

## Probleme und Möglichkeiten der Behandlung der bedingten Wahrscheinlichkeit

1. Der Begriff der bedingte Wahrscheinlichkeit in Planungsdokumenten
2. Eine Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen
3. Arten zufälliger Vorgänge und Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffes
4. Bezeichnung und Schreibweise der bedingten Wahrscheinlichkeit
5. Formale und inhaltliche Aspekte des Fachausdrucks „bedingte Wahrscheinlichkeit“
6. Aufgabentypen und Lösungsmethoden

### 1. Der Begriff der bedingte Wahrscheinlichkeit in Planungsdokumenten

Land	Kl./ Kurs	bed. Wahr.	Satz von Bayes	Vierfeldertafel
BB, 03	LK	X	X	
BE, 04	GK/LK	X	x (LK)	x
BY, 91	GK/LK	x (LK)	x (LK)	
HB	12/13	x (Z)		
HE	13	x		
MV, 99	11			
RP	LK	x		
SN,04	GK	x (WP)	x (WP)	
	LK	x	x	
ST, 03	10 – 12	x	inhaltlich	x
TH, 99	10 - 12	x (MG)	x (MG)	

# Bedingte Wahrscheinlichkeit im neuen Lehrplan für das Gymnasium in Sachsen

## Grundkurs Kl. 11

Wahlpflicht 1: Bedingte Wahrscheinlichkeiten	8 Ustd.
Anwenden der Kenntnisse über mehrstufige Zufallsversuche beim Untersuchen praxisnaher Fragestellungen - bedingte Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes - Untersuchen zweier Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit	→ Kl. 8, LB 2 Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen einer Erkrankung bei positivem Test auf Aids oder Krebs anschauliche Darstellung der Idee des Satzes von Bayes am Baumdiagramm Abgrenzung der Fachsprache zur Umgangssprache ⇒ Kommunikationsfähigkeit

## Leistungskurs Kl. 11

- bedingte Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes - Untersuchen zweier Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit	anschauliche Darstellung der Idee des Satzes von Bayes am Baumdiagramm Abgrenzung der Fachsprache zur Umgangssprache ⇒ Kommunikationsfähigkeit
---	--

## 1. Ziele und Aspekte einer Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen

			
Vorgang	ein Schüler springt	Werfen eines Würfels	Wachstum einer Getreideähre
Merkmal	Zensur für die Weite	Augenzahl	Länge
mögliche Ergebnisse	Zensuren 1 bis 6	1, 2, 3, 4, 5, 6	Längen zwischen 5 cm und 15 cm
Bedingungen	z. B. Sprungkraft, Technik, Anlaufweite, Windbedingungen	z. B. Wurftechnik, Unterlage, Würfel	z. B. Bodengüte, Erbanlagen, Wetter
mögliche Wiederholungen	Alle Schüler einer Klasse springen.	Es werden 600 Würfel untersucht.	Alle Ähren eines Feldes werden geprüft.

Mathematik 6, MV, S. 92, paetec, 2003

## Ziele einer Prozessbetrachtung

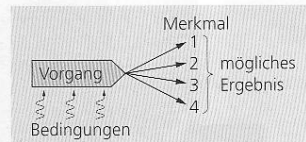
- gemeinsame Begriffe und einheitliche Betrachtungsweise zufälliger Erscheinungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, dadurch engere Verzahnung der Gebiete möglich,
  - üblich: getrennt Behandlung, verschiedene Begriffe  
WR: Zufallsversuch, zufälliges Ereignis, Zufallsgröße, ...  
Statistik: Grundgesamtheit, Merkmal, Merkmalsausprägungen
  - Vorschlag: gemeinsame Begriffe:  
zufälliger Vorgang, Merkmal, Ergebnisse
- Ergänzung der Vorstellungen zum Zufallsbegriff
  - *Zufallsbegriff in der Umgangssprache:*
    - ein sehr selten auftretendes Ereignis: „großes Glück“
    - ein unerwartetes Ereignis: „zufällig begegnet“
    - eines von gleichmöglichen Ereignissen: „Augenzahl ist zufällig“
    - was man beeinflussen kann, ist nicht zufällig: „Die Zensur war kein Zufall.“

- *Zufallsbegriff in der Wissenschaft*
  - Zufallsexperiment (beliebig oft wiederholbar)
  - zufälliges Ereignis
  - Zufallsstichprobe, zufällige Auswahl, echte Zufallszahlenfolge
  - Der Zufall verschwindet bei vollständiger Information.
  - Zufall ist das Korrelat zur Notwendigkeit.
- neuer Aspekt: Zufall als Merkmal eines Prozesses/ Vorgangs
- leichteres Erkennen zufälliger Erscheinungen im Alltag
- besseres Verständnis von Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffes
- Orientierung auf das Suchen von Zusammenhängen zwischen Bedingungen der Vorgänge und den Wahrscheinlichkeiten bzw. statistischen Kenngrößen
- Hilfe beim Finden von Baumdiagrammen

Vorgänge mit verschiedenen möglichen **Ergebnissen** heißen **zufällige Vorgänge (Vorgänge mit Zufallscharakter)**. Die tatsächlich eintretenden Ergebnisse sind immer von bestimmten Bedingungen abhängig. Das Ergebnis eines zufälligen Vorgangs kann nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden.

Zur Untersuchung zufälliger Erscheinungen beantworte folgende Fragen:

- Welcher Vorgang läuft ab?
- Welches Merkmal interessiert mich?
- Welche Ergebnisse können auftreten?
- Welche Bedingungen beeinflussen den Vorgang?



Mathematik 6, MV, S. 92, paetec, 2003

### Aspekte einer Prozessbetrachtung:

- Betrachtung eines einzelnen zeitlich ablaufenden Vorgangs in der Natur, der Gesellschaft oder dem Denken in der Vergangenheit, der Gegenwart oder der Zukunft
- Auswahl eines betrachteten Merkmals
- Bestimmen der möglichen Ergebnisse des Vorgangs bezüglich des Merkmals

- Betrachtung der Bedingungen eines einzelnen Vorgangs; Unterscheidung von allgemeine Bedingungen (Einflussfaktoren) und ihren Ausprägungen bei Ablauf des Vorgangs
- Betrachtung einer bestimmten Anzahl von Wiederholungen des Vorgangs, die nacheinander oder gleichzeitig ablaufenden können, sowie ihren Bedingungen
- Gruppierung von Vorgängen auf der Grundlage der Analyse der Bedingungen, insbesondere bei statistischen Untersuchungen
- Unterscheidung von Vorgang und Experiment:  
Die experimentelle Untersuchung eines zufälligen Vorgangs, d.h. die Planung, Durchführung und Auswertung einer bestimmten Anzahl von Wiederholungen des Vorgangs heißt **Zufallsexperiment**.

### Beispiel: Bernoulli-Experiment

Wenn bei einem zufälligen Vorgang bezüglich eines Merkmals nur das Eintreten oder das Nichteintreten eines bestimmten Ereignisses untersucht wird, so bezeichnet man diese Untersuchung als ein **Bernoulli-Experiment** oder **Bernoulli-Versuch**. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der betreffenden Ereignisse nennt man **Erfolgswahrscheinlichkeit** oder **Trefferwahrscheinlichkeit**.

Vorgang	Merkmal	Eintreten des Ereignisses	Nichteintreten des Ereignisses
Tom schießt auf eine Torwand.	Treffer	Tom trifft.	Tom trifft nicht.
Herstellen eines Gerätes.	Qualität	Das Gerät ist OK.	Das Gerät hat Fehler.
Werfen eines Würfels.	Augenzahl	Es fällt eine 6.	Es fällt keine 6.
Ablauf einer Sportstunde.	Unfall-geschehen	Es tritt mindestens ein Unfall auf.	Es tritt kein Unfall auf.

Mathematik 10, MV G, S. 166, paetec, 2002

### 7.3 Zufallsversuche; Ereignisse

In diesem Abschnitt lernen wir eine einheitliche Sprechweise kennen, mit der man Vorgänge wie die Auswahl einer Familie, das Werfen eines Würfels, das Ziehen aus einer Urne usw. beschreiben kann.

Vorgänge wie das Werfen eines Würfels, Werfen einer Münze, Drehen eines Glücksrades, Ziehen aus einer Urne usw. bezeichnet man als **Zufallsversuche**. Allgemein bezeichnet man einen Vorgang als **Zufallsversuch**, wenn mehrere **Versuchsausfälle** möglich sind, jedoch **ungewiß** ist, welcher Ausfall eintritt. Beispielsweise ist das Werfen eines Würfels ein Zufallsversuch, weil die Versuchsausfälle 1, 2, 3, 4, 5, 6 möglich sind, jedoch ungewiß ist,

Mathematik Oberstufe 3, S. 206, hpt, 1991

## 2. Anwenden der Prozessbetrachtung auf zufällige Erscheinungen im Alltag

Gib für folgende Vorgänge des Alltags mögliche Ergebnisse bezüglich eines von dir gewählten Merkmals an und erläutere Bedingungen, die auf die Ausprägung des Merkmals Einfluss haben! Plane ein Experiment zur näherungsweise Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse!

- a) Schlafen in der Nacht      b) Frühstück essen  
 c) Spaziergehen                d) Wochenendeinkauf  
 e) Zähne putzen am Abend



Mathematik 8, MV G, S. 179, paetec, 2000

Vorgang	betrachtetes Merkmal	mögliche Ergebnisse	Vorgang ist zufällig
Ziehen einer Karte aus einem Skatspiel	Farbe der Karte	<i>schwarz, rot: 17</i>	<i>ja: 17 nein: 0 k. A.: 0</i>
Fallenlassen eines Körpers auf der Erde	Bewegungsrichtung des Körpers	<i>unten; runter; senkrecht; ... : 16; unten, links, rechts: 1</i>	<i>ja: 1 nein: 15 k. A.: 1</i>
Spaziergang durch die Stadt	Treffen eines bestimmten Freundes	<i>ja oder nein: 17</i>	<i>ja: 17 nein: 0 k. A.: 0</i>
Abkühlen von Wasser unter 0°C	Aggregatzustand des Wassers	<i>fest; Eis; gefriert: 16 k. A.: 1</i>	<i>ja: 0 nein: 16 k. A.: 1</i>
Wachstum eines Menschen	Körpergröße	<i>groß, klein: 10 Intervalle: 2 unbestimmte Größe: 2 Zuwachs: 2; k. A.: 1</i>	<i>ja: 14 nein: 3 k. A.: 0</i>
Werfen eines Würfels	<i>eine Zahl; .... : 15 Richtung: 1; k. A.: 1</i>	<i>1,2,3,4,5,6: 13 eine Zahl: 2; k. A.: 2</i>	nein

### 3. Arten zufälliger Vorgänge und Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffes

#### 1. Vorgänge in der Natur oder der Gesellschaft

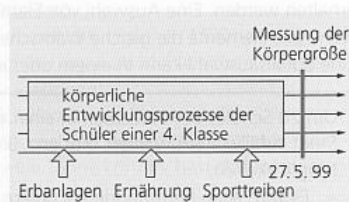
- Ergebnisse: reale Objekte, Zustände
- Bedingungen: Zustände der Natur, der Gesellschaft
- Die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse wird durch das Denken des Subjektes, das den Vorgang untersucht, nicht beeinflusst, d.h. sie existiert unabhängig („objektiv“) vom erkennenden Subjekt, das sie nur möglichst genau bestimmen kann.

#### 2. Denkprozesse

- Ergebnisse: Gedanken, Hypothesen
- Bedingungen: Kenntnisse des Subjektes, Verlaufseigenschaften des Denkens
- Die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse hängt vom Subjekt ab, das die Gedanken äußert („subjektive“ Wahrscheinlichkeit). Sie ändert sich mit Änderung der Kenntnisse des Subjektes

### 4. Zufällige Vorgänge und statistische Untersuchungen

In der Statistik werden die Ergebnisse der zufälligen Vorgänge als **Ausprägungen des Merkmals** oder als **Daten** bezeichnet. Die Gesamtheit aller Objekte, die bei einer statistischen Untersuchung betrachtet werden sollen, heißt **Grundgesamtheit**. Die Objekte heißen Elemente der Grundgesamtheit.



Die zufälligen Vorgänge laufen meist zeitlich parallel ab. Das Erfassen der Daten erfolgt hingegen zu einem bestimmten Zeitpunkt während des Verlaufs der zufälligen Vorgänge.

Zur Auswertung von Daten stelle dir folgende Fragen:

- Gibt es Übereinstimmung mit meinen bisherigen Vorstellungen?
- Welche Ursachen könnte es für die Art der Verteilung der Daten geben?
- Welche Zusammenhänge mit anderen Datensätzen gibt es?
- Welche Vergleiche zur Veranschaulichung der Daten sind möglich?

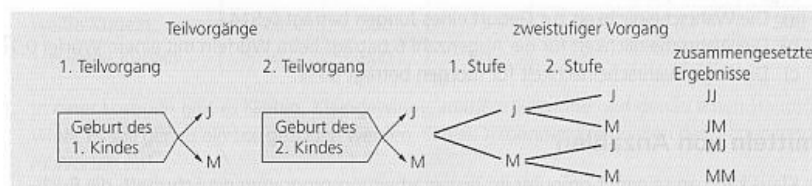
Mathematik 7, ST S, S. 107, paetec, 1999

zufälliger Vorgang	Anzahl der Wiederholungen; Gesamtheit der Untersuchungsobjekte	betrachtetes Merkmal bei jedem Vorgang bzw. bei jedem Objekt	mögliche Ausprägungen des Merkmals
Entwicklung der Größe einer Familie	Familien aller Schülerinnen und Schüler der Klasse	Zahl der Geschwister	<i>Zahlen: 12;</i> <i>verbal: 2;</i> <i>k. A.: 3</i>
Entwicklung des mathematischen Wissens und Könnens eines Schülers	alle Schülerinnen und Schüler unserer Klasse	Leistung im Kopfrechnen	<i>sehr gut,... : 11</i> <i>Noten von 1-6: 1</i> <i>schnell, ... : 1</i> <i>besser,... : 1;</i> <i>k. A.: 3</i>
Herausbildung von Lebenszielen	alle Schülerinnen und Schüler unserer Klasse	<i>Berufsziel; Berufswunsch; ... : 9;</i> <i>Leistung; ... 5</i> <i>k. A.: 3</i>	alle Berufe
<i>Zählen der Streichhölzer: 5;</i> <i>Anzahl der Streichhölzer: 2;</i> <i>Sonstiges: 3;</i> <i>k. A.: 7</i>	100 Streichholzschachteln	Anzahl der Streichhölzer	<i>x; 38 ± x: 0 -...: 4;</i> <i>gleiche, nicht gleiche Anzahl: 2,</i> <i>Sonstiges: 3</i> <i>k. A.: 8</i>

## 5. Analyse mehrstufiger Vorgänge zur Anwendung der Pfadregeln



Die Geburt zweier Kinder kannst du als Zusammensetzung zweier Teilvorgänge ansehen, die nacheinander ablaufen. Jedes Ergebnis des ersten Teilvorganges kann mit jedem Ergebnis des zweiten Teilvorganges kombiniert werden.



Mathematik 8, MV G, S. 182 f., paetec, 2000



- Auffassen der Ergebnisse mehrstufiger Vorgänge als zusammengesetzte Ergebnisse mehrerer gleichzeitig oder nacheinander ablaufender Teilvorgänge
- Schritte:
  1. Bestimme die Teilvorgänge, die nacheinander oder gleichzeitig ablaufen sowie alle interessierenden Ergebnisse der Teilvorgänge!
  2. Ordne die Teilvorgänge möglichst entsprechend dem zeitlichen Ablauf nacheinander an!
  3. Zeichne ein Baumdiagramm, in dem jedes Ergebnis des 1. Teilvorgangs Ausgangspunkt für alle Ergebnisse des 2. Teilvorgangs ist. Verfahre ebenso mit den weiterhin vorhandenen Teilvorgängen.
  4. Jeder Pfad entspricht einem zusammengesetzten Ergebnis.