

## **Zum Verhältnis von stochastischen und statistischen Betrachtungen**

Im folgenden soll die in [1] vorgestellte Methode zur Analyse zufälliger Erscheinungen vertieft und auf das Problem des Verhältnisses von statistischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen angewendet werden.

Überlegungen zur Verbindung von Beschreibender Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man bei zahlreichen Autoren. So fordert SCHUPP [2] u.a., daß die Trennung zwischen Zufalls- und Massenerscheinungen aufgehoben werden sollte. Angesichts des gegenwärtigen Trends zur Beschreibenden Statistik und Explorativen Datenanalyse wird die Notwendigkeit einer engen Verzahnung dieser Gegenstände mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Inhalten weiter erhöht. Die Analyse einiger Zusammenhänge wird an Beispielen vorgenommen, die der Autor im Unterricht in einer 8. Klasse eines Gymnasiums und in einer 9. Klasse einer Realschule behandelt hat.

Ein Aspekt zufälliger Erscheinungen ist das Problem der Wiederholbarkeit. Die Schüler müssen erfassen, daß es zwei Arten von Wiederholungen gibt, der gleichzeitige, quasi parallele Verlauf der Vorgänge und das wiederholte Nacheinanderablaufen eines Vorganges. Dies läßt sich am Beispiel des Würfels verdeutlichen, indem z.B. das sechsmalige Werfen eines Würfels und das einmalige Werfen von 6 Würfeln gegenübergestellt werden. Die Schüler führten diese unterschiedlichen Realisierungen des gleichen Vorganges aus und kamen von selbst auf das Problem der Unabhängigkeit. Die sechs Würfel, die gemeinsam in einem Becher geschüttelt werden, beeinflussen sich zwar im physikalischen Sinne, aber dadurch wird bei keinem Würfel eine bestimmte Augenzahl wahrscheinlicher. Mit Blick auf die Statistik sollten diese Betrachtungen öfter erfolgen, da es bei der Erhebung statistischer Daten in der Regel um zufällige Vorgänge geht, die parallel ablaufen. Eine gegenseitige Beeinflussung kann dabei nicht immer ausgeschlossen werden.

Ein weiteres Problem ist die Unterscheidung zwischen dem eigentlichen Vorgang und dem Prozeß der Ermittlung der Ergebnisse. Man trifft in der Literatur häufig auf die Formulierung, daß etwa die Messung der Körpergröße oder die Durchführung einer Meinungsumfrage ein Zufallsexperiment sei. Bei dieser Betrachtungsweise wird der eigentliche Vorgang, in dessen Ergebnis die gemessenen Daten entstehen, nicht ins Blickfeld gerückt. Das Messen der Körpergröße ist nicht das Analogon zum Werfen eines Würfels, sondern entspricht

dem Ablesen der gewürfelten Augenzahl. Die Vorgänge, die zu den gegenwärtig vorhandenen Körpergrößen der Schüler geführt haben (also dem gleichzeitigen Werfen einer bestimmten Anzahl von Würfeln entsprechen), sind die Wachstumsprozesse der Schüler. Eine Bezeichnung des Prozesses der Datenermittlung als Zufallsexperiment ist nur sinnvoll, wenn man "Zufallsexperiment" synonym für die Menge der ablaufenden Vorgänge und für das Experiment im naturwissenschaftlichen Sinne verwendet, das als Ziel die Ermittlung der gegenwärtigen Verteilung der Körpergrößen hat. Mit dieser Unterscheidung der beiden prinzipiell verschiedenen Erscheinungen (Vorgang und Messung der Ergebnisse) ist natürlich noch nichts über die unterrichtliche Behandlung dieses Problems gesagt. Sie richtet sich nach den im Unterricht verfolgten Zielen. In vielen Fällen reicht es, auf der Ebene der Charakterisierung der Verteilung stehenzubleiben.

Ein drittes und fundamentales Problem ist die Frage nach den Bedingungen eines Vorganges. Beim Würfeln ist es einsichtig für die Schüler, was es heißt, daß jeder Wurf unter den gleichen Bedingungen abläuft. Doch worin bestehen die Bedingungen und die Gleichheit der Bedingungen z.B. bei der Analyse der wöchentlichen Aufwendungen der Schüler für Arbeiten im Haushalt? Die hier zeitlich parallel verlaufenden Vorgänge sind die Arbeiten, die die Schüler täglich im Haushalt auszuführen haben und bei denen man sich für das Merkmal wöchentliche Arbeitszeit interessiert. Zunächst stellten die Schüler fest, daß die Bedingungen bei jedem anders sind. Es fiel ihnen nicht schwer zu erkennen, was Einfluß auf den Umfang der zu leistenden Arbeiten hat, wie etwa die Anzahl und Art der Geschwister, die Art der Forderungen der Eltern, die Größe der Wohnung, die Frage, ob man ein Junge oder ein Mädchen ist u.a.m. Mit diesen Überlegungen zu den Bedingungen, die Einfluß auf die Ergebnisse haben, sind bereits stochastische Betrachtungen verbunden. Es geht um das Erkennen von stochastischen Zusammenhängen, also letztlich um das Aufdecken stochastischer Gesetzmäßigkeiten. Das läßt sich in Ansätzen durchaus mit den Schülern unter Verwendung datenanalytischer Methoden verfolgen. In der 8. Klasse des Gymnasiums habe ich dazu mit den Schülern ein zweiseitiges Stamm-und-Blätter-Diagramm angefertigt, um die Abhängigkeit der mittleren Arbeitszeit vom Geschlecht zu erkunden, was sich dann auch überzeugend nachweisen ließ. So betrug die mittlere wöchentliche Arbeitszeit (der Median) für die 7 Mädchen der Klasse 200 Minuten, während die 14 Jungen im Mittel nur 90 Minuten in der Woche zu Hause helfen mußten. Dies führte zu der Frage, ob es sinnvoll ist, eine mittlere Arbeitszeit für die ganze Klasse anzugeben, was die Schüler verneinten.

Die Diskussionen zu diesem Beispiel zeigen, daß man das Problem der Bedingungen in mehrfacher Hinsicht analysieren muß. Es lassen sich drei Betrachtungsebenen unterscheiden. Vorweg sei betont, daß diese Strukturierung nicht als

Gegenstand des Unterrichts gedacht ist und auch keine Phasen in der Entwicklung des stochastischen Denkens der Schüler darstellt.

Auf der Ebene der Betrachtung eines einzelnen konkreten Ablauf eines Vorganges sind (bei Anerkennung des allgemeinen Kausalitätsprinzips) die Bedingungen, unter denen dieser Vorgang abläuft, die Ursachen für das eingetretene Ergebnis. So gibt es auch bei jedem einzelnen Wurf eines Würfels konkrete Ausprägungen z.B. der Abwurfbedingungen, die eine der Ursachen für das eingetretene Ergebnis sind. Auf dieser Ebene, die man als **deterministische Ebene** bezeichnen könnte, spielen Betrachtungen zum Zufall noch keine Rolle. Die z.T. auch bei Schülern (vor allem im Gymnasium) aufgetretene Meinung, daß es eigentlich gar keinen Zufall gäbe, hat hier ihre rationale Wurzel.

Der Zufall tritt erst in Erscheinung, wenn man vom einzelnen Vorgang zur Betrachtung eines Systems von Vorgängen aufsteigt, also das Verhältnis Element - System, eine fundamentale Beziehung der Stochastik (STEINBRING [3]), betrachtet. Aus statistischer Sicht geht es um die Frage, welche Objekte man zu einer Grundgesamtheit zusammenfassen kann. Dazu müssen Bedingungen formuliert werden, die dann für alle betrachteten Vorgänge als gleich angesehen werden. Beim Würfeln wäre z.B. zu fordern, daß bei jedem Wurf der gleiche Würfel, die gleiche Unterlage und die gleiche "Wurftechnik" vorhanden sind. In der Statistik spricht man auch von konstanten und variablen Faktoren. Das Vergegenwärtigen der gleichen Bedingungen, die bei jedem einzelnen Vorgang durchaus unterschiedliche Ausprägungen haben können, spielt bei statistischen Untersuchungen oft keine Rolle und ist den Schülern nicht so einfach zu verdeutlichen. Unterteilt man z.B. die Schüler bei den Untersuchungen zur wöchentlichen Arbeitszeit nur nach dem Geschlecht, so gehören zu den gleichen Bedingungen in jeder Untersuchungspopulation (d.h. zu den Bedingungen, von deren Unterschiedlichkeit abgesehen wird), die Zahl der möglicherweise vorhandenen Geschwister und die Erziehungsauffassung der Eltern. Unter den "gleichen" Bedingungen gibt es also solche, die wirklich bei jeder Wiederholung identisch sind, wie etwa der verwendete Würfel oder das Geschlecht der Schüler, und solche, die bei jeder Wiederholung eine andere Ausprägung haben, wie die Abwurfbedingungen oder die Familienbedingungen. In der Statistik ist es im letzteren Falle sinnvoll davon zu sprechen, daß von bestimmten Unterschieden bei den Untersuchungsobjekten abgesehen wird.

Diese Ebene der Betrachtungen könnte **probabilistische Ebene** genannt werden, da sich auf ihr die Abstraktionen vollziehen, die zu Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (z.B. Zufallsexperiment) führen.

Bei der letzten, bereits angesprochenen Betrachtungsebene geht es um das Aufdecken von stochastischen Gesetzmäßigkeiten. Auf dieser Ebene, die man als **stochastische Ebene** bezeichnen könnte, wird der Begriff "Bedingung" im Sinne von "Einflußfaktor" verwendet. Eine Veränderung der Bedingungen kann eine Veränderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung bewirken. Das Arbeiten auf dieser Ebene beinhaltet also das Anstellen von dynamischen Betrachtungen, d.h. eine Analyse von Ursache - Wirkung - Beziehungen im stochastischen Sinne. Bei allen statistischen Untersuchungen sind solche Überlegungen erforderlich, um Grundgesamtheiten zu bilden und die Ergebnisse interpretieren zu können. Sie sind mit Schülern, wie die Beispiele zeigen, bereits zu Beginn eines Stochastik-kurses durchführbar.

In den Rahmenrichtlinien für Mecklenburg-Vorpommern haben wir versucht, das Konzept einer engen Verzahnung von Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung umzusetzen. Dabei ließen wir uns von folgenden Prinzipien leiten:

- Verwendung eines einheitlichen, mit dem Sprachverständnis der Schüler eng verbundenen Systems von Begriffen und Betrachtungsweisen,
- Koppelung beider Gebiete auf allen Klassenstufen, beginnend in Klasse 2,
- Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff durch Explikation der Alltagsvorstellungen über komparative und qualitative Charakterisierungen sowie häufiges Verwenden statistischer Betrachtungen zum Schätzen und Interpretieren von Wahrscheinlichkeiten.

Hinweise und Unterrichtsvorschläge auf der Grundlage der Rahmenrichtlinien enthält eine Handreichung [4], die wir zur Orientierung der Lehrer kurzfristig erarbeitet haben.

## **Literatur**

- [1] Sill, H.-D.: Grundbegriffe stochastischer Allgemeinbildung. - In: Beiträge zum Mathematikunterricht . - Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 1991. - S. 449 - 452
- [2] Schupp, H. 1982: Zum Verhältnis statistischer und wahrscheinlichkeitstheoretischer Komponenten im Stochastik-Unterricht der Sekundarstufe I. - In: J. Math. Didakt. 3(1982)4. S. 207-226
- [3] Steinbring, H.: Mathematische Begriffe in didaktischen Situationen: Das Beispiel der Wahrscheinlichkeit. - In: J. Math. Didakt. 6(1985)2 . S. 85-118
- [4] Stochastik in der Sekundarstufe I: Handreichungen zu den Rahmenrichtlinien im Land Mecklenburg-Vorpommern, Heft 1. - Güstrow, 1992