Hans-Dieter Sill, Güstrow

Auszug aus: Forschungsbericht zur Entwicklung eines fakultativen Kurses "Stochastik". – Pädagogische Hochschule Güstrow, 1986, 33 S.

3. Standpunkte zur Aneignung stochastischer Bildung in polytechnischen Oberschulen

3.1. In der Oberschule geht es um die Vermittlung der Grundlagen einer stochastischen Allgemeinbildung. Darunter verstehen wir zum einen die notwendigen, wesentlichen und allgemeinen Bestandteile der Bildung eines Bürgers unserer ... Gesellschaft, die es ihm ermöglichen, das Wesen zufälliger Erscheinungen in Natur und Gesellschaft zu erkennen und bewußt zu nutzen. Zum anderen handelt es sich um Bildungselemente, die allgemein in dem Sinne sind, daß sie notwendiger Bestandteil der Bildung aller, bzw. der Mehrzahl der Mitglieder unserer Gesellschaft sind.
Mit dieser Auffassung von stochastischer Bildung verwenden wir den Begriff "Stochastik" in einem erweiterten Sinne. Unter Stochastik verstehen wir nicht nur die mathematischen Disziplinen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, sondern ebenfalls die philosophisch-weltanschaulichen Aspekte, die mit dem Zufall als Erscheinungsform der objektiven Realität verbunden sind. Eine Theorie der Stochastik in diesem Sinne existiert u. E. noch nicht. Der wesentliche Mangel aller uns bekannten Vorschläge zur Behandlung der Stochastik in der Schule liegt u.E. in der Beschränkung auf die Vermittlung bestimmter Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Alle Bestrebungen einzelner Unterrichtsfächer zur Vermittlung stochastischer Bildung sind in die Gesamtstrategie zur Entwicklung einer stochastischen Allgemeinbildung einzuordnen. So kann auch der Beitrag des Mathematikunterrichts nicht a priori auf die Vermittlung von Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik reduziert werden. Wir sehen die Funktion des Mathematikunterrichts insgesamt und so auch in diesem Fall nicht primär in der Aneignung von Grundlagen mathematischer Disziplinen in Verbindung mit entsprechendem Können, sondern in der Aneignung der mathematischen sowie mit Mitteln der Mathematik zu erwerbenden Grundlagen für die Erfüllung der gesellschaftlichen Anforderungen nach der Schule.
Wir grenzen uns weiterhin von einer zu engen Auffassung des Tätigkeitskonzepts für den Mathematikunterricht ab, nach der fast alle Aneignungsprozesse möglichst in Form selbständig und schriftlich zu lösender Aufgabenfolge ablaufen sollten.
Da fast alle Mathematiklehrer zugleich auch für ein naturwissenschaftliches Fach ausgebildet sind, dürfte es ihnen nicht schwerfallen, die dort vorherrschende Form der Unterrichtsgestaltung, das problemhafte Unterrichtsgespräch, auch zeitweise auf den Mathematikunterricht zu übertragen. Bei der Aufnahme stochastischer Bildungselemente in den Mathematikunterricht ist u. E. eine qualitative Erweiterung des Zielkanons und die Einführung neuer methodischer Gestaltungsweisen unumgänglich, wenn nicht gleichzeitig auch andere Unterrichtsfächer einen wesentlichen Beitrag zur stochastischen Allgemeinbildung konzipieren. Zumindest für die Gestaltung des fakultativen Kurses "Stochastik" kann dies nicht vorausgesetzt werden.

3.2. Wir wollen im folgenden versuchen, eine Liste von Problemen zusammenzustellen, die bei der Erfassung und Interpretation zufälliger Erscheinungen mit denen eine Vielzahl von Mitgliedern unserer Gesellschaft konfrontiert werden, auftreten. Damit soll ein erster Ansatz zur Bestimmung der stochastischen Allgemeinbildung gefunden werden. Es lassen sich bei den im einzelnen diskutierten Problemen oft Überschneidungen nicht vermeiden.

3.2.1. Viele Autoren weisen darauf hin, daß der Zufall im Alltag oft als etwas Störendes, Anstößiges oder als Ausflucht angesehen wird. Das tritt besonders dann auf, wenn es sich um starke Abweichungen vom erwarteten Ausgang handelt. Eine Ursache für diese fehlerhaften

Auffassungen ist u. E. darin zu suchen, daß nur ein möglicher Ausgang des betrachteten Prozesses in die Erwägungen einbezogen d. h. der stochastische Charakter des Vorganges nicht erkannt wird. Das kann daran liegen, daß entweder bestimmte zufällige Bedingungen, die den Ausgang beeinflussen, nicht beachtet werden oder der zufällige Charakter der bei den Überlegungen beachteten Bedingungen nicht gesehen wird. Ersteres tritt z. B. bei der Auswertung experimenteller Ergebnisse im Physik- unterricht auf. Die Meßwerte weichen oft von den theoretisch zu erwartenden Ergebnissen ab. Als Ursachen werden in der Regel Meßfehler angegeben, die darin bestehen, daß entweder das Meßgerät nicht in Ordnung ist, der Messende Fehler macht oder durch die Experimentieranordnung nicht die eigentlich gesuchte Größe bestimmt wird. Diese zufälligen Bedingungen werden als störend empfunden und die Bestrebungen von Lehrer und Schüler gehen dahin, diese Abweichungen auszuschließen. Außerhalb der Betrachtungen bleibt jedoch häufig die Tatsache, daß durch die funktionale Charakterisierung des betrachteten Zusammenhanges nur eine unvollständige Widerspieglung der Realität erfolgt. Es werden stets zahlreiche reale Einflüsse auf den Prozeß bei der Gewinnung des Gesetzes vernachlässigt, die selbst bei fehlerlosen Meßgeräten, Experimentieranordnungen und Experimentatoren für eine "Abweichung" der Meßgeräte sorgen. Schon durch die Begriffe "Meßfehler" (Fehler als etwas Falsches, Vermeidbares) und "Abweichung" wird den einseitigen Auffassungen Vorschub geleistet. ... Aus dem Gesagten ergibt sich bereits, daß ein zufälliges Ereignis nicht losgelöst von den Bedingungen des Prozesses in dem es als Resultat entstand, betrachtet werden kann, wenn man das Wesen der Zufälligkeit erkennen will.

3.2.2. Häufig wird der Zufall mit Lücken in der Erkenntnis in Verbindung gebracht, z. B. sei das Ergebnis eines Münzwurfes deshalb zufällig, weil sich keine Ursache-Wirkung-Kette zur Vorhersage des Ausgangs finden ließe. Je mehr Erkenntnisse man über einen zufälligen Prozeß habe, umso genauere Vorhersagen kann man treffen und so den Zufall immer weiter ausschließen. Diesen Gedankengängen liegt eine unzureichende Erfassung der Objektivität des Zufalls zugrunde. Der Münzwurf ist deshalb zufällig, weil unter den gegebenen Bedingungen mehrere Ausgänge möglich sind, unabhängig davon, ob man gewisse funktionale Zusammenhänge zwischen Bedingungen und Wurfergebnis kennt. Eine Beeinflussung des Zufalls durch fortschreitende Erkenntnis ist allerdings durchaus möglich, indem man davon ausgehend die Bedingungen bewußt so verändert, daß bestimmte mögliche Ausgänge unwahrscheinlicher werden. Den Zufall weitestgehend auszuschließen heißt also einmal, die Bedingungen des zufälligen Prozesses so zu gestalten, daß eine eingipflige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit geringer Streuung entsteht. Dies läßt sich mit einigem Aufwand auch für den Münzwurf erreichen. Zum anderen kann ein "Ausschließen" des Zufalls bedeuten, daß durch die genauere Kenntnis funktionaler Zusammenhänge sowie durch die Kenntnis der Ausprägungsgrade der Bedingungen zu Beginn des Prozesses das zu erwartende Ergebnis mit größerer Sicherheit vorhergesagt werden kann. So wäre es denkbar, mit Hilfe der modernen Mikroelektronik eine Reihe von Daten beim Wurf einer Münze (zum Zeitpunkt) des Loslassens) zu ermitteln und vor Auftreffen der Münze auf dem Boden eine Vorhersage zu berechnen. Dies würde überhaupt nichts am Zufallscharakter des Münzwurfes ändern. Es ändert sich lediglich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Wappen" bzw. "Zahl" unter der Bedingung, daß eine Reihe zusätzlicher Informationen vorliegen. Auf keinen Fall kann der Zufall mit Zunahme der Informationen über die Bedingungen z. T. oder gar völlig aufgehoben werden, wie es z. B. von RASTRIGIN in einem populärwissenschaftlichem Buch behauptet wird. Entscheidendes Merkmal für die Zufälligkeit eines Vorganges ist die objektive Existenz unterschiedlicher Ergebnismöglichkeiten unter den gegebenen Bedingungen.

3.2.3. Ein weiteres Problem, daß bei dem Verständnis von zufälligen Erscheinungen eine Rolle spielt, ist die Unterscheidung von zufälligen und nichtzufälligen Bedingungen bzw. die damit im

Zusammenhang stehende Unterscheidung von statistischen und dynamischen Gesetzen. Die Gesetze in Natur und Gesellschaft werden im Rahmen der Allgemeinbildung in der Regel als dynamische Gesetze formuliert. Für das Verständnis der realen Abweichungen (die auch bestimmten Gesetzen unterliegen) muß der zufällige Charakter der Prozesse, der seine Ursache im Wirken zufälliger Bedingungen hat, erkannt und berücksichtigt werden. Eine Bedingung ist zu fällig, wenn Sie zu Beginn oder im Verlauf des Prozesses unterschiedliche Ausprägungsgrade annehmen kann und so unterschiedlichen Einfluß auf das Prozeßergebnis hat. Eine zufällige Bedingung kann also als eine Zufallsvariable angesehen werden. Eine nichtzufällige Bedingung besitzt einen konstanten oder einen funktional veränderlichen Ausprägungsgrad. Das Problem wird noch dadurch komplizierter, daß häufig zufällige Bedingungen näherungsweise als nichtzufällige betrachtet werden und als Begründung der unzureichende Erkenntnisstand oder das Streben nach Vereinfachung des funktionalen Zusammenhanges angegeben wird. Als Beispiel sei das Schießen mit einem Granatwerfer betrachtet, wobei die Lage des Aufschlagpunktes des Geschosses als Prozeßergebnis angesehen werden soll. Als nicht zufällige Bedingungen wirken der eingestellte Abschußwinkel, die Anfangsgeschwindigkeit, die Erdbeschleunigung, der Luftwiderstand, das Geländeprofil u.a.m. Bei Berücksichtigung dieser Bedingungen kann ein zu erwartender Aufschlagpunkt berechnet werden. Durch zufällige Bedingungen, wie Windgeschwindigkeit, Luftdruck, Abweichungen des Abschußwinkels u. a. existieren objektiv unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten für die Aufschlagpunkte im Zielgebiet.

3.2.4. Obwohl der Zufall eine objektive Erscheinung ist, hat er jedoch in bestimmter Hinsicht auch einen subjektiven Charakter, der u. a. im Problem der Relativität des Zufalls zum Ausdruck kommt. Der Zufallscharakter eines Prozesses kann nicht für den Prozeß an sich, sondern nur bezüglich eines bestimmten Merkmals konstatiert werden. Der Prozeß des Würfelns ist zufällig in Bezug auf die Augenzahl und nicht zufällig in Bezug auf das Merkmal "Endlage" mit den Ausprägungsgraden "Seitenfläche", "Kante" und "Ecke". Das Problem der Relativität des Zufalls ist jedoch umfassender, als nur die Frage der Wahl des betrachteten Merkmals. Eine Erscheinung kann in unterschiedliche Prozeßverläufe eingeordnet werden. Entsprechend ihrer Einordnung kann sie einmal zufällig oder nicht zufällig sein. So ist die Note, die ein bestimmter Schüler in einer bestimmten Mathematikarbeit erhält, bezogen auf den ontogenetischen Prozeß seiner Persönlichkeitsentwicklung ein zufälliges Ereignis. Bezogen auf den speziellen Prozeß seiner Vorbereitung auf die Arbeit kann es aber durchaus nicht zufällig sein, wenn er sich z. B. die Aufgaben und Lösungen am Tage vor der Arbeit besorgt.

3.2.5. Zu den Problemen, die durch eine stochastische Allgemeinbildung erfaßt werden müssen, gehört auch das Verhältnis von Zufall und Wahrscheinlichkeit. Während der Zufall oder die Zufälligkeit eine Eigenschaft eines Prozesses bezüglich eines bestimmten Merkmals ist, die er besitzt oder nicht besitzt bzw. die mehr oder weniger deutlich zum Ausdruck kommen kann, ist die Wahrscheinlichkeit ein Maß. Man kann sie jedoch nicht als Maß des Zufalls bezeichnen. Der Zufall ist nicht meßbar, wenn dies auch umgangssprachlich z. T. zum Ausdruck gebracht wird (großer Zufall). Mit der Wahrscheinlichkeit wird gemessen, inwieweit ein mögliches Ergebnis Wirklichkeit werden kann oder genauer: die Wahrscheinlichkeit ist das qualitativ und quantitativ bestimmbare Maß für die bedingte zufällige Verwirklichung einer objektiven Möglichkeit (HÖRZ). Die Wahrscheinlichkeit ist ebenso wie der Zufall eine objektive Erscheinung. Für jedes mögliche Ergebnis eines zufälligen Prozesses gibt es auf Grund der objektiven, zufälligen Bedingungen des Prozesses eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, unabhängig davon, ob sie bekannt oder nicht bekannt, ob sie bestimmbar oder nicht bestimmbar ist. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist nicht an Massenerscheinungen gebunden. Die Wahrscheinlichkeit existiert bereits bei einmaliger Durchführung eines zufälligen Prozesses. Auf diese Tatsache, die sich aus der Objektivität der Wahrscheinlichkeit ergibt, weist u. a. RENYI hin. Er bezeichnet zufällige Ereignisse, deren Stattfinden oder Nichtstattfinden wir nur ein einziges Mal beobachten können, weil ihre Beobachtung nicht unter denselben Bedingungen wiederholt werden kann, als einmalige zufällige Ereignisse und gibt als Beispiel ein Pferderennen an. Es kann also festgestellt werden, daß der Begriff der Wahrscheinlichkeit nicht mit mathematischen Mitteln definiert bzw. erklärt werden kann. Die sogenannte "klassische Definition" von LAPLACE ist keine Definition sondern eine Regel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit im Sonderfall der Gleichverteilung. Die "statistische Definition" beschreibt den Zusammenhang von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit bei Wiederholung des zufälligen Prozesses unter den gleichen Bedingungen. Die "axiomatische Definition" spiegelt grundlegende Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsbegriffs wider und legt eine Einheit fest.

3.2.6. Die Wiederholbarkeit des zufälligen Prozesses und damit die relative Häufigkeit eines Ereignisses sind also keine Voraussetzungen für die Erklärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Obwohl natürlich erst die Wiederholbarkeit das Aufdecken von Gesetzmäßigkeiten ermöglicht und bei einer Interpretation von Wahrscheinlichkeiten in der Regel Aussagen über die Häufigkeit des Ereignisses bei Wiederholungen getroffen werden, sollte für ein tieferes Verständnis gerade statistischer Gesetze die Stufe der Betrachtung eines Prozeßverlaufs nicht übersprungen werden. In der philosophischen Konzeption statistischer Gesetze von HÖRZ und WESSEL wird dies als der probabilistische Aspekt bezeichnet, den sie neben dem dynamischen und stochastischen Aspekt betrachten, um die Element-System-Beziehungen widerspiegeln zu können. Auch SAČKOV widmet dem Verhältnis von System und Elementen bei der Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs große Aufmerksamkeit. Wichtig für das Verhältnis statistischer Gesetz in der Gesellschaft ist die Berücksichtigung der unterschiedlichen Elementbedingungen. Zunächst muß erfaßt werden, daß man die einzelnen Prozesse nur als System betrachten, also von Wiederholungen der zufälligen Prozesse sprechen kann, wenn die zufälligen Bedingungen der Elemente im Wesen übereinstimmen. Das bedeutet, daß die Bedingungen in ihrer Anzahl und Qualität weitgehend identisch sind und auch die Verteilung für die zufällige Verwirklichung der möglichen Ausprägungsgrade der Bedingungen im wesentlichen gleich sind. So kann man z. B. nicht statistische Gesetzmäßigkeiten in Bezug auf die Moralauffassungen aller deutschsprachigen Jugendlichen untersuchen wollen, indem man diese Jugendlichen als Gesamtheit betrachtet. Die Bedingungen für die Moralentwicklung sind bei Jugendlichen in der DDR und in der BRD qualitativ verschieden, so daß statistische Kenngrößen für die Gesamtpopulation nicht berechnet werden können. Die Bedingungen für die Charakterentwicklung von Jungen und Mädchen sind in der DDR sicher qualitativ gleich. Jedoch weisen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen bestimmter Bedingungen (z. B. Spielzeugkauf durch die Eltern) solche Unterschiede auf, daß auch in diesem Fall für bestimmte Charaktereigenschaften ein statistisches Gesetz nur für jedes Geschlecht gesondert ermittelt werden kann. Außerdem ist es umgekehrt notwendig, bei vorliegenden Aussagen für eine Grundgesamtheit richtige Schlußfolgerungen für einen einzelnen Prozeß ableiten zu können. Dazu müssen die Elementbedingungen als Zufallsvariable betrachtet werden, die bei den einzelnen Elementen unterschiedliche Verteilungen besitzen können. Soll z. B. aus der Angabe der durchschnittlichen Unfallquote in der DDR auf die Wahrscheinlichkeit, daß dem Autofahrer X ein Unfall passiert geschlossen werden, so müßten etwa folgende Überlegungen angestellt werden. Es wird der zufällige Prozeß "Herr X fährt mit Auto" mit den möglichen Ereignissen "unfallfrei" und "nicht unfallfrei" betrachtet. Auf das Eintreten des Prozeßergebnisses haben viele Faktoren (zufällige Bedingungen) Einfluß, so z. B. der technische Zustand des Autos, die Fahrsicherheit von Herrn X, sein Konzentrationsvermögen, das Verkehrsverhalten der übrigen Verkehrsteilnehmer u. a. m. Bei jeder Fahrt eines Autos in unserem Land haben diese Bedingungen eine etwas andere Verteilung. Die Angabe der durchschnittlichen Unfallquote bezieht sich auf den Gesamtprozeß, auf das System aller Autofahrer. Die Systembedingung "Konzentrationsvermögen" besitzt als Verteilung praktisch die Summe aller Verteilungen der entsprechenden Elementbedingungen, charakterisiert also den "durchschnittlichen" Autofahrer. Für Herrn X kann nun die Wahrscheinlichkeit eines Autounfalls erheblich von der mittleren Häufigkeit für alle Autofahrer abweichen, wenn die Bedingungen in seinem Fall für ein unfallfreies Fahren eine besonders günstige Verteilung besitzen. Diese Wahrscheinlichkeit läßt sich empirisch ermitteln, wenn man als System alle Autofahrten von Herrn X und alle Fahrten ähnlich veranlagter Autofahrer mit Fahrzeugen in gleichem technischen Zustand usw. betrachtet. Eine Besonderheit dieses Beispiels besteht darin, daß durch das Subjekt eine Veränderung der zufälligen Bedingungen (oder besser gesagt ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilungen) und damit eine bewußte Veränderung der Wahrscheinlichkeit des Prozeßergebnisses erfolgen kann.

3.2.7. Ein weiteres Problem ist der Zusammenhang von Zufall und Kausalität, also die Frage ob zufällige Ereignisse eine Ursache haben. Gelegentlich werden zufällige und kausal bestimmte Ereignisse einander gegenüberstellt (RENYI) oder es wird als zufälliges Ereignis ein solches bezeichnet, bei dem der gegebene Bedingungskomplex nicht die Gesamtheit aller Ursachen des Ausfalls widerspiegelt (BIGOTT). Die mehr oder weniger vollständige Widerspiegelung von Ursachen kann auf keinem Fall ein Kriterium für die Zufälligkeit von Ereignissen sein; damit würde die Objektivität des Zufalls geleugnet werden. Jedes Ereignis, auch das zufällige, hat objektive Ursachen, ist also kausal bedingt. Es ist nicht deshalb zufällig, weil es keine Ursache hat oder die Ursachen nicht angebbar sind, sondern weil die Bedingungen Zufallscharakter haben. Ursachen eines zufälligen Ereignisses sind die Ausprägungsgrade der zufälligen Bedingungen, die zu dem Ereignis führten. Fragt man weiter nach den Ursachen für die Zufälligkeit der Bedingungen, so kommt man zur Betrachtung des Prozesses, in dessen Verlauf die Ausprägungen der zufälligen Bedingungen entstehen. In diesem Prozeß wirken wieder Bedingungen mit Zufallscharakter. Auf diese Weise könnte man immer weiter in die "Tiefe" und in die "Breite" bei der Ursachenforschung vorstoßen, ohne jemals ein vollständiges System nichtzufälliger Bedingungen anzutreffen. Dies ist eine Folge der unendlichen Vielfalt und Unerschöpflichkeit der Materie, die ihren Ausdruck u. a. in der Unschärferelation findet. Als Beispiel wollen wir die Körpergröße eines bestimmten Schülers A betrachten. Diese Körpergröße ist ein zufälliges Ergebnis des bisherigen Entwicklungsprozesses des Schülers. Einfluß auf die Ausprägung der Zufallsvariable "Körpergröße" haben als zufällige Bedingungen vor allem die Erbanlagen und die Ernährungsgewohnheiten. Ursachen für die konkrete Größe des Schülers sind also vor allem die bei ihm vorhandenen Erbanlagen und die von ihm konsumierte Nahrung. Die Zufallsvariable "Ernährung des Schülers A" hängt nun z. B. wiederum von solchen zufälligen Bedingungen, wie den Ernährungsgewohnheiten der Eltern, dem Einkommen der Familie, den Besonderheiten der Geschmacksempfindungen des Schülers u. a. m. ab.

3.2.8. Eine wichtige Frage im Umgang mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff ist die Interpretation von Wahrscheinlichkeitsaussagen. Betrachtet man nur einen Prozeßverlauf, so gestattet die Angabe von Wahrscheinlichkeiten einen Vergleich möglicher Ergebnisse. Man kann feststellen, welche Ereignisse mehr oder weniger wahrscheinlich sind. Damit verbinden sich die Erwartungen bezüglich des Eintretens der Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit kann in diesem Zusammenhang als "Grad der Gewißheit" bezeichnet werden, der sich zur vollen Gewißheit wie der Teil zum Ganzen verhält. Diese subjektive Widerspiegelung des objektiven Maßes kann jedoch nicht als Grundlage einer Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs dienen, wie es in der philosophischen Konzeption der subjektiven Wahrscheinlichkeit erfolgt. Die Gefahr subjektiver Auffassungen ist besonders groß, wenn eine quantitative Bestimmung der Wahrscheinlichkeit nicht möglich ist. Dies ist dann der Fall, wenn eine große Anzahl zufälliger Bedingungen vorhanden ist, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen dieser Bedingungen nicht hinreichend bekannt sind oder eine Wiederholung des Prozesses unter den gleichen Bedingungen nicht

möglich ist. Beispiele für solche Prozesse sind der Prozeß der Persönlichkeitsentwicklung eines bestimmten Mitgliedes unserer Gesellschaft oder der Prozeß der kulturellen Entwicklung in unserer Gesellschaft.
Eine weitere Interpretationsmöglichkeit von Wahrscheinlichkeitsaussagen ergibt sich, wenn Wiederholungen des Prozesses unter gleichen Bedingungen betrachtet werden. Die Wahrscheinlichkeit ist dann der zu erwartende Wert der relativen Häufigkeit des betreffenden Ereignisses. Solche Betrachtungen sind in allen Fällen anwendbar, in denen die Wahrscheinlichkeit quantitativ bekannt und der Prozeß sehr oft wiederholbar ist, wie z. B. bei den Glücksspielen.
Bei der Interpretation von Wahrscheinlichkeitsaussagen können zwei Fälle unterschieden werden. Zum einen kann der Prozeß bereits abgeschlossen sein und ein Ereignis vorliegen und zum anderen kann es sich um eine Aussage über ein bevorstehendes Ereignis handeln. In beiden Fällen lassen sich die zuvor genannten Interpretationen anwenden.

3.2.9. Ein besonderes Problem ist die Bewertung von Ereignissen mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit. Treten sie auf bzw. wird ihr Auftreten in Erwägung gezogen, ist meist vom Zufall die Rede. Das unerwartete Zusammentreffen zweier Menschen, der herabfallende Dachziegel, der einen Menschen erschlägt und ähnliche besonders Glücks- oder Unglücksfälle sind die Erscheinungen, die häufig zu allererst mit dem Begriff "Zufall" in Verbindung gebracht werden. Die richtige Einstellung zu dieser Frage ist von großer weltanschaulicher Bedeutung. Es geht u. a. um den Kampf gegen fatalistische Auffassungen, die immer wieder anzutreffen sind. Das völlig Unerwartete, Unfaßbare führt oft schnell zum Glaube an das vorherbestimmte Schicksal, das unausweichlich jeden erreicht. Es muß in diesem Zusammenhang die Einsicht vermittelt werden, daß Ereignisse mit geringer Wahrscheinlichkeit zwar äußerst selten vorkommen, daß aber bei einer genügend großen Zahl von Wiederholungen des Prozesses bzw. von parallellaufenden Prozessen die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereignis mindestens einmal auftritt, recht groß sein kann. Andererseits muß aber auch verhindert werden, daß zu große Hoffnungen im Glücksfälle gesetzt werden bzw. zu große Befürchtungen vor Unglücksfällen bestehen. Nach KITAIGORODSKI können Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten kleiner als 10^{-6} von einem einzelnen Menschen vernachlässigt werden. In dieser Größenordnung liegen etwa die Wahrscheinlichkeiten für einen Hauptgewinn in einer Lotterie oder für einen tödlichen Autounfall. Beide Ereignisse sollte man also bei seinen Erwägungen über das weitere Leben außer Acht lassen.

3.2.10. Die Beachtung der quantitativen Verhältnisse ist eben falls häufig beim Schluß von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit erforderlich. So wird z. B. auf Grund der Existenz von Rauchern, die ein hohes Alter erreichen, oft an der Schädlichkeit des Rauchens gezweifelt. Bei dieser Art von Schlußfolgerungen werden in der Regel zwei Fehler begangen. Zum einen wird nicht beachtet, daß der Zusammenhang zwischen Rauchen und frühem Tod (in Bezug auf die durchschnittliche Lebenserwartung) ein statistischer ist, d. h. es wird übersehen, daß es objektiv eine bestimmte Wahrscheinlichkeit für langlebende Raucher gibt. Bei der großen Population ist das Auftreten solcher Ereignisse mit Sicherheit anzunehmen. Zum anderen kann bei der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in einem System zufälliger Prozesse nicht von einem beobachteten Zusammenhang in einem einzelnen Prozeßverlauf ausgegangen werden. Das hieße, einen Schluß von einer Stichprobe mit n = 2 auf die Grund gesamtheit zu ziehen.

3.2.11. Ein weiteres Problem, das durch die stochastische Allgemeinbildung erfaßt werden sollte, ist die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei vorhandener Gleichverteilung. Ein typisches Beispiel sind die Glücksspiele unter regulären Bedingungen. In diesen Fällen läßt sich die objektiv existierende Wahrscheinlichkeit auf theoretischem Wege ermitteln. Die Durchführung von Experimenten zur Ermittlung relativer Häufigkeiten ist als Nachweis für die

Richtigkeit des Wertes der Wahrscheinlichkeit nicht erforderlich, es sei denn, es bestehen Zweifel an der Regularität der Bedingungen. Ansonsten ist die wiederholte Durchführung des Prozeßverlaufs lediglich zur anschaulichen Interpretation der Wahrscheinlichkeitsaussage geeignet.

3.2.12. Von den zahlreichen Möglichkeiten zum Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten tritt in der gesellschaftlichen Massenpraxis vor allem die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten des entgegengesetzten Ereignisses, der Summe bzw. des Produktes von Ereignissen auf. Eine besondere Bedeutung hat die Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß bei Prozeßverläufen ein Ereignis mindestens einmal auftritt.

3.2.13. Ein häufiger Fehler im Rahmen stochastischer Betrachtungen steht im Zusammenhang mit der Unabhängigkeit von Ereignissen. Die Geschichte beweist, daß selbst bedeutende Gelehrte der Meinung waren, die Wahrscheinlichkeit z. B. für "Wappen" wäre, nachdem fünfmal "Zahl" gefallen ist, größer als 0,5. In ähnlicher Weise wird z. T. eine Bevorzugung bestimmter Zahlen beim Lotto in Abhängigkeit von den bisher gezogenen Zahlen empfohlen, oder es wird bei der Geburt des 3. Kindes, wenn die ersten beiden Jungen sind, vermutet, die Wahrscheinlichkeit für ein Mädchen sei größer. Letzterer Fehlschluß liegt sicher auch daran, daß Familien mit 2 Jungen und einem Mädchen häufiger sind, als Familien mit 3 Jungen.

3.2.14. Aus der Statistik sind folgende Elemente für eine stochastische Allgemeinbildung aus der Sicht der massenhaft auftretenden gesellschaftlichen Anforderungen von Bedeutung: Darstellung von Daten in Tabellen und Diagrammen, Klassenbildung als Methode zur Verdichtung von Daten, Beschreibung von Verteilungen durch Mittelwert und Streuung, Interpretation unterschiedlicher Verteilungsformen und Trendkurven.

3.3. Aus der in Thema 3.2. umrissenen und sicher nicht vollständigen Liste von Problemen bei der Widerspiegelung zufälliger Erscheinungen, die in der gesellschaftlichen Praxis massenhaft auftreten, müssen nun die allgemeinen und wesentlichen Elemente und Beziehungen abgeleitet werden. Dabei sind sicher die grundlegenden Bestandteile der Wissenschaftsdisziplinen, die sich unter verschiedenen Aspekten mit zufälligen Erscheinungen beschäftigen, zu beachten, also die Philosophie des Zufalls, die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Statistik. Man kann jedoch nicht a-priori deren Grundbegriffe als die Grundbegriffe der stochastischen Allgemeinbildung ansehen.

3.4. Die stochastische Bildung läßt sich nicht auf das Operieren mit Ergebnismengen beschränken. Um zum Wesen zufälliger Erscheinungen vorzudringen ist eine Prozeßbetrachtung notwendig. Dabei müssen die Bedingungen, der Verlauf und die möglichen Ergebnisse analysiert werden. Unter einem zufälligen Prozeß bzw. einem Prozeß mit Zufallscharakter verstehen wir einen Prozeß, in dem auf Grund des Zufallscharakters der Bedingungen mehrere Ergebnisse (Ausgänge) möglich sind. Die möglichen Ergebnisse werden als zufällige Ereignisse bezeichnet. Eine Prozeßbedingung heißt zufällig, wenn sie vor oder während des Prozeßverlaufs mehrere Ausprägungen annehmen kann. Sie ist eine Zufallsvariable mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Damit grenzen wir uns ab von der Verwendung der Begriffe "zufälliger Versuch" bzw. "Zufallsexperiment". Mit diesen Begriffen wird eine zufällige Erscheinung in unzulässiger Weise mit der Erkenntnistätigkeit des Menschen verbunden. Die in den Lehrbüchern zur Wahrscheinlichkeitsrechnung genannten Standardbeispiele kann man zudem oft kaum als Versuch bezeichnen. So ist bei der Erfassung statistischer Daten in der Praxis, etwa bei der Bestimmung der Lebensdauer einer Glühlampe, nicht der eigentliche zufällige Prozeß, in diesem Fall der Vorgang des Inbetriebseins einer Glühlampe unter bestimmten Bedingungen, Gegenstand der Versuchsplanung, sondern die Ermittlung des

Prozeßergebnisses. Die zufälligen Erscheinungen in der Gesellschaft und in der Natur, die unabhängig vom Menschen auftreten, sind eben falls keine Versuche oder Experimente im Sinne der üblichen Verwendung dieser Begriffe.

3.5. Die Wiederholbarkeit eines zufälligen Prozesses ist keine notwendige Bedingung für einen Zufallscharakter. In vielen Fällen ist außerdem eine Wiederholung des Prozesses unter genau den gleichen Bedingungen nicht möglich, wie z. B. bei allen biologischen und gesellschaftlichen Entwicklungsprozessen. Die Wiederholung ist eine Möglichkeit, um den Zufallscharakter sichtbar zu machen. Die Zusammenfassung vieler zufälliger Einzelprozesse, die unter gleichen oder ähnlichen Bedingungen ablaufen, zu einem System (wobei die Prozesse nacheinander oder nebeneinander ablaufen können) erfordert in der Regel eine Neubestimmung der Bedingungen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der zufälligen Systembedingungen ergeben sich aus der Überlagerung der Verteilungen der Einzelbedingungen. Durch die Betrachtung des Systems ist es möglich, gesetzmäßige Beziehungen zwischen den Bedingungen und Wirkungen festzustellen. Beim Ableiten von Schlußfolgerungen aus den Gesetzen des Systems auf den Verlauf einzelner Prozesse und umgekehrt ist der Zusammenhang der Einzel und Systembedingungen zu beachten. Diese Schlußweisen sind ein wesentliches Element stochastischer Bildung.

3.6. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff sollte durch Explikation gewonnen werden. Zunächst sollten Ereignisse unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit miteinander verglichen werden, um zu komparativen Wahrscheinlichkeitsaussagen zu gelangen. Erst danach erfolgt eine Normierung durch das Intervall <0,1> bzw. <0%; 100%>, wobei die Grenzfälle p = 0, p = 1 als nichtzufällige Ereignisse zu kennzeichnen sind. Es ist unangebracht, die Bezeichnungen "klassischer", "statistischer", "geometrischer" bzw. "axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff" zu verwenden. Der in der methodischen Literatur dominierende frequentistische Zugang verdeckt das objektive Wesen der Wahrscheinlichkeit. Durch eine unzulässige Koppelung an die Wiederholung von Prozessen unter gleichen Bedingungen wird der Begriff stark eingeengt. Die Betrachtung von Prozessen mit gleichmöglichen Ergebnissen und die Untersuchung der relativen Häufigkeit von Ereignissen in Systemen zufälliger Prozesse sollten natürlich ohne Frage eine wichtige Rolle bei der Festigung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes spielen.

3.7. Ein weiterer wichtiger Begriff ist der der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Im Rahmen der stochastischen Allgemeinbildung ist eine Beschränkung auf diskrete Ereignismengen möglich. Bei stetigen Zufallsgrößen läßt sich eine Diskretisierung durch Klassenbildung erreichen. Unter dieser Voraussetzung kann als Wahrscheinlichkeitsverteilung die Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Ausgängen des zufälligen Prozesses verstanden werden.

3.8. Der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit wird als problematisch angesehen, da jede Wahrscheinlichkeitsangabe an bestimmte Bedingungen geknüpft ist. Die entsprechenden Berechnungen verdeutlichen jedoch in günstiger Weise die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses von den Prozeßbedingungen. Dabei ist jedoch herauszustellen, daß es nicht primär um die Kenntnis der veränderten Bedingungen, sondern um die Tatsache, daß sie anders sind, geht.

3.9. Zur stochastischen Allgemeinbildung gehört weiterhin ein bestimmtes Können im Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten. Es ist angesichts der in der Praxis vorkommenden Aufgabentypen u. E. nicht erforderlich, über umfangreiche und allgemeine Sach- und Verfahrenskenntnisse zu verfügen. Insbesondere halten wir es nicht für notwendig, allgemeine Modelle wie Baumdiagramme, Urnenmodell, Bernoullisches Schema, u. a. zu behandeln. Mit den Formeln zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für das entgegengesetzte Ereignis, für die Summe zweier unvereinbarer Ereignisse und für das Produkt zweier unabhängiger Ereignisse lassen sich alle betreffenden Aufgaben lösen.

3.10. Der beschreibenden Statistik kommt keine eigenständige Rolle im Rahmen einer stochastischen Allgemeinbildung zu. Sie sollte deshalb lediglich als Hilfsmittel bei der Erfassung, Darstellung, Verdichtung und Auswertung von Häufigkeiten zufälliger Ereignisse angesehen werden.

Auf weitere Ausführungen zu den Bestandteilen einer stochastischen Allgemeinbildung soll an dieser Stelle verzichtet werden, da sich unsere Standpunkte ebenfalls in den angegebenen Zielen des Lehrgangs niederschlagen.

4. Ziele des Lehrgangs

Ausgehend von den im Punkt 3 dargestellten Auffassungen zum Wesen einer stochastischen Allgemeinbildung sollte der Teillehrgang folgende Ziele in Bezug auf die Aneignung stochastischer Bildung haben. Es sei nochmals betont (vgl. Pkt. 2), daß dies nicht die primären Ziele des Lehrgangs sind. Die Dominanz der Ziele im Sinne der ersten Funktion äußert sich jedoch vor allem in der methodischen Gestaltung, zu der im nächsten Punkt Aussagen gemacht werden.

4.1. Die Schüler erkennen den zufällige Charakter zahlreicher Prozesse in Natur und Gesellschaft, insbesondere der Prozesse, mit denen sie unmittelbar konfrontiert sind.

4.2. Die Schüler wissen, daß der Begriff "Zufall" immer in Bezug auf einen Prozeß, seine Bedingungen und seine möglichen Ergebnis (Ausgänge, Ereignisse) zu verwenden ist. Der Zufallscharakter bezieht sich dabei stets auf ein betrachtetes Merkmal der am Prozeß beteiligten Elemente.

4.3. Die Schüler erfassen, daß der Zufallscharakter eines Prozesses unabhängig vom Erkenntnisstand des Menschen ist. Ein "Ausschließen" des Zufalls bedeutet, die Bedingungen des Prozesses so zu verändern, daß hauptsächlich die gewünschten Ereignisse eintreten oder auf Grundlage der Kenntnis der Ausprägungen einiger Bedingungen für einen konkreten Prozeßverlauf, das zu erwartende Ereignis mit größerer Sicherheit vorhersagen zu können.

4.4. Die Schüler erkennen, daß Abweichungen vom erwarteten Ausgang eines zufälligen Prozesses unausbleiblich sind und etwas ganz Normales darstellen. Sie können weder als Ausflucht angegeben noch als etwas Anstößiges betrachtet noch gar als Fügung des Schicksals bezeichnet werden.

4.5. Die Schüler erkennen, daß auch zufällige Ereignisse Ursachen haben. Sie sind die Ausprägungen der zufälligen Einflußfaktoren für einen bestimmten Prozeßverlauf. Diese Ausprägungen sind wiederum Ergebnis eines zufälligen Prozesses. Die Ursachenkette führt auf Grund der Unerschöpflichkeit der Materie nie zu einem System nicht zufälliger Prozesse bzw. Bedingungen.

4.6. Die Schüler erkennen den Unterschied zwischen zufälligen und nicht zufälligen Bedingungen. Sie wissen, daß Zusammenhänge zwischen Bedingungen und Wirkungen funktional oder korrelativ charakterisiert werden können.

4.7. Die Schüler sind in der Lage den Wahrscheinlichkeitsbegriff in richtiger Weise zu verwenden. Sie wissen insbesondere, daß die Wahrscheinlichkeit ein Maß ist, das unabhängig vom Menschen und seinem Erkenntnisstand existiert. Die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses ist eindeutig durch die Bedingungen des Prozeßverlaufs bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit kann qualitativ (mehr, weniger oder gleichwahrscheinlich) oder quantitativ(als Zahl zwischen 0 und 1 bzw. zwischen 0 % und 100 %) bestimmt werden. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses besagt, mit welchen Erwartungen man dem Eintreten dieses Ereignisses entgegensehen kann. Die Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Ergebnissen eines zufälligen Prozesses heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung.

4.8. Die Schüler wissen, daß man zwischen der Betrachtung eines einzelnen Prozesses und eines Systems von Prozessen unter scheiden muß. Das System kann im wiederholten Verlauf des Prozesses bzw. im parallelen Verlauf von mehreren Prozessen gleicher Art bestehen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der zufälligen Bedingungen der Prozesse eines Systems können unterschiedlich sein. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Systembedingungen ist die Überlagerung der Verteilungen der Einzelprozesse.

4.9. Die Schüler kennen den Zusammenhang zwischen der relativen Häufigkeit eines zufälligen Ereignisses in einem System von Prozessen und der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses und können diese Kenntnisse zur Interpretation von Wahrscheinlichkeitsaussagen sowie zur quantitativen Bestimmung von Näherungswerten für Wahrscheinlichkeiten anwenden.

4.10. Die Schüler können aus Aussagen über ein System zufälliger Prozesse Schlußfolgerungen für einzelne Prozesse ableiten und umgekehrt, wobei sie insbesondere den Zusammenhang von Elementbedingung und Systembedingung beachten.

4.11. Die Schüler können im Fall der Gleichverteilung die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse quantitativ bestimmen, soweit sich die Anzahl möglicher Ereignisse in überschaubarer Weise (ohne Anwendung kombinatorischer Formeln) bestimmen läßt.

4.12. Die Schüler wissen, daß man Wahrscheinlichkeiten für zusammengesetzte Ereignisse berechnen kann, wenn die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse bekannt sind. Sie kennen die Formeln zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das entgegengesetzte Ereignis, für die Summe unvereinbarer Ereignisse und für das Produkt unabhängiger Ereignisse und können sie sicher anwenden. Sie verstehen die Herleitung der Formel für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis bei Wiederholungen des Prozesses mindestens einmal auftritt und können die Formel zur Lösung entsprechender Aufgaben anwenden.

4.13. Die Schüler kennen den Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen inhaltlich und können fehlerhafte Auffassungen im Zusammenhang mit der Unabhängigkeit widerlegen.

4.14. Die Schüler kennen folgende Begriffe und können sie im Rahmen statistischer Untersuchungen anwenden: Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße, Grundgesamtheit, Stichprobe, absolute Häufigkeit, relative Häufigkeit, prozentuale Häufigkeit, Urliste, Strichliste, Häufigkeitstabelle, Klassenbildung, Mittelwert einer Verteilung, Streuung einer Verteilung, Normalverteilung

4.15. Die Schüler systematisieren ihre Kenntnisse über die Anfertigung von Diagrammen.

4.16. Die Schüler verstehen die Anwendung von graphischen und numerischen Verfahren zur Untersuchung der Korrelation zweier Merkmale.

Literatur:

Bigott, B.: Was ist und was soll "Stochastik"?. - In: Math. Sch. 23(1985)6. S. 388-395

Heitele, D. 1976: Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe. - 1976. - Dortmund, Dissertation

Hilsberg, I. 1985: Erste Überlegungen zur Behandlung der Wahrscheinlichkeit in der Schule. In: Wiss. Zeitschr. Humboldt-Universität Berlin. - Berlin (1985)7. S.663 - 668

Hörz, H.: Zufall - Eine philosophische Untersuchung. - Berlin: Akademie-Verlag, 1980. - 248 S.

Hörz. H.; Wessel, K.-F.: Philosophische Entwicklungstheorie. - Berlin: Deutscher Verlag d. Wissenschaften, 1983. - 220 S.

Kitaigorodski, A.: Unwahrscheinliches - möglich oder unmöglich?. - Moskau, Leipzig: Verlag MIR, Fachbuchverlag, 1975. - 254 S.

Rastrigin, L.A.: Zahl oder Wappen?: Ein Buch über den Zufall. - Moskau, Leipzig: Verlag MIR, Urania-Verlag, 1973. - 238 S.

Renyi, A.: Briefe über die Wahrscheinlichkeit. - Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1969. - 178

Rezensionen mathematischer Schulbücher. - In: ZDM. - Stuttgart 13(1981)6. - S 250 ff.

Sačkov, I. V.: Wahrscheinlichkeit und Struktur. - Berlin: Akademie-Verlag, 1978