Hans-Dieter Sill, Rostock

Probleme und Möglichkeiten der Behandlung der bedingten Wahrscheinlichkeit

1. Der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit in Planungsdokumenten

Eine Analyse der aktuellen Gymnasiallehrpläne der 16 Bundesländer zeigt, dass der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit ein verbindlicher Bestandteil der Oberstufenpläne zumindest in den Leistungskursen der 8 Länder Berlin, Brandenburg, Bayern, Hessen, Rheinland-Pfalz, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen ist. Außer in Hessen und in Rheinland-Pfalz ist in diesen Ländern auch der Satz von Bayes ein verbindlicher Inhalt.

Der Arbeitskreis Stochastik der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik hat in seinen Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts als eines der Mindestziele für das Abschlussniveau stochastischer Allgemeinbildung am Ende der Sekundarstufe II formuliert: „Die Schüler erwerben ein inhaltliches Verständnis für den Begriff "bedingte Wahrscheinlichkeit" und für die Bayessche Formel und können sie in Sachsituationen verständig anwenden.“ (EMPFEHLUNGEN, S. 25) Diesen Empfehlungen entsprechen also lediglich die Lehrplanforderungen in den genannten Bundesländern, obwohl der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit Bestandteil der Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung sowohl in der Fassung vom 01.12.1989 als in der aktuellen Fassung vom 24.05.2002 ist.

Aufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit werden aufgrund der meist anspruchsvollen Analyse des Sachverhaltes oft als schwer eingeschätzt (BEA/SCHOLZ; TIETZE/KLIKA/ WOLPERS; TOMLINSON/QUINN, WIRTHS). Es gibt zahlreiche psychologische Untersuchungen zu Fehlintuitionen und Vorschläge zu ihrer Überwindung. Ein prägnantes Beispiel dafür sind die häufigen Missverständnisse und weltweiten Diskussionen im Zusammenhang mit dem so genannten „Ziegenproblem“. Eine Ursache für diese hohen Anforderungen besteht darin, dass es sich um sehr unterschiedliche Zusammenhänge und Betrachtungsweisen handelt, die mit demselben mathematischen Apparat bearbeitet werden können.

In diesem Beitrag soll versucht werden, einen neuen Zugang zur Behandlung der bedingten Wahrscheinlichkeit und der damit verbundenen Themen darzustellen, der ein besseres Verständnis des Begriffes der bedingten Wahrscheinlichkeit ermöglichen kann und eine Gruppierung der Aufgabenstellungen sowie der Lösungsmethoden erlaubt. Der Vorschlag basiert auf einer neuen Betrachtung zufälliger Erscheinungen, in deren Mittelpunkt nicht zufällige *Ereignisse*, sondern *Prozesse* mit Zufallscharakter stehen. Damit verbunden ist eine Unterscheidung von zwei Arten zufälliger Vorgänge und von zwei Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Das Kapitel zur bedingten Wahrscheinlichkeit im Lehrbuch SILL, 2004 entspricht diesem Ansatz und ist als Anlage beigefügt.

2. Eine Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen

Stochastik ist lediglich ein Oberbegriff für zwei Gruppen von Wissenschaftsdisziplinen, die Deskriptive (Beschreibende) Statistik und Explorative Datenanalyse sowie die Wahrscheinlichkeitsrechung und Mathematische (Beurteilende) Statistik, die eine unterschiedliche Geschichte und unterschiedliche Grundbegriffe haben. So werden in der Deskriptiven Statistik etwa die Termini Grundgesamtheit, Merkmal, Merkmalsausprägungen, Daten verwendet und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Bezeichnungen Zufallsversuch, zufälliges Ereignis, Zufallsgröße. Durch die vorgeschlagene Prozessbetrachtung ist es möglich, gemeinsame Begriffe und einheitliche Betrachtungsweisen zufälliger Erscheinungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik zu verwenden, wodurch eine engere Verzahnung der Gebiete erreicht werden kann.

Ein zentrales Verständnisproblem im Stochastikunterricht betrifft den Terminus „Zufall“. Mit diesem Wort sind viele und z. T. sehr unterschiedliche Bedeutungen verbunden (SILL, 1993). Wird das Wort Zufall in der Umgangssprache verwendet, so ist meist eine der folgenden Bedeutungen intendiert:

– Es handelt sich um ein sehr selten auftretendes Ereignis, etwa um ein „großes Glück“ oder auch ein „großes Pech“.
– Es ist ein unerwartetes Ereignis, z. B. die „zufällige“ Begegnung mit einem Freund.
– Es ist eines von gleichmöglichen Ereignissen, z. B. ist es „zufällig“, welche Augenzahl man würfelt.
– Wird etwas als „nicht zufällig“ bezeichnet, so ist gemeint, dass es dafür Ursachen gibt und man das Ereignis beeinflussen oder sogar vorhersehen könnte. Dies steht hinter der Feststellung eines Lehrers „Die Zensur des Schülers war kein Zufall.“

In der Wissenschaft, insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat das Wort Zufall u. a. folgende Bedeutungen:

– Ein Experiment wird als Zufallsexperiment (Zufallsversuch) bezeichnet, wenn es beliebig oft wiederholbar ist und seine Ergebnisse nicht vorhersehbar sind. Ein Ereignis heißt zufällig, wenn es Ergebnis eines Zufallsexperimentes ist.
– Das Wort „Zufall“ dient zur Bezeichnung der völligen Regellosigkeit, was oft durch die Wortverbindung "reiner Zufall" noch unterstützt wird. Man spricht von einer „echten“ Zufallszahlenfolge oder einer „zufälligen“ Auswahl, wenn es keinerlei Regelmäßigkeiten gibt bzw. für alle Objekte die gleiche Wahrscheinlichkeit besteht, ausgewählt zu werden.
– Sobald der Mensch die Auswahl beeinflussen kann (Aufsagen von Zahlenfolgen, Hineinsehen in die Urne) wird das Ergebnis nicht mehr als zufällig bezeichnet.
– Eine „zufällige“ Abweichung vom erwarteten Wert („Zufallsschwankung“) bedeutet, dass es dafür keine besonderen Ursachen gibt. Eine Abweichung wird als „überzufällig“ (signifikant) bezeichnet, wenn man annimmt, dass es dafür bestimmte Gründe gibt.
– Der Zufall wird als Ausdruck der Unkenntnis über ein eingetretenes Ereignis angesehen. Es wird gesagt, der Zufall verschwindet bei vollständiger Information.

Alle diese Bedeutungen des Wortes „Zufall“ haben durchaus ihre Berechtigung zur Verständigung von Menschen im Alltag oder in der Wissenschaft. Vielen der Bedeutungen ist gemeinsam, dass damit in statischer Weise bestimmte *eingetretene* Ereignisse oder Größen bezeichnet werden, wie es z. B. in den Bezeichnungen „zufälliges Ereignis“, Zufallszahl“, „Zufallsgröße“ zum Ausdruck kommt.

Es gibt aber auch Betrachtungen in der Literatur, die den Zufall aus dynamischer Sicht in Zusammenhang mit einem System von Bedingungen bringen. Daran anknüpfend halte ich es für sinnvoll, wenn im Stochastikunterricht ein bestimmter, für viele sicher neuer Aspekt der Bedeutung des Wortes „Zufall“ eine zentrale Rolle spielt, nämlich die Eigenschaft „zufällig“ als Merkmal eines zeitlich ablaufenden Prozesses bzw. Vorgangs. Ein Vorgang sollte als „zufällig bezüglich eines Merkmals“ bezeichnet werden, wenn es mehrere mögliche Ergebnisse gibt. Das einzige definierende Merkmal eines zufälligen Vorgangs wäre damit die Existenz mehrerer möglicher Ergebnisse. Die mit Menschen verbundenen Aspekte wie Vorhersehbarkeit oder Beeinflussbarkeit müssen bei der Identifizierung zufälliger Vorgänge nicht berücksichtigt werden. Dies ermöglicht ein leichteres Erkennen zufälliger Erscheinungen im Alltag sowie ein besseres Verständnis von Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Eine Prozessbetrachtung orientiert auf das Suchen von Zusammenhängen zwischen Bedingungen der Vorgänge und den Wahrscheinlichkeiten ihrer Ergebnisse. Sie ist eine Hilfe beim Finden von Baumdiagrammen (SILL, 2004, S. 89). Es ist eine einheitliche Betrachtung von „Zufallsexperimenten“ und statistischen Untersuchungen möglich.

Es können im Einzelnen folgende Aspekte einer Prozessbetrachtung unterschieden werden:

- Es wird zunächst nur ein zeitlich ablaufender Vorgang in der Natur, der Gesellschaft oder dem Denken in der Vergangenheit, der Gegenwart oder der Zukunft betrachtet.
- Es wird ein Merkmal ausgewählt, das bei diesem Vorgang untersucht werden soll.
- Es werden die möglichen Ergebnisse des Vorgangs bezüglich des Merkmals ermittelt.
- Es werden die Bedingungen bzw. Einflussfaktoren betrachtet, unter denen der Vorgang abläuft. Dabei kann zwischen allgemeinen Bedingungen (Einflussfaktoren) und ihren Ausprägungen bei Ablauf des Vorgangs unterschieden werden.
- Es wird eine bestimmte Anzahl von Wiederholungen des Vorgangs betrachtet, die nacheinander oder gleichzeitig ablaufenden können.
- Eine Menge parallel laufender zufälliger Vorgänge kann auf der Grundlage der Analyse der Bedingungen als ein System gelten, insbesondere bei statistischen Untersuchungen.
- Es wird zwischen einem zufälligen Vorgang und einem Experiment unterschieden. Als Zufallsexperiment wird die experimentelle Untersuchung eines zufälligen Vorgangs, d.h. die Planung, Durchführung und Auswertung einer bestimmten Anzahl von Wiederholungen des Vorgangs bezeichnet.

3. Arten zufälliger Vorgänge und Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffes

Es können zwei verschiedene Arten von zufälligen Vorgängen in der Realität unterschieden werden, die mit verschiedenen Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffes verbunden sind.

I. Vorgänge in der Natur oder der Gesellschaft
Die Ergebnisse dieser Vorgänge sind reale Objekte oder Zustände. Die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse wird durch das Denken des Subjektes, das den Vorgang untersucht, nicht beeinflusst, d.h. sie existiert unabhängig („objektiv") vom erkennenden Subjekt, das sie nur möglichst genau bestimmen kann.

II. Vorgänge im Denken von Menschen
Die Ergebnisse von Denkvorgängen sind Gedanken oder Hypothesen. Zu den Bedingungen, unter denen diese Vorgänge ablaufen gehören die Kenntnisse des denkenden Subjektes, seine geistigen Fähigkeiten sowie die Verlaufseigenschaften seiner Denkprozesse. Die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse hängt vom Subjekt ab, das die Gedanken äußert („subjektive" Wahrscheinlichkeit). Die Wahrscheinlichkeit kann sich ändern mit Änderung der Kenntnisse des Subjektes über den betrachteten Sachverhalt.

Beide Arten von Vorgängen sind oft wechselseitig miteinander verbunden, etwa wenn („subjektive") Hypothesen über die („objektiven") Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse beim Würfeln mit einem Quader aufgestellt und untersucht werden.

4. Zur Bezeichnung und zur Schreibweise der „bedingten" Wahrscheinlichkeit

Die Bezeichnung „bedingte Wahrscheinlichkeit" ist nach HALLER offenbar erst von KOLMOGOROW als Fachausdruck eingeführt worden. Diese Wortschöpfung ist durchaus mit einigen Problemen verbunden. So hält etwa BRANDT das Wort „bedingt" für unzweckmäßig. Er bezieht sich dabei auf die Bedeutung, dass als „Bedingung" das Eintreten eines Ereignisses bezeichnet wird. Da man aber auch formal beide Ereignisse in $P(A|B)$ vertauschen kann, ergibt sich für ihn die Frage, welches Ereignis denn nun als erstes eingetreten sei.

Aus Sicht der Prozessbetrachtung ist die Frage zu stellen, ob die Bezeichnung „bedingt" etwas mit den Bedingungen des betrachteten zufälligen Vorgangs zu tun hat. Diese Bedeutung ist in einigen aber nicht allen Anwendungsfällen durchaus vorhanden, da das Eintreten eines Ereignisses eine Bedingung für einen darauf folgenden Vorgang sein kann. Mit dem Eintreten eines Ereignisses wird aber nur eine von vielen Bedingungen erfasst, die Einfluss auf den Verlauf eines Vorgangs haben. Es kann weiterhin der Eindruck entstehen, dass für den ersten Vorgang eines mehrstufigen Vorgangs keine Bedingungen abgebbar sind, was nicht der Fall ist.

Trotz dieser Probleme sollte der Fachausdruck „bedingte Wahrscheinlichkeit" in der Oberstufe verwendet werden, wenn zugleich hinreichend viele inhaltliche Aspekte zu diesem Begriff vermittelt werden.

Es sind zwei unterschiedliche Schreibweise für bedingte Wahrscheinlichkeiten gebräuchlich: $P_B(A)$ und $P(A|B)$. Beide Schreibweisen haben Vor- und Nachteile. Bei der von KOLMOGOROW verwendeten Schreibweise $P_B(A)$ wird deutlich, dass es sich bei bedingten Wahrscheinlichkeiten um ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß handelt. Es entsteht durch Reduzierung der Menge der Elementarereignisse, indem nur die betrachtet werden, die zur Ereignis B gehören. Ein Nachteil der Bezeichnung $P_B(A)$ sind schreibtechnische Probleme, wenn das Ereignis B in Worten ausgedrückt werden soll. Die Reihenfolge des Lesens ist außerdem eine andere als Schreibreihenfolge. Diese beiden Probleme bestehen bei der Schreibweise $P(A|B)$ nicht. Sie sollte deshalb auch in der Schule bevorzugt werden. Es ist allerdings zu beachten, dass es sich bei „A|B" nicht um eine Verknüpfung von Ereignissen im üblichen Sinne handelt. Die Schüler sollten beide Schreibweisen kennen lernen, da ihnen später auch beide begegnen können.

5. Formale und inhaltliche Aspekte des Fachausdrucks „bedingte Wahrscheinlichkeit"

Ein Zugang zur Komplexität des semantischen Netzes eines Begriffs ist durch Betrachtung seiner einzelnen Bedeutungsaspekte möglich.

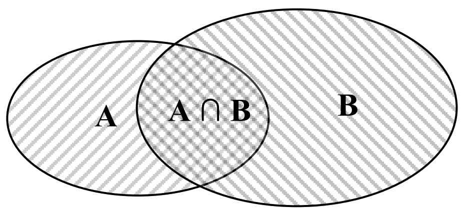
Der Begriffs „bedingte Wahrscheinlichkeit" hat mindestens folgende Aspekte:

A: $P_B(A)$ ist der Quotient aus den Wahrscheinlichkeiten $P(A \cap B)$ und $P(B)$, der bei einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum bestehend aus einem Ergebnisraum Ω und einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P stets existiert, wenn $P(B) > 0$ ist.

B: Mit dem so definiertem Term $P_B(A)$ erhält man eine neue Wahrscheinlichkeitsverteilung P_B über der Menge Ω, was sich durch Überprüfung der Gültigkeit der drei Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung beweisen lässt.
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_B über Ω kann man aus der Verteilung P erhalten, indem man die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 neu verteilt. Dazu setzt man fest, dass für alle Elementarereignisse $\omega \notin B$ gilt $P_B(\omega) = 0$ und für alle $\omega \in B$ gilt $P_B(\omega) = \dfrac{P(\omega)}{P(B)}$.

C: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_B über dem Ergebnisraum Ω kann auch als neue Wahrscheinlichkeitsverteilung P' über dem neuen Ergebnisraum $\Omega' = B$ aufgefasst werden. Man sagt, dass durch die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ eine Reduzierung des Ergebnisraumes erfolgt. Durch den Übergang zum reduzierten Ergebnisraum erübrigt sich faktisch die Betrachtung bedingter Wahrscheinlichkeiten (BARTH/HALLER, S. 130)

D: Werden die Ereignisse A und B durch Mengendiagramme dargestellt, können die bedingten Wahrscheinlichkeit als Verhältnis von Flächeninhalten interpretiert werden. $P_A(B)$ ist das Verhältnis der Flächeninhalte, die $A \cap B$ und A entsprechen und $P_B(A)$ ist das Verhältnis der Flächeninhalte, die $A \cap B$ und B entsprechen.



E: Werden bei mehrstufigen Vorgängen Baumdiagramme zur Veranschaulichung genutzt, so sind alle Wahrscheinlichkeiten an den Pfaden ab der 2. Stufe bedingte Wahrscheinlichkeiten.

F: Wenn zwei Ereignisse A und B in der Natur oder Gesellschaft zeitlich nacheinander eintreten (im Ergebnis zwei nacheinander ablaufender zufälliger Vorgänge), so kann das zuerst eingetretene Ereignis A eine Bedingung für das Eintreten des zweiten Ereignisses B sein. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ bedeutet dann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B, unter der Voraussetzung, dass A eingetreten ist (bzw. unter der Bedingung A). Man spricht auch von der durch A bedingten Wahrscheinlichkeit von B.

G: Werden Verhältnisse bzw. Anteile in Datenmengen als Wahrscheinlichkeiten interpretiert, so können bedingte Wahrscheinlichkeiten als Verhältnisse bzw. Anteile in bestimmten Teilmengen der Daten aufgefasst werden. Die Daten können in Form absoluter oder relativer Häufigkeiten vorliegen.

H: Wenn das Ereignis B eine Hypothese ist (als Ergebnis eines Denkprozesses) und das Ereignis A eine Information zu dem Sachverhalt darstellt, zu dem die Hypothese formuliert wurde, so ist $P_A(B)$ die neue Wahrscheinlichkeit der Hypothese B nach Kenntnis der Information A, die auch als Indiz oder Datum bezeichnet wird.

Die Aspekte A, B und mit Einschränkungen auch C sind rein formale mathematische Betrachtungen. D und E sind inhaltliche innermathematische Interpretationen. Mit den Aspekten F, G und H werden zentrale außermathematische Interpretationen bzw. Anwendungen erfasst.

Die Bedeutung von „bedingt“ im Sinne von „Bedingung sein für etwas“ ist lediglich in dem Aspekt F enthalten. Dies zeigt erneut die Probleme, die mit dem Fachterminus „bedingte Wahrscheinlichkeit“ verbunden sind. Es sollten deshalb auch nicht die bei F genannten Sprechweisen generell beim Auftreten bedingter Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

In Artikeln oder Lehrbücher werden meist nur einige der 8 Aspekte betrachtet. So beschränkt sich BRANDT auf den Aspekt E, BUTH bezieht nur die Aspekte A, C, D und E in seine methodischen Vorschläge ein. TIETZE/KLIKA/WOLPERS und WIRTHS erfassen in ihren Vorschlägen vor allem den Aspekt H und die damit verbundenen Betrachtungen im Sinne der Bayes-Statistik.

Im Mathematikunterricht sollten zumindest die Aspekte A, E, F, G und H mithilfe geeigneter Aufgabestellungen und Betrachtungsweisen vermittelt werden.

Auf die engen Beziehungen des semantischen Netzes des Begriffs „bedingte Wahrscheinlichkeit“ zum Netz des Begriffs „Unabhängigkeit“ soll außer einigen Bemerkungen im Abschnitt 7.3 aus Umfangsgründen nicht weiter eingegangen werden.

7. Zur Typisierung von Aufgabenstellungen zur bedingten Wahrscheinlichkeit

Eine der Ursachen für die Schwierigkeiten mit dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit sowohl aus erkenntnistheoretischer als auch aus unterrichtspraktischer Sicht sehe ich in darin, dass damit völlig unterschiedliche Problemstellungen und Betrachtungsweisen bearbeitet bzw. beschrieben werden können. Eigentlich ist es ein bekanntes Problem der Anwendung von Mathematik, dass sich derselbe mathematische Apparat als Modell für verschiedene Sachverhalte anwenden lässt, aber offensichtlich gibt es in diesem Fall epistemologische und psychologische Barrieren gegen diese bekannte Tatsache.

Es lassen sich vier Typen von Problemstellungen unterscheiden.
1: Untersuchen von Teilmengenbeziehungen in Ergebnismengen
2: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Vorgängen
3: Untersuchung statistischer Daten bei mehrdimensionalen Merkmalen
4: Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Hypothesen nach neuen Informationen

Aufgrund der Schwierigkeiten beim Lösen Aufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit gibt es zahlreiche Untersuchungen zu verschiedenen Lösungsmethoden und Visualisierungsmöglichkeiten. Auf den Einsatz dieser Möglichkeiten wird bei den einzelnen Aufgabentypen eingegangen.

7. 1 Zur Untersuchung von Teilmengenbeziehungen

Bei diesen Aufgaben geht es um Beziehungen in der bekannten Ergebnismenge eines einfachen eventuell auch mehrstufigen Vorgangs.

Ein typisches Beispiel für Aufgaben dieser Art ist das folgende (BUTH, S. 392):
Beim Wurf mit zwei Würfeln werden folgende Ereignisse betrachtet:
A: Die Augensumme ist höchstens gleich 7.
B: Die Augenzahl des ersten Würfels beträgt 1 oder 2.
Zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ bzw. $P_B(A)$ braucht man nur die Anzahl der Elemente der Teilmengen A (21), B (12) und $A \cap B$ (11) zu ermitteln. Daraus ergibt sich dann sofort $P_A(B) = \frac{11}{21}$ und $P_B(A) = \frac{11}{12}$.

Auch KÜTTING (S. 221 ff) schlägt einen solchen Zugang zum Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit vor. Mit diesen Aufgaben können die Aspekte A, C und D ausgebildet werden. Der Wert dieser Aufgaben für das Begriffsverständnis ist relativ gering. Auf sie kann bei Zeitproblemen weitgehend verzichtet werden.

Spezielle Lösungsmethoden sind für diesen Aufgabentyp nicht erforderlich. Die Berechnungen können direkt mit der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit erfolgen.

7.2 Zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Vorgängen

Es sollten vor allem reale Vorgänge der 1. Art (vgl. 3.) betrachtet werden, die nacheinander ablaufen und die in einem inhaltlichen Zusammenhang stehen. Diese Vorgänge sind dann für die Betrachtung bedingter Wahrscheinlichkeiten interessant, wenn das Eintreten eines Ergebnisses die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse des nachfolgenden Vorgangs beeinflussen kann. Ein typischer Fall ist das Ziehen von Kugeln aus Urnen ohne Zurücklegen.

Die Darstellung dieser Sachverhalte sollte in üblicher Weise mithilfe von Baumdiagrammen erfolgen. Zur Berechnung der interessierenden Wahrscheinlichkeiten sind nur die Pfadregeln erforderlich. Es handelt sich bei diesen Aufgaben also lediglich um eine Umkehrung der den Schülern vertrauten Aufgabenstellungen aus dem Bereich der mehrstufigen Vorgänge. Deshalb sollte diese Betrachtungsweise auch am Anfang stehen. An ihr lassen sich durch Verallgemeinerung des Vorgehens die mathematische Begriffe, Bezeichnungen und Formeln gut erarbeiten. Es wird z. B. deutlich, dass bedingte Wahrscheinlichkeiten in diesem Fall nichts anderes als die Wahrscheinlichkeiten an den Pfaden eines Baumdiagramms sind, mit denen die Schüler bereits oft gearbeitet haben (Aspekt E). Weiterhin kann die Bezeichnung „bedingt“ gut motiviert und der Aspekt F vermittelt werden.

Es kann vertiefend zur Arbeit mit Baumdiagrammen für einen zweistufigen Vorgang eine allgemeine Darstellung mit Variablen für Ereignisse erfolgen (SILL, 2004, S. 101). Dabei kann dann auf der formalen Ebene die Reihenfolge der Teilvorgänge als beliebig angesehen und die Bezeichnung umgekehrtes Baumdiagramm eingeführt werden. Durch das Lösen entsprechender formaler Aufgaben sollte bereits eine gewisse Vertrautheit mit dem Berechnen von bedingten Wahrscheinlichleiten erreicht werden. Die Lösung der Aufgaben sollte sowohl mit Baumdiagrammen als auch mit der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit erfolgen, um den Zusammenhang beider Lösungsmethoden zu verdeutlichen.

7.3 Zur Untersuchung statistischer Daten bei mehrdimensionalen Merkmalen

Es handelt sich um die Betrachtung von Ergebnissen statistischer Untersuchungen, bei denen an den Objekten der Grundgesamtheit die Ausprägungen mehrerer (meist nur zweier) Merkmale ermittelt wurden. Mit der statistischen Untersuchung werden sehr viele gleichzeitig in der Wirklichkeit ablaufende zufällige Vorgänge 1. Art erfasst, deren Ergebnisse zum gleichen Zeitpunkt gemessen werden.

Durch die Berechnung und den Vergleich von bedingten Wahrscheinlichkeiten, die hier Modelle von Verhältnissen von Daten sind (Aspekt G), kann untersucht werden, ob die untersuchten Merkmale der Objekte voneinander abhängig oder unabhängig sind. Deshalb sollte der Begriff der Unabhängigkeit an dieser Stelle eingeführt werden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass es sich bei der Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit im stochastischen Sinne nicht immer um eine Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit im kausalen Sinne handeln muss. Bei diesen Sachverhalten ist dies jedoch in der Regel immer in einer der möglichen Richtungen der Fall.

Die Lösung der Aufgaben kann mithilfe einer Vier- bzw. Mehrfeldertafel, mit einem Baum- oder einem Mengendiagrammen erfolgen. Eine Feldertafel, die noch durch die Randsummen ergänzt werden sollte, ist meist bereits durch die Aufgabenstellung gegeben oder kann leicht aus den angegebenen Daten gewonnen werden. Es sollte aber auch bei einigen Aufgaben eine Darstellung der Daten in einem Baumdiagramm erfolgen, um die Betrachtungen zur Unabhängigkeit zu verallgemeinern. Durch die Darstellung einer Vierfeldertafel in Form eines quadratischen Mengendiagramms kann gut das Verhältnis von Abhängigkeit und Unabhängigkeit verdeutlicht werden.

Aufgaben dieses Typs stellen eine günstige Verbindung von statistischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen dar. Wird mit Wahrscheinlichkeiten gearbeitet, sollte stets folgendes Denkmodell verwendet werden: Es wird ein Objekt aus der Grundgesamtheit zufällig ausgewählt. Dann kann man die Wahrscheinlichkeit angeben, dass das Objekt die untersuchten Merkmale in einer bestimmten Kombination hat.

7.4 Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Hypothesen nach neuen Informationen

Dies ist in vielen Vorschlägen zur Behandlung der bedingten Wahrscheinlichkeit eine der Hauptanwendungen dieses Begriffs.

Es handelt sich um einen einzelnen Vorgang der 2. Art, d. h. einen in der Regel nicht wiederholbaren Erkenntnisprozess, der im Kopf eines bestimmten Menschen abläuft. Dabei geht es um Aussagen über das eingetretene aber dem betreffenden Menschen unbekannte Ergebnis eines zufälligen Vorgangs. Diese Aussagen der betreffenden Person werden als Hypothesen bezeichnet, die für die Person eine bestimmte Wahrscheinlichkeit haben. Ein typischer Fall ist die Diagnose der Krankheit eines Patienten durch einen Arzt.

Zur grafischen Darstellung des schrittweisen Erkenntnisprozesses kann ein verkürztes Baumdiagramm verwendet werden, das alle Hypothesen und Informationen enthält (vgl. Sill, 2004, S. 104). Die Berechnung der Pfadwahrscheinlichkeiten erfolgt mit der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit. Dazu ist zuvor mit der 2. Pfadregel die Wahrscheinlichkeit der erhaltenen Information zu berechnen. Die Rechnungen müssen gesondert neben dem Baumdiagramm erfolgen, die Ergebnisse sollten aber zur besseren Veranschaulichung in das Baumdiagramm eingetragen werden.

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der neuen Hypothesen nach Vorliegen einer Information kann zur Formel von Bayes verallgemeinert werden. Die Aufgaben dieses Typs und die zugehörige Lösungsmethode sind ein Grundmuster der so genannten Bayes-Statistik, die eine mögliche Methode der beurteilenden Statistik darstellt. Sie unterscheidet sich wesentlich von den Denkweisen und Methoden der klassischen beurteilenden Statistik.

Zu diesem Aufgabetyp gehören zahlreiche Aufgaben mit paradoxem Ergebnis wie das Schubladen-Paradoxon, das Ziegenproblem u. a. Mit der Betrachtung des Einflusses von weiteren Informationen können stochastische Fehlintuitionen aufgeklärt werden.

In empirischen Untersuchungen mit Erwachsenen zur Überwindung von Fehlintuitionen bei Arbeit mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (BEA/SCHOLZ) wurde die Wirksamkeit verschiedenen grafischer Repräsentationen getestet. Es zeigte sich, dass die Verwendung eines Einheitsquadrates (quadratisches Mengendiagramm einer Vierfeldertafel) langfristig die größten Lerneffekte erbrachte.

In neueren psychologischen Untersuchungen zu diesen Fehlintuitionen insbesondere zum „Ziegenproblem“ hat sich gezeigt, dass auch das Operieren mit Erwartungswerten, also mit absoluten Häufigkeiten eine günstige Methode zum Gewinne von Einsichten und auch zum Lösen der Aufgaben ist (KRAUSS).

Literatur

Barth, F.; Haller, R.: Stochastik : Leistungskurs. – München : Ehrenwirth Verlag, 1992

Bea, W.; Scholz, R. W. : Graphische Modelle bedingter Wahrscheinlichkeiten im empirisch-didaktischen Vergleich. – In : Journal für Mathematik-Didaktik 16 (1995) 3/4. – S. 299 – 327

Brandt, C.: Behutsam zur Stochastik. - In : Mathematik in der Schule 33 (1995) 4. – S. 222, 227 – 234

Buth, M.: Methodische Anregungen zur Behandlung der bedingten Wahrscheinlichkeit. – In : MNU. 56 (2003) 7. – S. 391 – 394

Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts / Arbeitskreis Stochastik der GDM. – In: Stochastik in der Schule 23 (2003) 3, S. 21 – 26

Haller, R.: Zur Geschichte der Stochastik. – In : Didaktik der Mathematik. – 16 (1988) 4 . – S. 262 – 277

Krauss, S.: Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann: Das „Häufigkeitskonzept“. – In : Stochastik in der Schule. 23 (2003) 1. – S. 2 – 9

Kütting, H.: Didaktik der Stochastik. – Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI-Wiss.-Verl., 1994

Sill, H.-D. (Hrsg.) : Mathematik : Lehrbuch für die Klasse 10 : Sachsen-Anhalt : Gymnasium. – Berlin, Franfurt a. M. : PAETEC-Verlag für Bildungsmedien, 2004

Sill, H.-D.: Zum Zufallsbegriff in der stochastischen Allgemeinbildung. – In : Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 25 (1993) 2. – S. 84 – 88

Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H.: Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Bd. 3: Didaktik der Stochastik. - Braunschweig [u.a.]: Vieweg, 2002

Tomlinson, S.; Quinn, R.: Bedingte Wahrscheinlichkeit verstehen. - Stochastik in der Schule. – 18 (1998) 3. – S. 27 – 40

Wirths, H.: Bedingte Wahrscheinlichkeit. – In : Mathematik in der Schule. 32 (1994) 4. – S. 199 - 209.