frac{2p+q}{p^2-2pq+q^2} - \frac{4p}{p^2-q^2}$		

Aus einem Gymnasiallehrbuch für die Klasse 8

Es reicht!

a)  $\frac{(a+b)c}{d}$

b)  $\frac{ab}{cd}$

c)  $\frac{x-x_1}{2(x-x_2)}$

d)  $\frac{n(n+1)}{2}$

e)  $\frac{(y_2-y_1)(x-x_1)}{x_2-x_1}$

f)  $\frac{R_1+R_2}{R_1 \cdot R_2}$

a)  $2x(7y-z)$

b)  $2x-3y(z+1)$

c)  $\frac{4x-y}{3z}(x+2)$

d)  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

e)  $\frac{1}{n+2}x^{n+1}$

f)  $\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$

Terme aus Vorschlägen für SWK, Gy

**Vielen Dank für die  
Aufmerksamkeit!**