

Prof. Dr. Hans-Dieter Sill

Ausgewählte Ergebnisse der Vergleichsarbeiten in Klasse 9 und Konsequenzen für den Unterricht

1. Konzept, Ergebnisse und Weiterführung der Vergleichsarbeiten in MV

a) Konzept

- Beschränkung auf **sicheres** Wissen und Können
- „sichere“ Beherrschung einer Anforderung heißt: Lösungswahrscheinlichkeit eines Schülers bei einmaliger Bewältigung der Anforderung ohne Vorbereitung: **mindestens 66 %**
- Bedeutung für weitere Bildungswege und weiteres Leben
- Konsequenzen für Testverfahren

b) bisherige Arbeiten und Ergebnisse

- Kl. 5, 1998, 1500 Schüler, 35 Schulen, 58 %
- Kl. 7, 1999, 1295 Schüler, 34 Schulen, R: 51 %; H: 34 %
- Kl. 7, 2000, 1330 Schüler, 33 Schulen, R: 60 %; H: 38 %
- Kl. 9, 2001, 2103 Schüler, 38 Schulen, G: 76 %; R: 54 %; H: 38 %
- Kl. 9, 2002, 2498 Schüler, 37 Schulen, G: 74 %; R: 55 %; H: 40 %

c) Weiterführungen

Untersuchungen an Stichprobenschulen, Bildungsstandards, Zeitschrift

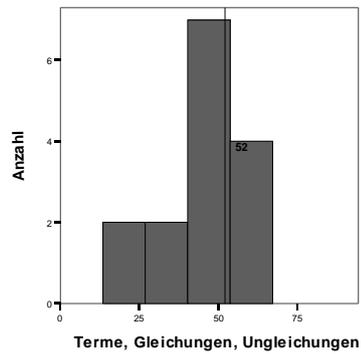
Mindeststundenzahl für die Themen der Klassen 7 und 8 Vergleich mit dem DDR-Plan, dem Plan 1991 und den Mittelwerten der Klassenbuchanalysen des Realschulbildungsganges

Thema	Mindest- stunden	DDR- Plan	Rahmen- plan 1991	Mittelwerte der Analysen (RS)
Rationale Zahlen, ETR	28	55	20	31
Prozent- und Zinsrechnung	20	23	15	32
Zuordnungen	20	22	20	18
Lineare Funktionen	20	27	25	22
Terme, Termumformungen, Gleichungen, Ungleichungen	52	60	45	56
Planimetrie	40	57	45	44
Körperdarstellung- und Körperberechnung	22	42	15	21
Stochastik	22	0	25	9
Summe:	224	286	210	233

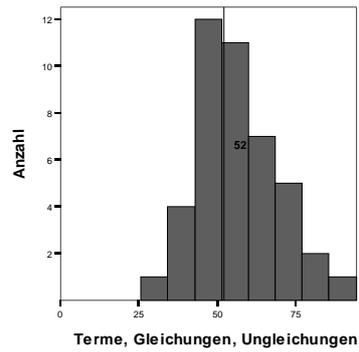
Stunden für Terme, Termumformungen, Gleichungen, Ungleichungen

Bildungsgang	Minimum	Mittelwert	Maximum
Hauptschulbildungsgang	21	45	67
Realschulbildungsgang	27	56	94

Hauptschulbildungsgang



Realschulbildungsgang



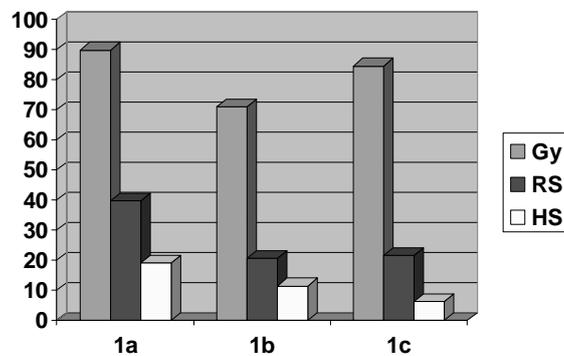
2. Leistungen im Arbeiten mit Variablen und Termen

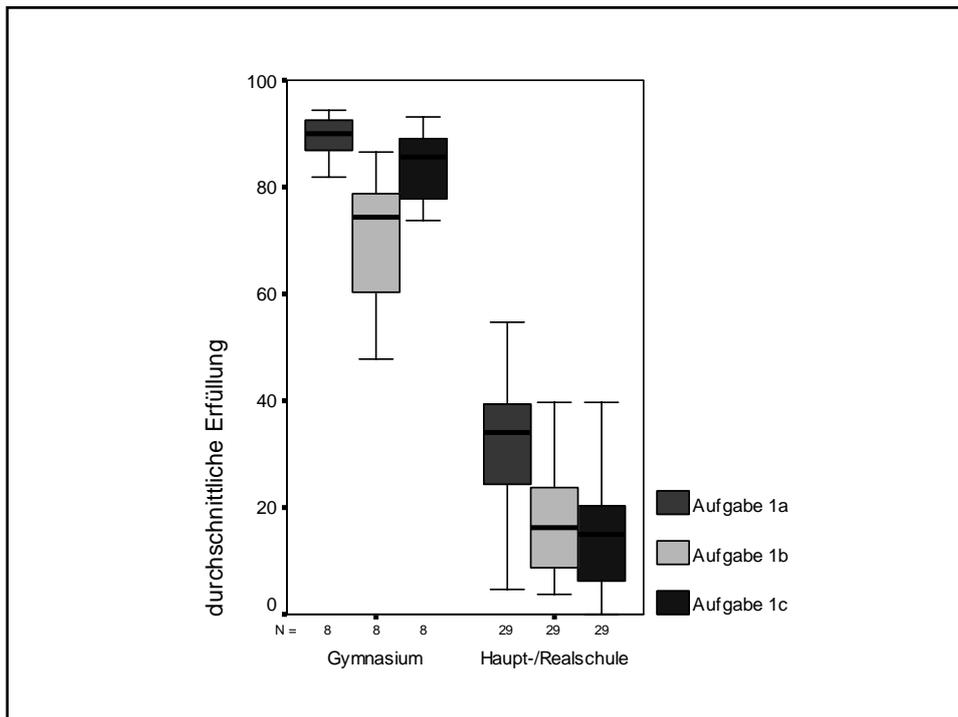
a) Vergleichsarbeit Klasse 9/2001

1. Aufgabe

Schreiben Sie als Term.

Text	Term
a) Die Summe aus a und der Hälfte von b	
b) Der Quotient aus a und dem Doppelten von b	
c) Das Quadrat der Differenz von a und b	





b) Vergleichsarbeit Klasse 9/2002

3. Aufgabe

Schreiben Sie als Term.

Termbeschreibung	Term
a) Das Doppelte einer Zahl a vermindert um die Zahl b.	
b) Der dritte Teil einer Zahl a vermehrt um das Quadrat dieser Zahl.	
c) Die Quadratwurzel einer Zahl a vermindert um die Zahl b.	

Durchschnittlicher prozentualer Anteil der erreichten Punkte in den Bildungsgängen und Verteilung der durchschnittlichen Punktzahl in allen Schulen

	Bildungsgang			alle	Schulen				
	G	R	H		Min.	25. Per.	Median	75. Per.	Max.
Aufgabe 3	70,9	45,3	23,2	50,4	23,8	33,3	46,3	65,3	78,3

Verteilung des prozentuales Anteils der erreichten Punkte in Gymnasien

	Minimum	25. Perzentil	Median	75. Perzentil	Maximum
Aufgabe 3	64,0	66,9	71,4	75,5	78,3

Verteilung des prozentualen Anteils der erreichten Punkte in Schulen mit Haupt- und Realschülern

	Minimum	25. Perzentil	Median	75. Perzentil	Maximum
Aufgabe 3	23,8	31,9	39,1	51,0	66,7

Verteilung des prozentualen Anteils der erreichten Punkte in Gesamtschulen

	Minimum	25. Perzentil	Median	75. Perzentil	Maximum
Aufgabe 3	39,8	42,6	52,4	57,4	62,2

3. Fehler der Schüler und mögliche Ursachen

Anzahl unterschiedlicher Eintragungen Aufgabe 1/2001

	alle	Gymnasium	Haupt-/Realschulen
1a	276	47	253
1b	304	72	262
1c	194	41	174

Fehler bei Aufgabe 1a

Häufige Fehler:

$a + b$ (1,8 %) ab ; $ab/2$ (1,6 %) a/b (1,8 %)

Spezielle Teilterme: $2/b$; $a + a$

Struktur des Ausdrucks

Unsinnige Ausdrücke	Produkte/Quotienten	Gleichungen
$+a : 2b$	$a \cdot b / 2$	$a = b / 2$
$a + : 2b$	$a : b$	$a + a = b : 2$

	gymnasialer Bildungsgang	Realschulbildungsgang	Hauptschulbildungsgang	alle
Summe	94,1	50,4	32,2	62,5
kein Eintrag	1,4	21,3	40,4	17,5
Produkt, Quotient oder Potenz	2,2	14,5	12,6	9,9
Gleichung	1,1	7,9	8,2	5,6
nicht sinnvoll	0,6	3,1	4,1	2,4
Differenz	0,7	2,1	0,6	1,4
eine Variable oder eine Zahl	0	0,7	2,0	0,7

Verwendung von Variablen

keine Variablen	nur a	weitere Variable
$2 + 1$	$a : 2$	$a + x + b : 2$
$1/2$	$a + a = 6$	$s = a + xb$

	gymnasialer Bildungsgang	Realschulbildungsgang	Hauptschulbildungsgang	alle
nur a und b	97,8	73,2	50,6	78,0
kein Eintrag	1,4	21,3	40,4	17,5
keine Variable	0	1,4	3,8	1,3
x tritt auf	0,3	1,4	1,8	1,1
nur b	0,1	1,3	1,2	0,9
nur a	0,3	0,7	1,2	0,6
eine weitere Variable	0,1	0,8	1,2	0,6

mögliche Ursachen:

- Kenntnis von Begriffen aus der Arithmetik (Summe, Hälfte, Quotient, Quadrat, Differenz)
- Probleme im Verständnis der algebraischen Begriffe Variable und Term
- mangelnde Vertrautheit mit Aufgabentyp
- mangelnde Verfahrenkenntnisse

5. Probleme des Variablenbegriffs

Kenntnisse von Erwachsenen

(aus G. Malle: Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Vieweg, 1993)

Christa (36, Akademikerin):

Interviewer (legt folgende Aufgabe vor):

An einer Universität sind P Professoren und S Studenten. Auf einen Professor kommen 6 Studenten. Drücken Sie die Beziehung zwischen S und P durch eine Gleichung aus!

Ch: (schreibt) $6S = P$

I: Nehmen wir einmal an, es sind 10 Professoren. Wie viele Studenten sind es dann?

Ch: 60.

I: Setzen Sie das in die Gleichung ein!

Ch: $6 \cdot 60 = 10$. Aha, das kann nicht stimmen. (Nach einer Pause schreibt sie) $P + 6S = P + S$.

I: Was bedeutet das?

Ch: Die Professoren und die auf jeden Professor fallenden 6 Studenten ergeben zusammen alle Professoren und Studenten.

- I: Hmm ... Bei dieser Gleichung könnte man auf beiden Seiten P subtrahieren. Was ergibt sich dann?
- Ch: (streicht P auf beiden Seiten durch) $6S = S$.
- I: Kann das stimmen?
- Ch: Ja natürlich ... die Gruppen zu 6 Studenten ergeben zusammen alle Studenten.
- I: Setzen Sie wieder die Zahlen ein!
- Ch: 10 Professoren und 60 Studenten. Dann ist das $6 \cdot 60 = 10$. Das kann nicht stimmen. (Nach einer Pause schreibt sie) $P + S = 7$.
- I: (räuspert sich)
- Ch: (bessert aus zu) $P + 6S = 7$
- I: Was bedeutet das?
- Ch: Ein Professor und seine 6 Studenten sind zusammen 7 Personen.

Walter (23, Akademiker)

- I: Können Sie die Gleichung $\frac{x}{8} = 9$ lösen?
- W: (schweigt minutenlang) Ich weiß nicht mehr, wie das geht. Da gibt es eine Regel, aber die habe ich leider vergessen.

6. Aspekte der Begriffe Variable und Term:

formale Betrachtung eines Variablen:

Eine Variable ist ein Buchstabe.

inhaltliche Aspekte des Variablenbegriffs:

1. **Verwendungsaspekt:**
Variable werden verwendet für
 - bekannte Zahlen oder Größen, z. B. $n = 1$; $a = 3 \text{ cm}$
 - unbekannte aber feste Zahlen, z. B. x ist die Unbekannte in $3x = 12$.
 - beliebige Zahlen oder Größen, z. B. $V = abc$.
2. **Bezeichnungsaspekt:**
Variable dienen zur Bezeichnung von Zahlen und Größen. a, n, m, p, V, x
3. **Einsetzungsaspekt:**
Für Variable können beliebige Zahlen oder Größen eines Grundbereiches eingesetzt werden. Variable können durch anderer Variable oder Terme ersetzt werden.
Variable sind Platzhalter oder Namen leerer Fächer.
4. **Kalkülaspekt:**
Mit Variablen kann man nach bestimmten Regeln rechnen.
5. **funktionaler oder dynamischer Aspekt:**
Eine Variable kann sich ändern. Sie kann zunehmen (wachsen) oder abnehmen (fallen).

formale Aspekte des Termbegriffes:

- Ein Term ist ein mathematischer Ausdruck, der als Seite einer Gleichung vorkommen kann.

inhaltliche Aspekte des Termbegriffes:

1. Verwendungsaspekt

Terme werden verwendet

- für verschiedene Rechenausdrücke mit gleicher Struktur
- für verschiedene Sachverhalte mit gleicher Struktur
- zur Beschreibung von Eigenschaften von Zahlen

2. Interpretationsaspekt

Terme können verschieden interpretiert werden.

3. Strukturaspekt

Terme haben eine bestimmte Struktur (Aufbau).

4. Prozessaspekt

Terme sind eine Rechenvorschrift (ein Befehl).

5. Ergebnisaspekt

Terme sind ein Ergebnis einer Rechnung.

6. Kalkülaspekt

Terme können umgeformt werden. (Umformulieren von Befehlen)

Belegen von Variablen

Sowohl das Einsetzen von Zahlen oder Größen für Variable als auch das Ersetzen von Variablen durch andere Variable oder Terme wird als **Belegen von Variablen** bezeichnet.

Werden für *alle* Variablen *Zahlen oder Größen* eingesetzt, so lässt sich der Wert des Terms berechnen.

Term	Belegen der Variablen		Wert des Terms
	a	b	
$2a + b$	-1	7	$2 \cdot (-1) + 7 = 5$
$2a + b$	6 mm	8 mm	$2 \cdot 6 \text{ mm} + 8 \text{ mm} = 20 \text{ mm}$

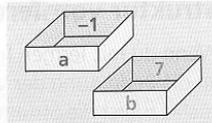
Variablen können auch durch andere *Variable oder durch Terme* ersetzt werden. Du erhältst dann einen neuen Term mit der gleichen Grundstruktur wie der Ausgangsterm.

Term	Belegen der Variablen		neuer Term
	a	b	
$2a + b$	x	y	$2x + y$
$2a + b$	x + 1	x	$2(x + 1) + x$





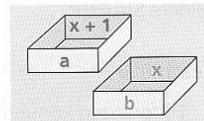
Du kannst dir eine Variable als ein leeres Fach vorstellen, in das Zahlen oder Größen hineingelegt werden können. Einen Term kannst du nun als einen Befehl auffassen, der angibt, was mit möglichen Inhalten der Fächer zu tun ist.



Term	Term als Befehl
$2a + b$	Verdoppele den Inhalt des Faches a und addiere das Ergebnis zum Inhalt des Faches b.
$\frac{a}{2} - b$	Bilde vom Inhalt des Faches a die Hälfte und subtrahiere davon den Inhalt des Faches b.



Du kannst dir auch das Ersetzen von Variablen als ein Belegen von Fächern vorstellen. Durch das Ersetzen der Variablen entsteht ein neuer Befehl, der sich auf andere Variable, d. h. auf andere Fächer bezieht.



	Term	Term als Befehl
alt:	$2a + b$	Verdoppele den Inhalt von a und addiere den Inhalt von b!
neu:	$2(x + 1) + x$	Addiere 1 zum Inhalt von x, verdopple das Ergebnis und addiere den Inhalt von x!



Rechenausdrücke	allgemeine Beschreibung
$3 \cdot 4 - 3 \cdot 9$ $5,2 \cdot 4,3 - 5,2 \cdot 9,5$	$a \cdot b - a \cdot c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$
Heftklammern werden in verschiedenen Größen hergestellt.	
Form:	allgemein:

Terme können **Eigenschaften oder Beziehungen von Zahlen** beschreiben.

Eigenschaft	Beispiele	Beschreibung durch einen Term
Zahl ist gerade	$4 = 2 \cdot 2$ $6 = 2 \cdot 3$	$2n$; $n \in \mathbb{N}$
Zahl ist ungerade	$3 = 2 \cdot 1 + 1$ $5 = 2 \cdot 2 + 1$	$2n + 1$; $n \in \mathbb{N}$
Zahl ist durch 3 teilbar	$6 = 3 \cdot 2$ $9 = 3 \cdot 3$	$3n$; $n \in \mathbb{N}$



Deuten von Termen

Einen Term kannst du auf unterschiedliche Weise deuten (interpretieren).

Mögliche Interpretationen für den Term $a \cdot b$:

- Flächeninhalt eines Rechtecks
- a -faches der Zahl b
- Anzahl der möglichen Tanzpaare bei a Jungen und b Mädchen



Struktur von Termen

Wenn du mit Termen formal arbeiten willst, ohne an die Bedeutung der Variablen zu denken, untersuche zuerst die Struktur (den Aufbau) des Terms.

Bestimme dazu die Art und die Reihenfolge der Rechenoperationen, die bei einer Belegung aller Variablen mit Zahlen auszuführen wären.



Gehe dabei von „außen“ nach „innen“ vor. Bestimme zuerst die Rechenoperation, die zuletzt auszuführen ist. Untersuche dann die Struktur der Teilterme schrittweise weiter. Zu Anfang und bei komplizierten Termen ist es nützlich, Teilterme einzurahmen oder extra zu bezeichnen. Das kannst du schriftlich oder auch nur in Gedanken tun.

Term	$2x(4x + 3y)$	$3a + 2b(4a + 5)$
Einrahmen von Teiltermen	$2x \cdot ((4x) + (3y))$	$3a + (2b \cdot (4a + 5))$
Grundstruktur	$T_1 \cdot T_2$ (Produkt)	$T_1 + T_2$ (Summe)
feinere Struktur	$T_1 \cdot (T_3 + T_4)$	$T_1 + T_3 \cdot (T_4 + T_5)$



15. Untersuche, ob der Term die Grundstruktur $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$, $A : B$ oder A^B hat!
 Rahme die Teilterme A und B mit verschiedenen Farben ein!

a)	Term	Grundstruktur	b)	Term	Grundstruktur	c)	Term	Grundstruktur
	$(2x) + (5x)$	$A + B$		$2x - 5x$			$(x + 5)^2$	
	$2(x + 5)$			$2(x - 5x)$			$-5 + \frac{x}{2}$	
	$(x + 5) : 2$			$\frac{5}{x + 1}$			$\frac{1}{2}x^2$	
	$(x + 2) - (x + 3)$			$3x + 7x$			$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x$	

16. Beschreibe die Struktur des Terms mit den drei Teiltermen T_1 , T_2 und T_3 !
 Rahme die Teilterme mit verschiedenen Farben ein!

a)	Term	Grundstruktur	b)	Term	Grundstruktur
	$(2x)(7y - 2)$	$T_1(T_2 - T_3)$		$2x - 3y(z + 1)$.
	$\frac{4x - y}{2x - z} (x + 5) : 2$			$a^2 \cdot b + \frac{2a}{a - b}$	
	$\frac{5x^2}{2} - z^2 \cdot 7z$			$(x^3 + 2x^2) \cdot \frac{a}{2b}$	



9. Vervollständige folgende Tabelle!

	Anweisung	Zahl	Variable	Term mit Zahl	Termwert	Term mit Variable
a)	Verdopple!	12	a	$2 \cdot 12$	24	2a
b)	Halbiere!	-8	b			
c)	Quadriere!	4	c			
d)	Ermittle das Fünffache!	$0, \bar{1}$	d			
e)	Ermittle den dritten Teil!	0,9	e			
f)	Vermehre um 2!	-1,3	f			
g)	Ermittle das Dreifache!	2,4	g			
h)	Vermindere um 3!	2,4	h			
i)	Ermittle den Nachfolger!	3	$i, i \in \mathbb{N}$			



1. Ordne den Rechenzeichen die entsprechenden Begriffe zu! Finde selbst weitere geeignete Formulierungen!
 Verdoppeln, vermindern, halbieren, vermehren um, den Quotienten bilden, abziehen, verdreifachen, das 6fache, erhöhen um, subtrahieren, ergeben, minus, der dritte Teil, hinzufügen, dasselbe wie, das Produkt bilden, ...

$+$	$-$	\cdot	$:$	$=$



10. Übersetze in mathematische Zeichen!

Text	Term	Text	Term
Vermehre die Zahl 11 um 9.		Vermindere die Zahl x um 13.	
Die Summe von 45 und 56.		Die Hälfte einer Zahl a.	
Der sechste Teil von 36.		Die Differenz aus der Zahl x und 3.	
Das Produkt aus 9 und 12.		Der Quotient aus einer Zahl und 16.	
Von 45 ziehe 27 ab.		Der Quotient aus 16 und einer Zahl.	

