

Dieter Wickmann
Bayes-Statistik: Einsicht gewinnen und entscheiden bei Unsicherheit
Mathematische Texte, Bd. 4
Mannheim; Wien; Zürich: BI-Wiss.-Verlag 1990, 226 S.

Hans-Dieter Sill, Güstrow

1. Vorbemerkungen

Aufgrund äußerer Bedingungen, war es mir bis vor kurzem nicht möglich, tiefere Einsichten in den Problemkreis subjektivistischer Zugänge zur Stochastik zu gewinnen, so daß ich die Entscheidung zur Übernahme dieser Rezension im Zustand ziemlicher Unsicherheit traf. Die seitdem gewonnenen Erkenntnisse, vor allem durch die intensive Beschäftigung mit dem Buch von D. WICKMANN, haben mich darin bestärkt, daß im Stochastikunterricht die Bayes-Statistik nicht länger ignoriert werden kann. Sie haben weiterhin zur Bestätigung und Einordnung eigener Ansätze und Ideen beigetragen.

Die zur Verfügung stehende Zeit von wenigen Monaten reichte allerdings nicht aus, um die relevante Literatur umfassend aufzuarbeiten. Die vorgenommenen Einschätzungen sind deshalb nur als Zwischenbericht eines Didaktikers aus den neuen Bundesländern zu verstehen, und vor allem aus der Sicht auf die aktuellen Aufgaben bei der Integration der Stochastik in die Lehrpläne entstanden.

2. Inhaltsüberblick

Das Buch ist in folgende sieben Kapitel und einen Anhang gegliedert (in Klammer der jeweilige Umfang):

1. Einführung und Begriffsbildung (20 S.)
2. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten (5 S.)
3. Wahrscheinlichkeitsverteilungen (10 S.)
4. Das Bayesche Theorem (17 S.)
5. Entscheiden bei Unsicherheit (10 S.)
6. Die Welt Θ als Kontinuum (86 S.)
7. Kritik des klassischen Konzeptes (15 S.)

Der Anhang (63 S.) enthält didaktische Anmerkungen, Lösungen der Übungsaufgaben, Pascal-Programme, spezielle Werte von Verteilungsfunktionen sowie ein umfangreiches Literaturverzeichnis.

Ausgehend von 12 Situationen der Ungewißheit aus den verschiedensten Lebensbereichen (Wetterprognose, Gerichtsurteile, Krankheitsdiagnose, Profiterwartungen u. a.) führt der Autor in *Kapitel 1* den Leser an grundlegende Begriffe und Denkweisen der Bayes-Theorie heran. Besonders gründlich wird ein Urnenexperiment betrachtet, das auch an späterer Stelle zur Explikation der Theorieelemente Verwendung findet. Bei dem Experiment wird eine von drei Urnen mit bekannten unterschiedlichen Anteilen gelber und grüner Erbsen ausgewählt. Auf der Grundlage genannter Ziehungsergebnisse soll jeder Urne eine Wahrscheinlichkeit für ihre Auswahl zugeordnet werden.

Der Begriff "Versuch oder Experiment" wird definiert als: "Verwirklichung eines Bedingungskomplexes C ..., der aus der Menge der den Versuch spezifizierenden Angaben besteht, und die Beobachtung eines Ergebnisses" (S. 11). Im Sinne der subjektivistischen Herangehensweise werden beobachtete und unbekannte Ereignisse unterschieden. Es wird vereinbart, "den Inhalt einer Hypothese, über den aufgrund der Beobachtungen ... eine Wahrscheinlichkeitsaussage gemacht werden soll, einen unbekanntem Zustand der Welt Θ " zu nennen (S. 13). Θ ist die Menge aller möglichen, sich gegenseitig ausschließenden Zustände θ_j .

Mit dieser Terminologie besteht das Hauptziel der Monographie in der mathematischen Beschreibung des induktiven Schlusses von beobachteten Ereignissen auf die Wahrscheinlichkeit möglicher Zustände, die hypothetische Ursachen für die Beobachtungsergebnisse sind.

Nach einer kurzen Diskussion objektivistischer und subjektivistischer Wahrscheinlichkeitsauffassungen bringt der Autor seinen Standpunkt bei der Erklärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes im *2. Kapitel* zum Ausdruck, indem er den Vergleich von Wahrscheinlichkeiten durch den Vergleich von Wetten definiert. Als Standardmaß gilt der Anteil weißer Kugeln in einer Urne.

Im *Kapitel 2 und 3* werden einige Elemente eines üblichen Wahrscheinlichkeitskurses in knapper Form behandelt, "nicht nur, um einen vollständigen Kurs vorzulegen, sondern auch, um ihren Stellenwert im Gesamtkonzept deutlich werden zu lassen" (S. X).

Im *Kapitel 4* erarbeitet der Verfasser am Beispiel des genannten Urnenexperimentes in sehr ausführlicher und verständlicher Weise das prinzipielle Vorgehen bei der Anwendung des Bayesschen Theorems, mit dem eine Priori-Verteilung $P(\theta_j)$ durch die Kenntnis von Beobachtungsdaten x zu einer Posteriori-Verteilung $P(\theta_j|x)$ verändert werden kann.

Mit zwei aus der Literatur bekannten Beispielen, dem Einsatz eines medizinischen Testes zur Diagnose einer seltenen Krankheit sowie einem Indizienurteil bei einem realen Mordfall (SCHRAGE/), wird die praktische Relevanz der Bayesschen Betrachtungsweise verdeutlicht. Die Diskussion eines solchen Diagnoseverfahrens ist von BOROVČNIK /1984/ aus Bayesscher Sicht jedoch noch vielseitiger diskutiert worden. Die Bayes-Analyse wird im *Kapitel 5* durch das Bayessche Prinzip vervollständigt, das die Auswahl der Handlung mit maximaler Gewinnerwartung bei gegebenen Gewinnfunktionen $g_i(\theta_j)$ beinhaltet. Damit kann in

der Bayes-Statistik zwischen "Einsicht gewinnen" und "Entscheiden" differenziert werden.

Im *Hauptkapitel 6* der Arbeit erweitert der Autor zunächst die Bayessche Methodik auf den Fall einer stetigen Welt Θ , die er dann im weiteren ausschließlich betrachtet.

Es ist sehr zu begrüßen, daß der Autor alle wesentlichen mathematischen Inhalte, die zunehmend anspruchsvoller werden, stets ausgehend von eingehend diskutierten, meist praxisbezogenen Problemstellungen behandelt. Die trägt sehr zur Erhöhung der Lesbarkeit des Buches und zum besseren Verständnis des prinzipiellen Vorgehens im Rahmen der Bayes-Statistik bei.

So führt die Erörterung eines Entscheidungsproblems bei der Annahme einer Schallplattenlieferung zu dem Begriff der Konjugiertheit von Verteilungen, womit das Problem der rechnerischen Ermittlung von Posteriori-Verteilungen wesentlich vereinfacht wird. Am Beispiel der β -Verteilung (der zur Binomialverteilung konjugierten Verteilung) wird als Analogon zum Konfidenzintervall der klassischen (objektivistischen) Statistik der γ -Bereich höchster Dichte (BHD $_{\gamma}$) definiert, in dem ein unbekannter Parameter θ aufgrund eines Stichprobenergebnisses mit der Wahrscheinlichkeit γ liegt.

Am Beispiel der Bewertung unterschiedlicher Handlungen des Regierenden Bürgermeisters von B, Herrn D., nach Kenntnis einer Schätzung der Wahrscheinlichkeit seines erneuten Wahlsieges, verallgemeinert Wickmann das Bayessche Prinzip der Entscheidungsfindung. Durch Einführung einer abstrakten Skala von Erstrebenwerten läßt sich eine Erstrebenwertfunktion definieren, die eine Maximierung des Erwartungswertes der Erstrebenwerte erlaubt.

Neben der Binomialverteilung wendet sich der Autor vor allem der Normalverteilung als Versuchsverteilung und als Näherung zur Binomial- und β -Verteilung zu. Nach der Herleitung des Grenzwertsatzes von de Moivre und Laplace sowie des Gesetzes der großen Zahlen setzt sich der Autor erneut mit einem rein frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff auseinander und bringt eine interessante Deutung des Bernouillischen Gesetzes. Nach seiner Auffassung enthält das Gesetz zwei Interpretationen von Wahrscheinlichkeit, die objektivistische in p und die induktive in P , eine vom Umfang n der Stichprobe und damit vom Kenntnisstand abhängige Wahrscheinlichkeit.

Die Betrachtungen zum Bayesschen Prinzip werden am Beispiel der Entscheidung eines Obst-Großhändlers über die Einkaufsmenge auf den Fall eines Kontinuums möglicher Handlungen ausgedehnt.

Nur kurz wird an zwei Beispielen das Testen von Hypothesen aus Bayesscher Sicht behandelt, bevor abschließend ein dreigeteiltes Glücksrad einer Bayes-Analyse unterzogen wird. Das Beispiel zeigt, wie mathematisch anspruchsvoll die Bewältigung mehrdimensionaler Probleme ist aber auch wie überraschend und einfach die Endresultate sein können. Ein schönes Beispiel für die Leistungsfähigkeit der Bayesschen Methode ist das in Ergänzung zu einer Lösung auf S. 193 entwickelte Verfahren zum Test eines Würfels in wenigen ($n=30$) Versuchen.

Im abschließenden 7. *Kapitel* des Buches setzt sich WICKMANN aus Sicht des subjektivistischen Standpunktes prinzipiell mit der klassischen (objektivistischen) Methodik der beurteilenden Statistik auseinander. Er führt folgende Hauptkritikpunkte an:

- 1) Im Ergebnis eines Signifikanztestes kommt es nicht zu einer "Entscheidung" für eine der Hypothesen, sondern (unter Verlassen der objektivistischen Position) zu einer Wahrscheinlichkeitsbewertung der Hypothesen, die zudem nicht quantifiziert und nicht ausreichend begründbar ist.
- 2) Da die Irrtumswahrscheinlichkeiten α und β bedingte Wahrscheinlichkeiten sind, impliziert jede Festlegung von α und β eine Bewertung der Hypothesen.
- 3) Es wird eine der Hypothesen (H_0) tendenziell bevorzugt, so daß vor Anwendung eines Signifikanztestes eine vorherige Bewertung zumindest aber ein "unsymmetrisches" Verhalten gegenüber den Hypothesen erforderlich ist.
- 4) Obwohl es in der Praxis häufig darum geht, zwei Intervallhypothesen gegeneinander zu testen, zwingt die Methodik eines Signifikanztestes zur Ersetzung einer der Intervallhypothesen durch eine (nicht sachgerechte) Punkthypothese.
- 5) Beim Schätzen von Parametern gibt die Sicherheitswahrscheinlichkeit nicht die, den Anwender eigentlich interessierende Wahrscheinlichkeit an, mit der der Parameter im berechneten Konfidenzintervall liegt, sondern lediglich die Wahrscheinlichkeit, mit der man ein Konfidenzintervall erhält, das den Parameter umschließt.

3. Stellungnahme zu ausgewählten Problemen

Da es sich bei dem Buch von WICKMANN nicht um ein "normales" Stochastiklehrbuch schlechthin handelt, sondern um eine Kampfansage an ganze Legionen von Stochastikbüchern, möchte ich mich in meinen Bemerkungen auf grundsätzliche Fragen beschränken.

Die Bedeutung und Stärke des Buches sehe ich in der geschlossenen, verständlichen und konsequenten Darstellung des subjektivistischen Zuganges zur Stochastik und seiner deutlichen Abgrenzung von der sogenannten "klassischen" Methodik. Der Gedanke der Gegenüberstellung und Auseinandersetzung durchzieht das ganze Buch und gipfelt im 7. Kapitel in sehr zugespitzten Formulierungen, was als richtig und falsch an-

zusehen ist.

Diese Stärke des Buches scheint mir aber auch gleichzeitig seine Schwäche zu sein. Man findet lediglich Ansätze einer ausgewogenen wissenschaftstheoretischen Betrachtung wie sie z.B. von STEINBRING und BOROVCNIK /1984a//1988/ in sehr tiefgehender Weise vorgenommen wurde. Es werden leider interessante Anregungen dieser Autoren, wie etwa der Vorschlag von BOROVCNIK /1986/, den Grundgedanken der Bayes-Statistik durch Darstellung der Regel in "odds"-Form inhaltlich verständlicher zu machen, nicht weitergeführt.

Es ist, meiner Meinung nach, weder historisch noch wissenschaftstheoretisch zu erwarten, daß sich eine der beiden gegensätzlichen Auffassungen von der Natur des Wahrscheinlichkeitsbegriffes als die "richtige" durchsetzen wird. Auch wenn sich beide Standpunkte weitgehend logisch ausschließen, sind sie sowohl in der Realität als auch im Bewußtsein der Menschen nicht voneinander zu trennen, wie sich auch der Dualismus des Lichtes logisch weder überwinden noch verstehen läßt.

Unvereinbar dürfte lediglich die Frage sein, welchen Aspekt man als den wesentlichen ansieht und als Grundlage und Ausgangspunkt seiner Betrachtungen wählt. Dies ist letztlich eine Frage der eigenen weltanschaulichen Position, die nicht durch ein Stochastikcurriculum vorentschieden werden sollte. Mit Blick auf den gegenwärtigen Stochastikunterricht kann dies allerdings nur heißen, dem subjektivistischen Aspekt des Wahrscheinlichkeitsbegriffes und der Bayes-Statistik wesentlich mehr Raum zu geben.

Bezüglich des Wahrscheinlichkeitsbegriffes geht es dabei meines Erachtens vor allem um die Beachtung der Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses vom Bedingungskomplex des Versuches, wozu WICKMANN auf S. 11 f. ein schönes Beispiel aus der Verhaltensforschung von Rotkehlchen anführt, sowie um die Anerkennung des hypothetischen Charakters von Wahrscheinlichkeitsangaben. Subjektive Wahrscheinlichkeiten sind nicht einfach als Zwischenstufen zu objektiven Wahrscheinlichkeiten oder als primäre Fehlintuitionen anzusehen, sondern spielen im wissenschaftlichen Erkenntnisprozeß, wie WICKMANN überzeugend nachweist, eine unverzichtbare Rolle.

Von der Bayes-Statistik geht der Reiz aus, dem man sich nach Hineindenken in das prinzipielle Herangehen kaum entziehen kann, damit eine Methodik zu besitzen, die dem eigentlichen Erkenntnisgang in empirische Wissenschaften weit besser entspricht, als die klassische Statistik. Ich kann jedoch WICKMANN nicht folgen, wenn er daraus den Schluß ableitet, letztere gänzlich zu verwerfen. Abgesehen davon, daß sich dies praktisch wohl kaum realisieren ließe, reichen die von ihm angeführten Argumente und Beispiele nicht aus, um die Notwendigkeit eines Abgehens von den klassischen Schätz- und Prüfverfahren zu erkennen. Die genannten Kritikpunkte bewegen sich weitgehend auf der begrifflichen und methodologischen Ebene, wobei gelegentlich der Eindruck eines mehr sophistischen Streits (etwa um den Begriff "Entscheidung") entsteht. Es ist eher RIEMER zuzustimmen, der sein Eintreten für die Bayessche Betrachtungsweise nicht als Plädoyer gegen die klassische Testtheorie versteht, sondern damit ein fundiertes Verständnis einer solchen Theorie entwickeln möchte (S. 49).

Der wesentliche Zugang zu dem umstrittenen Verhältnis scheint mir jedoch in einer Analyse der praktischen Konsequenzen der beiden Methodiken, also der Anwendung der beiden Methodiken, zu bestehen. Diesen Weg beschreitet auch STEINBRING. Leider beschränkt sich WICKMANN bei der Betrachtung seiner zahlreichen Beispiele bis auf wenige Ausnahmen auf die Darstellung einer Lösung nach dem Bayeschen Ansatz. Die erwähnten Ausnahmen belegen zudem oft nicht die praktische Überlegenheit der Bayes-Statistik, da sie entweder gekünstelt oder wenig strittig sind. So wird etwa kein Vertreter der klassischen Statistik auf die Idee kommen, einen Signifikanztest bezüglich einer außersinnlichen Wahrnehmungsfähigkeit durchzuführen, wenn ein betrunkenen Proband in 10 aufeinanderfolgenden Versuchen das Ergebnis eines Münzwurfes richtig vorausgesagt hat. (S. XI)

Keine der beiden Methodiken kann m.E. für sich den Anspruch erheben, universell einsetzbar zu sein. Anhand der Beispiele in WICKMANNs Buch läßt sich lediglich vermuten, wann ein Bayes-Ansatz günstiger ist. Es wäre im Sinne des Anliegens des Autors zu begrüßen gewesen, wenn der Leser Informationen über die Anwendungsgebiete der Bayes-Statistik erhalten hätte, wenn auf Probleme und Nachteile, aber auch entscheidende Vorzüge einer Bayes-Analyse aus praktischer Sicht näher eingegangen worden wäre. So ist z.B. von der Möglichkeit, Priori-Kenntnisse, die von der Gleichverteilung abweichen, numerisch zu verwenden, in keinem Beispiel Gebrauch gemacht worden. Dies hätte dem Anliegen, die Prinzipien einer Methodik zu vermitteln, durchaus entsprochen.

Das Buch ist im Vergleich mit mathematischen Fachbüchern durch seine gute stoffdidaktische Aufbereitung relativ leicht, im Vergleich mit fachdidaktischer Literatur jedoch nicht einfach zu bewältigen. Auch wenn sich der Autor insbesondere in den ersten Kapiteln um Beispiele und Erklärungen bemüht die in der Schule verwendbar sind, bleibt der größte Teil der Probleme, die sich bei einer Einführung der Bayes-Statistik in den Unterricht und einer damit verbundenen Veränderung der Konzeption eines Stochastikcurriculums ergeben, außerhalb der Diskussion. Der Autor weist im Vorwort selbst darauf hin, daß dies nicht Anliegen seiner Monographie ist, aber es wäre schon interessant gewesen, wenn er etwas mehr über die eigenen unterrichtspraktischen Erfahrungen sowohl in der Lehrerbildung als auch in dem von ihm durchgeführten Stochastik-Leistungskurs, mitgeteilt hätte. Lediglich in einer der didaktischen Anmerkungen vermittelt der Autor durch Wiedergabe eines Unterrichtsgespräches über den subjektivistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff einen Eindruck von den Schwierigkeiten, die bei der Umsetzung seines Konzeptes in der Schule auftreten können.

Ansonsten sind auch die "Didaktischen Anmerkungen" rein stoffdidaktischer Art und es bleibt dem Leser überlassen, den Sprung zur Schulwirklichkeit selbst zu vollziehen.

4. Schlußbemerkungen

Das Buch ist von seiner Anlage her geeignet, bereits Lehrerstudenten bei entsprechenden Begleitveranstaltungen einen Einblick in die Bayessche Statistik zu geben, ohne daß sie vorher die mathematische Statistik im klassischen Sinne studiert haben müssen. Es ist als eine gelungene Fortsetzung der Anregungen von DINGES zu werten, die Bayessche Regel entsprechend ihrer Bedeutung und den Ansprüchen in der Lehrerausbildung darzustellen.

Seinen besonderen Wert hat es aber für den Didaktiker und den unterrichtenden Lehrer, die es zwingt, gewohnte Denk- und Betrachtungsweisen kritisch zu prüfen, tiefer zu verstehen, anzureichern und zu revidieren. Die Bayessche Regel wird in den üblichen Stochastikkursen, wie bereits DINGES an Beispielen überzeugend nachweist, als eine reine Rechenregel behandelt. Den Schülern sollte jedoch die dahinterliegende Problematik deutlich gemacht werden, nämlich das Lernen aus Erfahrung quantitativ erfassen zu können.

Der bereitgestellte mathematische Apparat, insbesondere die im Anhang enthaltenen sehr nützlichen Pascal-Programme erlauben es, die angeschnittenen Problemkreise durch Variation der Daten und Bedingungen selbst weiter zu erforschen sowie bekannte Aufgaben auf eine andere Art zu lösen. Dies kann nach meiner eigener Erfahrung zu interessanten und auch überraschenden Ergebnissen und Einsichten führen, die die durch das Buch gewonnene Zuneigung zur Bayesschen Methodik weiter vertiefen.

5. Literatur

- Schrage, G.: Schwierigkeiten mit stochastischer Modellbildung - zwei Beispiele aus der Praxis. In: J. Math.-Didakt. 1(1980)1/2. S. 86 - 101
- Borovcnik, M. 1984: Der Problemkreis - BAYESSche Formel. In: Math. Didakt. 7(1984). S. 207 - 224
- Steinbring, H.: Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs: Das Anwendungsproblem in der Wahrscheinlichkeitstheorie aus didaktischer Sicht. Bielefeld: Universität Bielefeld 1980. IDM Materialien und Studien Band 18
- Borovcnik, M. 1984 a: Was bedeuten statistische Aussagen. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: B. G. Teubner, 1984. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 8
- Borovcnik, M. 1988: Zum wissenschaftstheoretischen Hintergrund der Rechtfertigung statistischer Methoden. In: Math. Didakt. 11(1988). S. 19 - 43
- Borovcnik, M. 1986: Anwendungen der Bayesschen Formel. In: Didakt. Math. 14(1986)3. S. 183 - 203
- Riemer, W.: Neue Ideen zur Stochastik. Mannheim, Wien, Zürich: BI 1985. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Bd. 3
- Dinges, H.: Schwierigkeiten mit der Bayesschen Regel. In: Math. Semesterber. 25(1978)1. S.113 - 156