

Ein neuer Zugang zu Grundbegriffen im Stochastikunterricht

Prof. Dr. Hans-Dieter Sill

Vortrag an der Universität Koblenz-Landau

am 25.10.2012



Gliederung

1. Probleme und Ausgangsthesen
2. Vorschläge zur Verwendung des Begriffs „Zufallsexperiment“
3. Modell zur Prozessbetrachtung von Erscheinungen mit Zufallscharakter
4. Beispiele zur Prozessbetrachtung im Stochastikunterricht

Literatur:

Sill, Hans-Dieter: Zur Modellierung zufälliger Erscheinungen. – In: Stochastik in der Schule 30(2010)3, S. 2-13

Probleme und Ausgangsthesen

- Um Stochastik zu verstehen, braucht man ein Konzept zur Analyse und Beschreibung von Phänomenen mit Zufallscharakter.
- Die vielfältigen Bedeutungen des Zufallsbegriffs behindern das Denken. Es gibt z. B. folgende Bedeutungen des Zufallsbegriffs im Alltag:
 - Zufall als Eigenschaft eines eingetretenen Ereignisses
„Das Würfeln einer 6 ist zufällig.“
 - Was man beeinflussen kann, ist nicht zufällig.
„Die Zensur in der Arbeit war kein Zufall.“
 - Etwas Unerwartetes ist zufällig.
„Ich bin ihm zufällig begegnet.“
- Die übliche Stochastikausbildung trägt nicht ausreichend zum Abbau der Behinderungen bei. Bsp.: [Ergebnisse einer Studentenforschung](#)

Probleme und Ausgangsthesen

- Die ersten Begriffsbildungen, Betrachtungsweisen und dominierenden Beispiele im Stochastikunterricht vermitteln ein eingeschränktes und unklares Bild von Stochastik.
Ergebnisse einer Analyse von [18 Schullehrbüchern](#) für die Sekundarstufe II:
 - In allen Schullehrbüchern werden die Wörter „Zufallsexperiment“ bzw. „Zufallsversuch“ verwendet und in dreien sogar als Definitionen bezeichnet.
 - Als erste Beispiele für Zufallsexperimente werden in allen Büchern vorrangig die Zufallsgeräte Würfel und Münze und in den meisten auch die Urne, das Ziehen von Karten und das Glücksrad angegeben.
 - In 13 Büchern gibt daneben auch einige andere Beispiele für Zufallsexperimente wie Befragungen, Messungen physikalischer Größen sowie Untersuchungen zur Lebensdauer und Qualität von Produkten.
 - In 4 Schulbüchern werden Vergleiche mit Experimenten im naturwissenschaftlichen Sinne angestellt.
- Die Begriffsbildungen und Betrachtungen sind aus [mehreren Gründen](#) ungünstig.



- Ein Konzept zur Beschreibung von Zufallserscheinungen ist kein Bestandteil der mathematischen Theorien.
Der Begriff „Zufallsexperiment“ ist nicht mit mathematischen Begriffen definierbar.
- In Fachbüchern zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Auffassungen zur Beschreibung des Theorie-Praxis-Verhältnisses.
Ergebnisse einer Analyse von [28 Fachbüchern zur Wahrscheinlichkeitstheorie](#):
 - Der Begriff „Zufallsexperiment“ bzw. analoge Begriffsbildungen werden in 7 Lehrbüchern nicht verwendet (*kursiv*).
 - In 16 Büchern findet man die Bezeichnungen "Zufallsexperiment" oder "Zufallsversuch", in 5 nur andere Bezeichnungen. In 4 Büchern wird die Formulierung "Vorgang mit zufälligem Ergebnis" und in 2 "zufälliger Vorgang" verwendet.
 - In mehreren Büchern wird das Problem der Modellierung realer zufälliger Erscheinungen im Zusammenhang mit dem Begriff "Zufallsexperiment" [diskutiert](#).



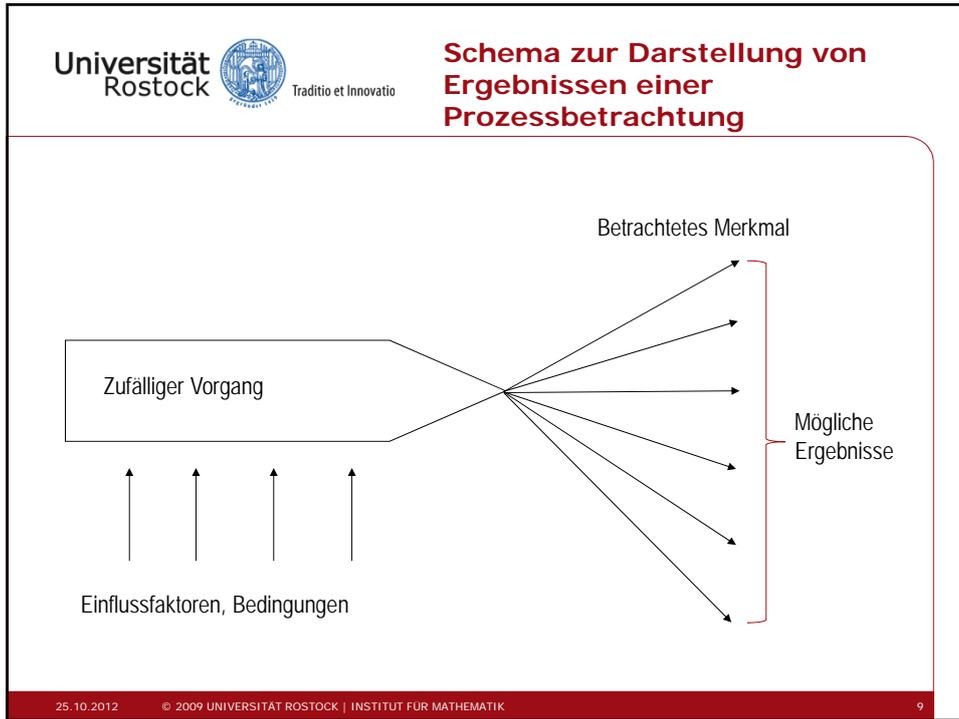
- Es sollte eine klare begrifflichen Trennung von Modell- und Realebene erfolgen.
- Die Begriffe "Zufallsversuch" bzw. synonym "Zufallsexperiment" sollten nur auf der Modellebene verwendet werden.
- Als weiterer Begriff auf der Modellebene sollte der Begriff „Zufallsgerät“ bzw. synonym "Zufallsgenerator" für mathematische Objekte bzw. Anordnungen von Objekten definiert werden.
- Ein Zufallsversuch ist durch die Angabe des Zufallsgerätes, durch eine Ergebnismenge sowie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert.
Bsp.:
 - Würfeln
Zufallsgerät: Würfel (im mathematischen Sinne), bei dem jeder der sechs Seiten genau einer der Zahlen 1 bis 6 zugeordnet ist
Ergebnismenge: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Wahrscheinlichkeitsverteilung: $P(k) = \frac{1}{6} \quad k \in E$

Vorschläge zu den Begriffen „Zufallsexperiment“ bzw. „Zufallsversuch“

- Münzwurf
Zufallsgerät: Zylinder mit Grundkreisradius r und Höhe h , wobei $h \ll r$, Der Grundfläche ist der Buchstabe W und der Deckfläche der Buchstabe Z zugeordnet.
Ergebnismenge: $E = \{W, Z\}$
Wahrscheinlichkeitsverteilung: $P(W) = P(Z) = 0,5$
- Der epistemologische Status dieser „Zufallsversuche“ entspricht dem der mathematischen Körperbegriffe, die Abstraktionen der Form realer Objekte sind.
- Vorteile der neuen Begriffsbildungen:
 - keine Betrachtungen zur beliebigen Wiederholbarkeit erforderlich
 - klare Trennung zwischen dem realen Vorgang und dem mathematischen Modell
 - klare Abgrenzung zum Begriff "Versuch" im naturwissenschaftlichen Sinne
 - Bezeichnung von Würfeln als "Laplace-Würfel" nicht notwendig
 - Aufgaben zu Zufallsgeräten keine "Würfelbuden-Mathematik" mehr

Modell zur Prozessbetrachtung von Erscheinungen mit Zufallscharakter

- Es wird ein einzelner zeitlich ablaufenden Vorgang in der Natur, der Gesellschaft oder dem Denken in der Vergangenheit, der Gegenwart oder der Zukunft betrachtet und ein Merkmal ausgewählt.
- Es werden die Bedingungen untersucht, die den Vorgang bezüglich des Merkmals beeinflussen.
- Bezeichnung: "zufälliger Vorgang" oder "Vorgang mit Zufallscharakter" oder "Vorgang mit zufälligem Ergebnis"
- Ich stelle mir nacheinander folgende Fragen:
 1. Welcher Vorgang läuft ab? (Was passiert?)
 2. Welches Merkmal interessiert mich?
 3. Welche Ergebnisse können eintreten?
 4. Welche Bedingungen beeinflussen die Ausprägung des Merkmals?
- Beispiele: Natur Denken



Modell zur Prozessbetrachtung von Erscheinungen mit Zufallscharakter

- Neue Betrachtungsweise:
"zufällig" nicht als Eigenschaft eines Ergebnisses, sondern als Eigenschaft eines Vorgangs bezüglich eines Merkmals, Beispiele:
 - Das Werfen eines Würfels ist ein zufälliger Vorgang bezüglich der Augenzahl.
 - Das Schreiben einer Mathearbeit durch einen Schüler ist bezüglich der erreichten Note ein zufälliger Vorgang.
- Die Beeinflussbarkeit oder der Grad der Erwartung sind nicht wesentlich.
- Die Wiederholbarkeit unter gleichen Bedingungen ist a priori nicht in der Betrachtungsweise enthalten, sondern ein gesondertes Problem:
 - Die Bedingungen sind in der Regeln bei Wiederholung des Vorgangs unterschiedlich.
 - Es ist jeweils zu entscheiden, welche Vorgängen zu einer Grundgesamtheit zusammengefasst werden können:
Bsp.: alle Schülern einer Klasse/Schule/Land schreiben eine Mathe-Arbeit

Anwendung der Prozessbetrachtung auf statistische Untersuchungen

- Bei statistischen Untersuchungen müssen zwei zufällige Vorgänge unterschieden werden:
 1. der Prozess der Entstehung der jeweiligen Ausprägung des Merkmals
 2. der Prozess der Messung der betreffenden Ausprägung (Datenerhebung)
- Beispiel: Untersuchung zu Rauchgewohnheiten von Schülern:
 1. **Prozess der Entstehung des Merkmals:** Entwicklung der Rauchgewohnheiten eines Schülers
Merkmal: Anzahl der in der letzten Woche pro Tag gerauchten Zigaretten;
mögliche Ergebnisse: 0; 1 – 2; 3 – 4; 5 – 6 ; mehr als 6
Einflussfaktoren: Alter des Schülers; Rolle der Eltern; Rolle der Freunde; finanzielle Möglichkeiten; Vorbilder in TV-Sendungen, Literatur, Filmen; Einfluss der Zigarettenwerbung

Anwendung der Prozessbetrachtung auf statistische Untersuchungen

2. *Prozess der Messung der Ausprägung:* Befragung eines Schülers, der pro Tag 1 - 2 Zigaretten raucht

Merkmal: vom Schüler angegebene Anzahl

mögliche Ergebnisse: 0; 1 - 2; 3 - 4

Einflussfaktoren: Ehrlichkeit des Schülers; Fähigkeit zur Selbsteinschätzung; Güte des Fragebogens

- Der Vorgang der Datenerhebung ist nicht ursächlich für die Ausprägung des Merkmals, sondern sorgt nur für ein „Rauschen um das Signal“
- Interessant ist das „Muster“, das Ergebnis des Vorgang der Entstehung der Daten ist und insbesondere die Rolle der Einflussfaktoren. (Daten = Muster + Variabilität)
- Daten sind nicht viel wert, wenn man nicht weiß, wie sie entstanden sind.
- Auswertung der Daten heißt Herstellen von Zusammenhängen zu den Bedingungen.

Anwenden der Prozess- betrachtung auf zufällige Erscheinungen im Alltag

Gib für folgende Vorgänge des Alltags mögliche Ergebnisse bezüglich eines von dir gewählten Merkmals an und erläutere Bedingungen, die auf die Ausprägung des Merkmals Einfluss haben! Plane ein Experiment zur näherungsweise Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse!

- | | |
|--------------------------|---------------------|
| a) Schlafen in der Nacht | b) Frühstück essen |
| c) Spaziergehen | d) Wochenendeinkauf |
| e) Zähne putzen am Abend | |

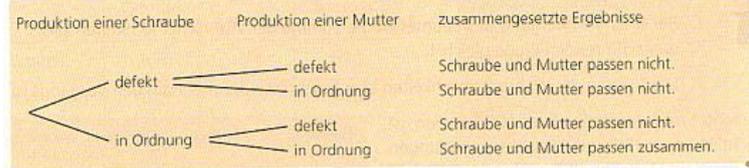
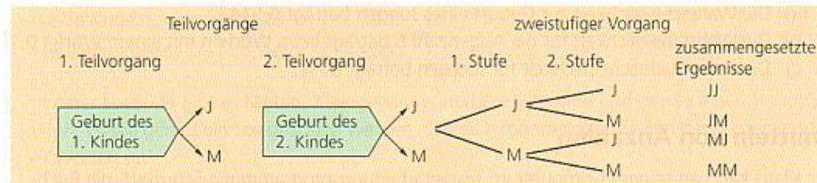


Mathematik 8, MV G, S. 179, paetec, 2000

Ergebnisse einer Schülerbefragung nach Einführung
der Prozessbetrachtung in einer Kl. 9, Gy

Anwenden der Prozessbetrachtung auf zusammengesetzte Vorgänge

Die Geburt zweier Kinder kannst du als Zusammensetzung zweier Teilvorgänge ansehen, die nacheinander ablaufen. Jedes Ergebnis des ersten Teilvorganges kann mit jedem Ergebnis des zweiten Teilvorganges kombiniert werden.



Anwenden der Prozessbetrachtung auf zusammengesetzte Vorgänge

- Schritte zum Aufstellen eines Baumdiagramms:
 1. Bestimme die Teilvorgänge, die nacheinander oder gleichzeitig ablaufen sowie alle interessierenden Ergebnisse der Teilvorgänge.
 2. Ordne die Teilvorgänge möglichst entsprechend dem zeitlichen Ablauf nacheinander an.
 3. Zeichne ein Baumdiagramm, in dem jedes Ergebnis des 1. Teilvorgangs Ausgangspunkt für alle Ergebnisse des 2. Teilvorgangs ist. Verfahre ebenso mit den weiterhin vorhandenen Teilvorgängen.
 4. Jeder Pfad entspricht einem zusammengesetzten Ergebnis.

Anwenden der Prozess- betrachtung bei der Binomialverteilung

Wenn bei einem zufälligen Vorgang bezüglich eines Merkmals nur das Eintreten oder das Nichteintreten eines bestimmten Ereignisses untersucht wird, so bezeichnet man diese Untersuchung als ein **Bernoulli-Experiment** oder **Bernoulli-Versuch**. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der betreffenden Ereignisse nennt man **Erfolgswahrscheinlichkeit** oder **Trefferwahrscheinlichkeit**.

Vorgang	Merkmal	Eintreten des Ereignisses	Nichteintreten des Ereignisses
Tom schießt auf eine Torwand.	Treffer	Tom trifft.	Tom trifft nicht.
Herstellen eines Gerätes.	Qualität	Das Gerät ist OK.	Das Gerät hat Fehler.
Werfen eines Würfels.	Augenzahl	Es fällt eine 6.	Es fällt keine 6.
Ablauf einer Sportstunde.	Unfallgeschehen	Es tritt mindestens ein Unfall auf.	Es tritt kein Unfall auf.

Mathematik 10, MV G, S. 166, paetec, 2002

25.10.2012

© 2009 UNIVERSITÄT ROSTOCK | INSTITUT FÜR MATHEMATIK

			
Vorgang	ein Schüler springt	Werfen eines Würfels	Wachstum einer Getreideähre
Merkmal	Zensur für die Weite	Augenzahl	Länge
mögliche Ergebnisse	Zensuren 1 bis 6	1, 2, 3, 4, 5, 6	Längen zwischen 5 cm und 15 cm
Bedingungen	z. B. Sprungkraft, Technik, Anlaufweite, Windbedingungen	z. B. Wurftechnik, Unterlage, Würfel	z. B. Bodengüte, Erbanlagen, Wetter
mögliche Wiederholungen	Alle Schüler einer Klasse springen.	Es werden 600 Würfe untersucht.	Alle Ähren eines Feldes werden geprüft.

Mathematik 6, MV, S. 92, paetec, 2003



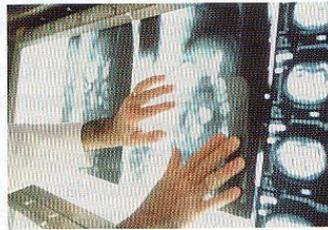
Auch Vermutungen können mehr oder weniger wahrscheinlich sein.

Solche Vermutungen sind:

- „Morgen wird es vermutlich regnen.“
- „Ich nehme an, dass der Brief heute kommt.“

Je nachdem, wie viele Informationen man hat oder bekommt, kann sich die Wahrscheinlichkeit solcher Aussagen auch ändern.

Mandys Arm ist nach einem Sturz mit dem Fahrrad stark angeschwollen und schmerzt sehr. Der Arzt stellt im Ergebnis einer ersten Untersuchung fest: „Die Wahrscheinlichkeit für einen Knochenbruch ist leider groß“. Nach einer Röntgenaufnahme meint er jedoch: „Es besteht nur noch eine geringe Wahrscheinlichkeit, dass ein Knochen verletzt ist. Wir müssen weitere Untersuchungen anstellen.“



Mathematik 6, MV, paetec, 2003, S. 93



Erfassen und Auswerten von Daten

In der Statistik werden die Ergebnisse der zufälligen Vorgänge als **Daten** bezeichnet. Wenn Vorgänge zeitlich parallel ablaufen, können Daten zu einem bestimmten Zeitpunkt während des Verlaufs der Vorgänge erfasst werden.

Beim Erfassen der Daten werden häufig **Strichlisten** verwendet, aus denen sich leicht absolute Häufigkeiten ermitteln lassen.

Ergebnisse	Strichliste	absolute Häufigkeit
> 1,75 m		4
1,71 m – 1,75 m	### III	8
1,66 m – 1,70 m	### ### II	12
1,61 m – 1,65 m	### I	6
< 1,61 m		3



Zur Auswertung von Daten stelle dir folgende Fragen:

- Gibt es Übereinstimmung mit meinen bisherigen Vorstellungen?
- Welche Ursachen könnte es für die Art der Verteilung der Daten geben?
- Welche Zusammenhänge mit anderen Datensätzen gibt es?
- Welche Vergleiche zur Veranschaulichung der Daten sind möglich?



Mathematik 6, MV, paetec, 2003, S. 109



 Traditio et Innovatio

Vorgang	betrachtetes Merkmal	mögliche Ergebnisse	Vorgang ist zufällig
Ziehen einer Karte aus einem Skatenspiel	Farbe der Karte	<i>schwarz, rot: 17</i>	<i>ja: 17 nein: 0 k. A.: 0</i>
Fallenlassen eines Körpers auf der Erde	Bewegungsrichtung des Körpers	<i>unten; runter; senkrecht; ... : 16; unten, links, rechts: 1</i>	<i>ja: 1 nein: 15 k. A.: 1</i>
Spaziergang durch die Stadt	Treffen eines bestimmten Freundes	<i>ja oder nein: 17</i>	<i>ja: 17 nein: 0 k. A.: 0</i>
Wachstum eines Menschen	Körpergröße	<i>groß, klein: 10 Intervalle: 2 unbestimmte Größe: 2 Zuwachs: 2; k. A.: 1</i>	<i>ja: 14 nein: 3 k. A.: 0</i>
Werfen eines Würfels	<i>eine Zahl; : 15 Richtung: 1; k. A.: 1</i>	<i>1,2,3,4,5,6: 13 eine Zahl: 2; k. A.: 2</i>	nein



 Traditio et Innovatio

Vorgang	Anzahl der Wiederholungen/Objekte	betrachtetes Merkmal	mögliche Ausprägungen
Werfen eines Würfels	100 Würfel mit zwei Würfeln	<i>Augensumme (8); Zahlen 1 - 6 (2); k. A. (4)</i>	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
Entwicklung der Größe einer Familie	Familien alle Schülerinnen und Schüler unserer Klasse	Zahl der Geschwister	<i>Angabe von Zahlen (11); mehr, weniger (1); k. A. (2)</i>
Herausbildung von Lebenszielen	alle Schülerinnen und Schüler unserer Klasse	<i>Berufsziel/ Berufswunsch/-wahl (9); Interessen/ Leistung/ Können (5)</i>	alle Berufe
<i>Wachstum des Fußes (6); Kaufen von Schuhen (4); k. A. (4)</i>	alle Schülerinnen und Schüler unserer Klasse	Schuhgröße	<i>groß, klein (4); alle Schuhgrößen (5); x cm (2); k. A. (3)</i>
<i>Zählen der Streichhölzer (5); Anzahl der Streichhölzer (2); k. A. (7)</i>	100 Streichholzschachteln	Anzahl der Streichhölzer	<i>1, 2, 3, : (10) eine Zahl (2) k. A. (2)</i>