

Zur Stochastikausbildung im Primarstufenlehramt **3**

Hans-Dieter Sill

Zusammenfassung

Der Beitrag beschäftigt sich mit einigen grundlegenden Problemen des Stochastikunterrichts in der Primarstufe. Es werden, soweit vorhanden, Module mit Inhalten aus der Stochastik an 14 ausgewählten lehrerbildenden Einrichtungen untersucht. Nach einer kritischen Betrachtung der KMK-Bildungsstandards zur Leitidee Daten und Zufall werden Besonderheiten des Stochastikunterrichts zusammengestellt. Anschließend werden Probleme diskutiert, die mit dem Zufallsbegriff zusammenhängen, insbesondere Probleme der Begriffe Zufallsexperiment, Zufallsversuch, Zufallsgerät und Zufallsgenerator. Im letzten Kapitel werden neue Vorschläge zur Verwendung und Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs unterbreitet.

3.1 Entstehung der Vorschläge

Die gemeinsame Kommission Lehrerbildung der Gesellschaften GDM, DMV, und MNU hat im Jahre 2008 Vorschläge für die fachliche und didaktische Ausbildung in den Lehrämtern für Grundschulen und weiterführende Schulen veröffentlicht. Diese Empfehlungen haben nach Einschätzung der Kommission in vielen Bundesländern und lehrerbildenden Einrichtungen Einfluss auf die Reformierung der Studiengänge gehabt. Auf Beratungen der Kommission in den Jahren 2011 und 2012 wurde über die Weiterentwicklung der Empfehlungen für den Grundschulbereich diskutiert. Im Mai 2012 beschloss die Kommission die Einrichtung einer Arbeitsgruppe zu diesem Zweck und empfahl als Handlungsfelder u. a. Erläuterungen zu den Empfehlungen im Sinne von Konkretisierung.

H.-D. Sill (✉)
Universität Rostock
Rostock, Deutschland
E-Mail: hans-dieter.sill@uni-rostock.de

gen, einen Sammelband mit Best-Practice-Beispielen, Entwürfe für Prüfungsordnungen sowie die Ausrichtung einer Tagung. Als Mitglied der Arbeitsgruppe hat sich der Autor insbesondere mit der Ausbildung auf dem Gebiet der Stochastik (unter Stochastik wird die Zusammenfassung der Disziplinen Beschreibende Statistik, Explorative Datenanalyse, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik verstanden) beschäftigt und dabei den Arbeitskreis Stochastik der GDM in die Entwicklung von curricularen Vorschlägen einbezogen.

Der Arbeitskreis hat in den Jahren 2001 und 2002 in Auswertung aller Pläne der Bundesländer einen Vorschlag für ein nationales Stochastikcurriculum für alle Schulstufen entwickelt (Arbeitskreis Stochastik der GDM 2003). Auf dieser Grundlage hat der Autor zusammen mit Rostocker Kollegen einen Vorschlag für Empfehlungen für Ziele und Inhalte der fachlichen Ausbildungen von Lehramtsstudierenden im Grundschulbereich erarbeitet, der auf den Empfehlungen des Arbeitskreises Stochastik für das Abschlussniveau in der Sekundarstufe I basiert. Dieser Vorschlag wurde auf zwei Arbeitskreissitzungen diskutiert, es gab dazu schriftlichen Stellungnahmen u. a. von Herrn Schupp und am 28.10.2012 beschloss der Arbeitskreis Stochastik die Annahme dieser Empfehlungen (s. Anhang).

3.2 Stochastikcurricula in der Lehrerbildung

Die Probleme in der Stochastikausbildung von Grundschullehrpersonen sind seit Langem bekannt. So stellen die Autoren eines Papiers zur Grundschullehrerausbildung für das Bildungsministerium in NRW im Jahre 1996 fest:

Eine Sonderrolle spielt die Stochastik. Hier ist trotz aller Vorstellungen der Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker eine weitgehende faktische Abstinenz auf allen Schulstufen zu konstatieren, und bei den Studierenden sind insgesamt so gut wie keine Voraussetzungen vorhanden. . . . Aber stochastisches Denken ist auch Teil der Allgemeinbildung, und seine Grundlagen sind in der Primarstufe zu legen bzw. zu pflegen. Daher benötigen Grundschullehramtsstudierende ein Mindestmaß an fachinhaltlichen (und fachdidaktischen) Kenntnissen in diesem Bereich (Bender et al. 1999, S. 308/309).

Eine ebenso kritische Situation bestand 1989 in den neuen Bundesländern. In der DDR gab es im Mathematikunterricht aller Schulstufen bis auf wenige Elemente der Beschreibenden Statistik keine stochastischen Inhalte und nur Lehrer für die Sekundarstufen erhielten eine fachliche stochastische Ausbildung und auch nur auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Standards der gemeinsamen Kommission enthalten folgende Vorschläge für die Fachausbildung im Primarstufenbereich (s. Tab. 3.1).

Mit diesen Vorschlägen werden wesentliche Inhalte umrissen und es wird ein geeigneter Rahmen abgesteckt. Hervorzuheben ist aus meiner Sicht der weitgehende Verzicht auf abstrakte Begriffe, die Betonung inhaltlicher Aspekte durch die Forderungen nach Auswertungen, Interpretationen, Argumentationen und Modellierungsbetrachtungen, die

Tab. 3.1 Kompetenzen im Bereich Stochastik in den Standards der Lehrerbildung. (Empfehlungen von DMV et al. 2008, S. 8)

Bereiche	Die Studierenden
Beschreibende Statistik/ Datenanalyse	– planen statistische Erhebungen (Befragung, Beobachtung oder Experiment), führen sie durch und werten sie aus – lesen und erstellen grafische Darstellungen für uni- und bivariate Daten (z. B. Kreuztabelle) und bewerten deren Eignung für die jeweilige Fragestellung – bestimmen und verwenden uni- und bivariate Kennwerte (z. B. Mittelwerte, Streumaße, Korrelationen, Indexwerte) und interpretieren sie angemessen
Zufallsmodellierung	– modellieren mehrstufige Zufallsversuche durch endliche Ergebnismengen und nutzen geeignete Darstellungen (Baumdiagramm, Mehrfeldertafel) – unterscheiden Wahrscheinlichkeitsaspekte (frequentistisch, axiomatisch usw.) und beschreiben typische Verständnisschwierigkeiten im Umgang mit dem Zufallsbegriff – rechnen und argumentieren mit Wahrscheinlichkeiten
Neue Medien	– verwenden Tabellenkalkulation und statistische Software zur Darstellung und explorativen Analyse von Daten – simulieren Zufallsversuche computergestützt

Vorschläge zum Einsatz von Datensoftware sowie das Ausklammern kombinatorischer Elemente, die eine eigenständige Rolle im Rahmen der Arithmetik spielen sollten.

Einige Formulierungen werfen allerdings Fragen auf, die einer genaueren Erläuterung und Diskussion bedürfen. Welche Mittelwerte, Streuungsmaße und Korrelationsmaße sind gemeint, was sind Probleme im Verständnis des Zufallsbegriffs oder was bedeutet Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten? Mehrfeldertafeln sind ein Mittel der Beschreibenden Statistik und sollten anstelle von Kreuztabellen genannt werden. Es bleibt auch zu fragen, warum das Ermitteln von Erwartungswerten nicht aufgenommen wurde. Eine Bearbeitung und Konkretisierung der Empfehlungen halte ich auch angesichts der noch zu beschreibenden Probleme in der Grundschoolliteratur für erforderlich.

Um einen Eindruck von der aktuellen Situation in der Lehrerbildung zu gewinnen, habe ich eine Stichprobe von Modulhandbüchern für die Grundschule an 14 lehrerbildenden Einrichtungen analysiert. Es handelt sich um folgende Einrichtungen: Uni Siegen, LMU München, PH Ludwigsburg, PH Heidelberg, PH Karlsruhe, Uni Regensburg, Uni Halle, TU Braunschweig, PH Weingarten, Uni Duisburg-Essen, Uni Koblenz-Landau, Uni Kassel, TU Dortmund, Uni Wuppertal. Die Auswahl erfolgte nach den Suchergebnissen von Google nach Eingabe von „Modulhandbuch Mathematik Grundschule“. Es handelt sich also um keine zufällige Auswahl, aber es könnten die aktuellsten Curricula der Lehrerbildung sein. Ich habe nur die Fachmodule bzw. kombinierte Module Fachdidaktik untersucht und erhielt folgende Ergebnisse.

- In drei Einrichtungen gibt es keine Module oder Inhalte zur Stochastik.
- In sechs Einrichtungen sind Inhalte zur Stochastik in anderen Modulen enthalten, in vier allerdings nur in sehr geringem Maße.

- Ein Extramodul zur Stochastik gab es nur in fünf der 14 Einrichtungen im Umfang von 2 bis 4 SWS, teilweise in Kombination mit der fachdidaktischen Ausbildung.

An der Universität Rostock gibt es erst seit dem Studienjahr 2012/13 Inhalte zur Stochastik, und zwar im Rahmen des Moduls „Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Grundschule 1“ im 1. Semester. Von den sechs Leistungspunkten werden etwa drei dafür verwendet. In Rostock wird weiterhin ein Fortbildungskurs für Grundschullehrkräfte entwickelt, der seit dem Schuljahr 2012/13 jährlich in drei bis vier Kursen erprobt wird. Die Kurse laufen im Blended-Learning-Design mit vier ganztägigen Präsenzveranstaltungen und drei Arbeitsphasen über ein Schuljahr. Bei beiden Veranstaltungskonzepten wollten wir primär die fachlichen Grundlagen des Stochastikunterrichts sichern und sind dabei von den Empfehlungen des AK Stochastik ausgegangen. Es zeigte sich aber sehr bald, dass diese in der gegebenen Zeit im vollen Umfang nicht zu realisieren sind, da nur sehr wenige Vorkenntnisse bei den Studierenden und Lehrkräften vorhanden waren und große Probleme im fachlichen Verständnis selbst bei einfachen Fragen auftauchten. Als notwendig erwies sich insbesondere in der Lehrerfortbildung ein möglichst enger Bezug zur Umsetzung der fachlichen Inhalte in der Schule. Im genannten Grundlagenmodul der Lehrerbildung ist dies aber nur in Ansätzen möglich. Als optimale Bedingung für die Lehrerbildung erscheint mir deshalb eine Kombination von fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Ausbildung, wie sie an der TU Dortmund im Umfang von 6 LP konzipiert ist.

3.3 Stochastikunterricht in der Primarstufe

3.3.1 Stochastik in zentralen Planungsdokumenten

Wie die Analyse des Arbeitskreises Stochastik zu den im Schuljahr 2001/02 gültigen Lehrpläne für die Primarstufe in allen Bundesländern gezeigt hat, waren nur in acht Plänen Elemente der Beschreibenden Statistik und nur in zwei Plänen Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthalten. Mit den Bildungsstandards für den Primarbereich von 2004 hat sich diese Situation grundlegend geändert. Eine Analyse aller Grundschullehrpläne der Bundesländer im Jahre 2012 (Kurtzmann und Sill 2012) ergab, dass alle Pläne Inhalte zur Beschreibenden Statistik und bis auf drei Bundesländer auch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung enthalten, wobei zwei dieser drei Pläne noch vor Beschluss der Bildungsstandards in Kraft gesetzt wurden. Die Grundschullehrkräfte in allen Bundesländern stehen also vor der Aufgabe der Integrationen neuer Inhalte in den Unterricht, auf die sie in ihrer Ausbildung nur in wenigen Fällen vorbereitet wurden und teilweise heute noch nicht werden. Viele der Pläne lehnen sich eng an die Bildungsstandards an und enthalten damit auch die Probleme der Standards, auf die im Folgenden eingegangen werden soll.

Es gab bereits vor dem Beschluss der Bildungsstandards zahlreiche Vorschläge zur Aufnahme von stochastischen Inhalten in die Primarstufe (Engel 1966; Varga 1972; Heitele 1976; Winter 1976; Müller und Wittmann 1977; Lindenau und Schindler 1977; Fisch-

Tab. 3.2 Inhalte der KMK-Bildungsstandards für die Primarstufe zur Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“. (KMK 2005)

Daten erfassen und darstellen	– in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen – aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen
Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen	– Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich) – Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen

bein et al. 1978; Bohrisch und Mirwald 1988). So wurden Konzepte für geeignete Inhalte und die Gestaltung des Unterrichts entwickelt und teilweise erprobt. Müller und Wittmann haben 1977 ein Curriculum für die Primarstufe konzipiert und einleitend festgestellt:

Nach dem Spiralprinzip ist es nicht sinnvoll, das Thema „Stochastik“ bis in die Sekundarstufe aufzuschieben. Die Kinder sollen vielmehr bereits in der Grundschule Gelegenheit erhalten, sich mit stochastischen Phänomenen ihres Erfahrungsbereiches auseinanderzusetzen dabei intuitive Ideen zum Ordnen, Beschreiben und Erklären stochastischer Phänomene zu erwerben (Müller und Wittmann 1977, S. 237).

Der Entwicklung der aktuellen Bildungsstandards erfolgte in einer kleinen Gruppe aus je einem Vertreter eines Bundeslandes in einer vorgegebenen, sehr kurzen Zeit. Es wurden keine fachlichen oder fachdidaktischen Experten einbezogen und es gab auch keine Diskussion der Standards in der Lehrerschaft und der Fachdidaktik. So ist es nicht verwunderlich, dass die Standards eine Reihe von Problemen enthalten, die leider auch einen ungünstigen Einfluss auf die weitere Entwicklung in der Primarstufe genommen haben (siehe Tab. 3.2).

Die Probleme beginnen bei einigen begrifflichen Fragen. So bleibt offen, welche Rolle der Begriff „Häufigkeit“ spielen soll, der in der Bezeichnung der Leitidee, aber nicht in den ihr zugeordneten inhaltsbezogenen Kompetenzen auftritt. Die Wörter „Diagramm“ und „Schaubild“ werden üblicherweise synonym verwendet. Die Wörter „sicher“, „unmöglich“ und „wahrscheinlich“ sind für sich genommen keine Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeit und Gewinnchancen bleiben unklar. Außerdem gehören die Begriffe „Ereignis“ und „Zufallsexperiment“ zur Ebene der theoretischen Modelle, die in der Primarstufe noch nicht erreicht werden kann. Auf einige der Probleme wird im Folgenden noch eingegangen.

Schwerwiegender ist aber, dass mit den Standards implizit eine einseitige Hervorhebung von Vorgängen im Glücksspielbereich erfolgt. Analysen von aktuellen Lehrbüchern, Unterrichtsmaterialien sowie Publikationen zur Fachdidaktik der Primarstufe bestätigen diese Vermutung. So ergab eine Analyse von 52 fachdidaktischen Publikationen, die nach 2004 erschienen sind, dass beim Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten bis auf sehr we-

nige Ausnahmen eine ausschließliche Beschränkung auf Vorgänge, bei denen Objekte geworfen, Glücksräder gedreht, Karten gezogen oder aus Behältern bzw. Beuteln Objekte zufällig ausgewählt werden.

Auch als eine Folge dieser einseitigen Ausrichtungen zeigten sich in der Literatur viele fachliche Überhöhungen, fehlende Bezüge zum Arbeiten mit Daten und leider auch viele fachlich bedenkliche Aussagen.

Eine Neubesinnung und Weiterentwicklung der Bildungsstandards ist aus meiner Sicht dringend erforderlich. Die aktuelle Entwicklung des Stochastikunterrichts weist Parallelen mit der Entwicklung des propädeutischen Geometrieunterrichts in der Primarstufe auf, der sich auch erst in einem längeren Prozess herausgeformt hat.

3.3.2 Besonderheiten eines Stochastikunterrichts

Nach Schupp (1979) sollte Stochastikunterricht in der Primarstufe durch folgende Leitprinzipien gekennzeichnet sein.

Problem- und adressatenorientierte [...] Sequenzierung der Inhalte. Heranziehen praxisnaher Sachverhalte aus der Umwelt des Schülers. Möglichst frühe und intensive Verschränkung wahrscheinlichkeitstheoretischer und statistischer Betrachtungen (Schupp 1979, S. 300).

Davon ausgehend haben wir unseren Kurskonzepten folgende Prinzipien der Unterrichtsgestaltung zugrunde gelegt, die auf einer Sitzung des Arbeitskreises Stochastik der GDM vorgestellt wurden und Zustimmung fanden.

- Der Unterricht bewegt sich im Wesentlichen auf der Ebene der Phänomene, also realer Vorgänge.
- Es erfolgt keine explizite Formalisierung durch Begriffe bzw. Modelle wie Zufallsexperiment, Ereignis, Urne u. a. Es werden vor allem inhaltliche Vorstellungen und Prototypen zu wesentlichen Inhalten des Stochastikunterrichts in der Sekundarstufe I vermittelt.
- Das Wissen und Können im Anfertigen und Lesen grafischer Darstellungen wird vor allem im Rahmen des Sachrechnens und im Sachkundeunterricht gefestigt.
- Bei Betrachtungen zur Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen werden neben Vorgängen aus dem Bereich der Glücksspiele vor allem Vorgänge in der Natur und dem Alltag untersucht.

Zu den inhaltlichen Besonderheiten des Stochastikunterrichts in der Primarstufe gehört, dass auch bei elementaren Sachverhalten oft sehr anspruchsvolle Aufgabenstellungen möglich sind, wie die folgenden Fragestellungen zeigen, die beim Würfeln mit einem Würfel auftreten können.

- Es wurde schon 10-mal nacheinander keine 6 geworfen. Ist beim 11. Wurf die Wahrscheinlichkeit für eine 6 größer als bisher, da ja alle Würfelergebnisse etwa gleich oft auftreten müssen? Dieses Problem hat in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst Mathematikern Kopfzerbrechen bereitet. Aufgrund der Unabhängigkeit der einzelnen Würfe ist die Wahrscheinlichkeit für eine 6 auch beim 11. Wurf genauso groß wie vorher.
- Wie lange muss man im Durchschnitt auf die erste 6 warten, theoretisch könnte dies ja unendlich lange dauern? Zur Lösung des Problems kann der Erwartungswert einer geometrischen Verteilung berechnet werden, bei dem es sich um eine unendliche Reihe handelt, die den Grenzwert 6 hat. Im Durchschnitt ist jeder 6. Wurf also eine 6.
- Wie lange muss ich im Durchschnitt würfeln, bis alle Augenzahlen mindestens einmal aufgetreten sind? Der Erwartungswert für die mittlere Wurfzahl, der u. a. mit den Mittelwertregeln berechnet werden kann, beträgt 14,7.
- Nach 60 Würfen stellt man fest, dass man 19-mal eine 6 bekommen hat. Ist der Würfel in Ordnung? Zur Beantwortung dieser Frage muss ein Chi-Quadrat-Anpassungstest durchgeführt werden, aus dem sich ergibt, dass die Hypothese einer Gleichverteilung bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % nicht abgelehnt werden kann.

Die Beispiele zeigen, auf welche fachlichen Schwierigkeiten Grundschullehrkräfte stoßen können, wenn sie sich intensiver mit den Phänomenen rund um das in der Schule heute weit verbreitete Würfeln beschäftigen. Nicht nur aus diesem Grund sehen wir die aktuelle Dominanz der Glücksspielsituationen im Stochastikunterricht in der Primarstufe sehr kritisch und plädieren für andere Anwendungsbereiche zum Umgang mit Wahrscheinlichkeiten, die weiter unten vorgestellt werden.

Im Folgenden sollen eine Reihe von Problemen diskutiert werden, die in fachdidaktischer Literatur und in Schullehrbüchern der Primarstufe zu finden sind. Neben kritischen Bemerkungen werden auch konstruktive Vorschläge, allerdings oft nur in Ansätzen, unterbreitet. Die Ausführungen sollen zur Diskussion grundlegender Begriffe und Vorstellungen beitragen, die im Stochastikunterricht der Primarstufe ausgebildet werden sollten und damit Gegenstand der Lehreraus- und -fortbildung sein müssten.

3.4 Bemerkungen zu Problemen, die mit dem Zufallsbegriff verbunden sind

3.4.1 Zur Verwendung der Wörter „Zufall“ und „zufällig“ in der Umgangssprache und der Mathematik

In vielen Unterrichtsmaterialien und Publikationen zum Stochastikunterricht treten die Wörter „Zufall“ bzw. „zufällig“ einzeln oder in Wortkombinationen auf. So wird zum Beispiel oft gesagt, dass sich die Stochastik mit Zufallserscheinungen beschäftigt. Aufgrund der großen Vielfalt der Bedeutungen des Zufallsbegriffs im Alltag und auch in der

Mathematik, die im Folgenden angerissen werden sollen, ist seine Verwendung im Unterricht aber problematisch.

Die in der Umgangssprache auftretenden Bedeutungen gehören oft auch schon zum Sprachgebrauch von Schülerinnen und Schüler in der Primarstufe. Dabei geht es sowohl darum, was als Zufall bzw. zufällig bezeichnet wird, aber auch darum, was nicht als Zufall bzw. nicht als zufällig angesehen wird. Man kann u. a. folgende Bedeutungen unterscheiden.

1. Man spricht vom Zufall, wenn etwas eingetreten ist, das sehr selten vorkommt.
2. Man spricht vom Zufall, wenn etwas überraschend eingetreten ist, was nicht zu erwarten war.
3. Man spricht vom Zufall, wenn es mehrere Möglichkeiten gibt, die gleichwahrscheinlich sind.
4. Etwas, was man mit großer Wahrscheinlichkeit erwarten kann, wird nicht als zufällig bezeichnet.
5. Wenn etwas eingetreten ist, das man nicht vorhersehen konnte oder nicht beeinflussen kann, so wird es als zufällig bezeichnet.
6. Wenn etwas eingetreten ist, das man beeinflussen kann oder man Ursachen für das eingetretene Ergebnis kennt, wird es nicht als zufällig bezeichnet.

Zu den stochastischen Situationen, die im Unterricht betrachtet werden sollten, gehören z. B. der Weitsprung eines Schülers, das Schreiben einer Mathematikarbeit oder das Wachstum einer Kressepflanze. Bei diesen Situationen kann die Verwendung des Wortes „zufällig“ aufgrund der genannten Bedeutungsvielfalt zu Vorstellungen führen, die nicht dem eigentlichen Sachverhalt entsprechen und ist deshalb nicht angebracht.

In der Mathematik treten die Wörter „Zufall“ und „zufällig“ bei den Fachbegriffen zufällige Auswahl, Zufallszahlen und Zufallsstichprobe auf, die auch Gegenstand des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I sind. Die Verwendung dieser Begriffe entspricht den genannten umgangssprachlichen Verwendungen (3), (5) und (6).

3.4.2 Zur Verwendung von „Zufallsexperiment“ bzw. „Zufallsversuch“

Die Begriffe „Zufallsexperiment“ bzw. „Zufallsversuch“ werden oft fälschlicherweise als Fachbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung angesehen. Sie sind aber zum theoretischen Aufbau dieser Wissenschaft nicht erforderlich und werden deshalb auch in vielen Fachbüchern nicht verwendet. Wenn dies trotzdem geschieht, handelt es sich um Begriffe auf der theoretischen Ebene, mit denen Vorgänge in zahlreichen Anwendungsbereichen, wie in der Medizin, der Landwirtschaft, der Technik, der Soziologie und weiteren Wissenschaften modellhaft erfasst werden sollen. In Schullehrbüchern, insbesondere in der Grundschule werden als Zufallsexperiment oder Zufallsversuch meist nur Beispiele aus

dem Glücksspielbereich bezeichnet. Damit entsteht ein sehr einseitiges Bild bei den Lernenden, Stochastik heißt für viele, es wird gewürfelt.

Hinzu kommt, dass in der Regel keine Unterscheidung zwischen realen Vorgängen und ihrer mathematischen Modellierung erfolgt. Diese Vermischung von realem Vorgang und seiner modellhaften Beschreibung, die man auch oft in der Sekundarstufe I findet, ist kontraproduktiv für das Grundverständnis stochastischer Begriffe.

Gegen die Verwendung der Bezeichnung „Zufallsexperiment“ spricht weiterhin, dass es sich dabei nicht um eine besondere Form eines Experimentes handelt. Der Begriff Experiment hat in den Naturwissenschaften einen klar umrissenen Inhalt. Experimente werden von Individuen geplant, durchgeführt und ausgewertet. Experimente dienen zur Überprüfung von wissenschaftlichen Hypothesen. Diese Eigenschaften haben Erscheinungen, die mit dem Begriff Zufallsexperiment bezeichnet werden, in der Regel nicht. In der Stochastik werden meist Vorgänge betrachtet, die man nicht als Experimente bezeichnen kann. Auch wenn die Kinder in der Grundschule noch nicht mit dem Wort Experiment vertraut sind, werden bei Verwendung des Wortes „Zufallsexperiment“ fehlerhafte Vorstellungen für die künftige Entwicklung des Begriffes Experiment aufgebaut.

Und schließlich sprechen auch die zahlreichen und teilweise gegensätzlichen Bedeutungen des Wortes „Zufall“ in der Umgangssprache gegen das Wort „Zufallsexperiment“, da sie zu fehlerhaften Vorstellungen führen können.

Teilweise findet man in der Literatur eine Unterscheidung der Wörter „Zufallsversuch“ (als ein einmaliger Vorgang) und „Zufallsexperiment“ (als wiederholter Vorgang unter gleichen Bedingungen). Eine solche Unterscheidung ist in der fachwissenschaftlichen Literatur nicht üblich und in den Naturwissenschaften werden die Begriffe Versuch und Experiment in der Regel synonym verwendet.

Anstelle des Begriffs „Zufallsexperiment“ sollte in der Primarstufe von Vorgängen mit mehreren möglichen Ergebnissen in Bezug auf ein Merkmal gesprochen werden. Dies ist ein Bestandteil einer Prozessbetrachtung stochastischer Erscheinungen, deren Kernelemente im Punkt 1 der Empfehlungen des Arbeitskreises Stochastik umrissen (s. Anhang) und ausführlich bei Sill (2010) dargestellt werden.

3.4.3 Zu den Wörtern „Zufallsgerät“ und „Zufallsgenerator“

Der Begriff „Zufallsgerät“, der ebenfalls kein Fachbegriff der Stochastik ist, wird in der Literatur meist für reale Dinge verwendet. Es werden dabei „symmetrische“ Zufallsgeräte mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen wie Würfel, Münze, Glücksrad oder Urne und „asymmetrische“ Zufallsgeräte mit nicht gleichwahrscheinlichen Ergebnissen unterschieden. Als asymmetrische Zufallsgeräte werden u. a. angegeben: Reißzwecken, Kronkorken, Quader und sogar auch Nutella-Brote. Analog zum Begriff „Zufallsexperiment“ erfolgt bei den symmetrischen Zufallsgeräten meist keine Unterscheidung zwischen den realen Objekten und ihren gedanklichen Modellen. Bei einem realen Würfel sind die Augenzahlen keineswegs gleichwahrscheinlich, er kann vom Tisch fallen oder „auf Kippe“ liegen.

Ich halte es für günstiger, nicht von „Zufallsgeräten“ zu sprechen, wenn man die realen Objekte meint. Man kann sie direkt als Würfel, Münze usw. bezeichnen oder als Oberbegriff das Wort „Spielgeräte“ verwenden. Wenn von einem Würfel als „Zufallsgerät“ gesprochen wird, sollte damit ein idealer Würfel gemeint sein, bei dem alle Seiten die gleiche Wahrscheinlichkeit haben und beim Werfen stets genau eine Seite oben liegt. Ein solcher idealer Würfel kann auch als Laplace-Würfel bezeichnet werden. Mit diesen Sprechweisen ist eine bessere Verständigung im Unterricht möglich, wenn man Realität und Modell unterscheiden will.

Oft werden die Begriffe „Zufallsgerät“ und „Zufallsgenerator“ synonym verwendet. Dies ist aber nicht günstig, da der Begriff „Zufallsgenerator“ in der Fachwissenschaft und in Anwendungsgebieten als Abkürzung für Zufallszahlengenerator verwendet wird. Damit bezeichnet man Verfahren, mit denen Zufallszahlen erzeugt werden können. Man kann physikalische Zufallszahlengeneratoren und auf mathematischen Algorithmen beruhende Pseudozufallszahlengeneratoren unterscheiden. In dieser Bedeutung sollte der Begriff „Zufallsgenerator“ auch im Stochastikunterricht verwendet werden und gehört damit zum Themenkreis der Simulation.

3.4.4 Zu den Begriffen „Ereignis“ und „zufälliges Ereignis“

In Unterrichtsvorschlägen wird teilweise das Ziel verfolgt, Schülern die Begriffe Ergebnis, Ergebnismenge und Ereignis zu vermitteln. In der Fachwissenschaft wird zum axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein nicht definierbarer Grundbegriff benötigt, der eine Verallgemeinerung der in der Realität vorhandenen möglichen Ergebnisse eines Vorgangs bzw. der Menge dieser Ergebnisse darstellt. Dazu gibt es in der Fachliteratur unterschiedliche Bezeichnungen, wie Ergebnis, zufälliges Ereignis, Elementarereignis oder atomares Ereignis. Man kann also zunächst feststellen, dass die Wörter „Ergebnis“ und „Ereignis“ in der Fachwissenschaft nicht einheitlich verwendet und auch nicht explizit definiert werden. Die Menge aller Ergebnisse (oder zufälligen Ereignisse, Elementarereignisse, ...), die alternativ zur Bezeichnung der Ergebnisse als nicht definierbarer Grundbegriff angesehen werden kann, wird z. B. Ergebnismenge, Menge der Elementarereignisse, Ereignisraum, Grundmenge oder Grundraum genannt. Im weiteren Aufbau der Theorie wird dann eine Menge von Teilmengen der Ergebnismenge (Ereignisraum, Grundmenge, ...) mit einer bestimmten Struktur gebildet und z. B. als Ereignisfeld oder Ereignisalgebra bezeichnet. Im Fall endlicher oder abzählbar unendlicher Ergebnismengen wird die Menge aller Teilmengen (die Potenzmenge) der Ergebnismenge verwendet. Ein Element des Ereignisfeldes wird dann meist als Ereignis oder zufälliges Ereignis bezeichnet.

Im Zusammenhang mit den Begriffen „Ergebnis“ und „Ereignis“ findet man in der Literatur teilweise unübliche und missverständliche Formulierungen wie etwa: „Ein Ereignis tritt ein, wenn der Ausgang des Versuchs die Bedingungen des Ereignisses erfüllt.“ oder „Die Kinder sollen erfahren und erkennen, dass es zufällige Ereignisse gibt, deren

Ausgang nicht angegeben werden kann ...“ Mit diesen unüblichen Formulierungen wird der Unterschied von dem was abläuft (der Vorgang) und dem was nach Ablauf des Vorgangs eingetreten ist (das Ergebnis) nicht deutlich. Auch solche Wortschöpfungen wie „Zufallsergebnis“ oder „Ergebnisse zufälliger Ereignisse“ sind nicht sinnvoll.

Unter dem Wort „Ereignis“ wird heute allgemein ein besonderer, nicht alltäglicher Vorgang, ein Vorfall oder ein Geschehnis verstanden. Deshalb kann es zu Verständnisschwierigkeiten kommen, wenn im Stochastikunterricht von „Ereignissen“ für ganz alltägliche Vorkommnisse wie das Ergebnis von Münzwürfen gesprochen wird.

Aus all diesen Gründen sollte im Stochastikunterricht der Primarstufe auf den Fachbegriff „Ereignis“ verzichtet und nur von „Ergebnissen“ gesprochen werden. Bei einer Prozessbetrachtung werden mögliche Ergebnisse eines Vorgangs immer nur in Bezug auf ein interessierendes Merkmal angegeben. So kann z. B. beim Werfen eines Würfels das Merkmal betrachtet werden, dass eine gerade Zahl gewürfelt wird. Die dazugehörigen Ergebnisse lauten dann „Es wurde eine gerade Zahl gewürfelt“ und „Es wurde keine gerade Zahl gewürfelt“.

3.5 Bemerkungen zu Problemen, die mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff verbunden sind

3.5.1 Zu den Wörtern „unmöglich“ und „sicher“

Wie schon in den Bildungsstandards werden die Wörter „unmöglich“, und „sicher“ (für sich genommen) in fälschlicher Weise als Grundbegriffe der Stochastik bezeichnet. In der Fachwissenschaft gibt es lediglich die Begriffe unmögliches Ereignis bzw. sicheres Ereignis für Ereignisse mit der Wahrscheinlichkeit 0 bzw. 1. Ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 0 ist dabei nicht unmöglich, sondern kann durchaus eintreten. Ein Beispiel ist, dass beim Drehen eines Glücksrades der Zeiger genau auf der Grenze zwischen zwei Feldern zu stehen kommt. Solche Betrachtungen, in denen es um überabzählbare Ergebnismengen geht, in diesem Fall um geometrische Wahrscheinlichkeiten, können kein Gegenstand des Primarstufenunterrichts sein. Die Wörter „unmöglich“ und „sicher“ sollten immer im Zusammenhang mit der Beschreibung der Wahrscheinlichkeit von möglichen Ergebnissen eines Vorgangs verwendet werden.

Teilweise wird das Wort „sicher“ mit „wahr“ und das Wort „unmöglich“ mit „falsch“ interpretiert. Neben wahren und falschen Aussagen gäbe es Aussagen, deren Wahrheitsgehalt man noch nicht einschätzen kann, welche aber mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit jedoch zu wahren Aussagen werden können. Diese Konnotationen der Wörter sind nicht sinnvoll, da zum Beispiel auch die Aussagen „Das Ergebnis ist unmöglich“ oder „Die Chancen für das Ergebnis stehen 1 : 1.“ wahr sein können.

In der gesichteten Literatur wurden oft nicht die durchaus möglichen Abstufungen der adverbialen Bestimmungen „unmöglich“ bzw. „sicher“ betrachtet. Es ist durchaus sinnvoll, bereits in der Grundschule entsprechend dem üblichen Sprachgebrauch der Kinder

z. B. davon zu sprechen, dass ein Ergebnis ziemlich sicher, fast sicher, sehr sicher oder ganz sicher ist. Analog kann ein Ergebnis auch fast unmöglich oder völlig unmöglich sein.

3.5.2 Zur Ausbildung des Begriffs „Wahrscheinlichkeit“

Zu den Wörtern „wahrscheinlich“ und „Wahrscheinlichkeit“

Das Wort „wahrscheinlich“ ist kein Fachbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Man spricht nicht davon, dass ein Ereignis wahrscheinlich ist, sondern dass es eine bestimmte Wahrscheinlichkeit hat. In der Umgangssprache wird das Wort „wahrscheinlich“ in der Bedeutung von „mit ziemlicher Sicherheit“, also im Sinne von „sehr wahrscheinlich“ verwendet (Ich werde wahrscheinlich morgen kommen heißt, dass ich ziemlich sicher morgen komme.). Deshalb ist es fachlich und umgangssprachlich nicht korrekt, wenn auf einer Wahrscheinlichkeitsskala alle Wahrscheinlichkeiten zwischen 0 und 1 mit dem Wort „wahrscheinlich“ verbalisiert werden. Wenn erste Aussagen zur Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen formuliert werden, sollte aber an die umgangssprachliche Bedeutung von „wahrscheinlich“ durchaus angeknüpft werden, um die mathematischen Bedeutungen in die vorhandenen Vorstellungen und sprachlichen Formulierungen im Alltag einzubetten.

Das Wort „Wahrscheinlichkeit“ ist nach unseren Erfahrungen auch bereits im Sprachgebrauch einiger Kinder enthalten. Sie können durchaus mit der Formulierung etwas anfangen, dass eine Wahrscheinlichkeit groß oder klein ist. Aus fachlicher Sicht ist der Begriff Wahrscheinlichkeit ein Grundbegriff im axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das bedeutet, dass er nicht mit mathematischen Mitteln definiert werden kann. Um bei den Schülern einen Wahrscheinlichkeitsbegriff auszubilden, der mit seinen Bedeutungen und Anwendungen in den Wissenschaften vereinbar ist, muss ein längerer Entwicklungsprozess über mehrere Phasen konzipiert werden.

Ziel des Entwicklungsprozesses ist es, ein umfangreiches Netz von Gedanken und Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff auszubilden. Dazu sind unterschiedliche Formulierungen und Kontexte erforderlich. In der Primarstufe sollten keine Formulierungen und Gedankengänge verwendet werden, die mit denen in späteren Entwicklungsphasen nicht verträglich sind.

Ein in der Grundschoolliteratur häufig auftretender Begriff ist der der Eintrittswahrscheinlichkeit, der oft synonym zum Begriff „Wahrscheinlichkeit“ verwendet wird. Obwohl als Kurzfassung für die Formulierung „Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ergebnisses“ der Begriff Eintrittswahrscheinlichkeit durchaus naheliegend ist, sollte er aus folgenden Gründen trotzdem vermieden werden. Es handelt sich um keinen Fachbegriff und auch in der Sekundarstufe wird dieser Begriff in der Regel nicht verwendet. Aus inhaltlicher Sicht geht es in der Stochastik nicht nur um die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines (künftigen) Ereignisses, sondern auch um die Wahrscheinlichkeit für ein bereits eingetretenes Ereignis.

Die Wahrscheinlichkeit für ein künftiges Ereignis kann aus Sicht einer Person als Grad der Sicherheit interpretiert werden, mit der die Person das Eintreten des Ereignisses erwarten kann. Dies ist sicher gemeint, wenn von „Eintrittserwartung eines Ereignisses“ gesprochen wird, aber auch dies sollte nicht verabsolutiert werden. Wahrscheinlichkeiten existieren auch objektiv, das heißt unabhängig von der Einschätzung einer Person.

Wahrscheinlichkeitsaussagen als Vorhersagen künftiger Ergebnisse

Die Interpretation einer Wahrscheinlichkeit als subjektives Erwartungsgefühl für das Eintreten eines möglichen Ergebnisses beim künftigen Verlauf eines Vorgangs kann der Ausgangspunkt für die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs beim Kinde sein. Als Vorgänge aus der Erfahrungswelt von Schülerinnen und Schülern, bei denen sinnvolle Vorhersagen künftiger Ergebnisse möglich wären, sind u. a. die Wetterentwicklung, Vorgänge im persönlichen Leben oder in der Klasse geeignet. Mögliche Aufgabenstellungen für Vorhersagen mit Wahrscheinlichkeitscharakter sind:

- Welches Wetter werden wir wahrscheinlich morgen haben?
- Wie lange brauchst du heute wahrscheinlich für deine Hausaufgaben?
- Wie viele Kinder werden morgen wahrscheinlich in der Klasse sein?

Dabei sollte dann herausgestellt werden, dass „wahrscheinlich“ gleichbedeutend zu „sehr wahrscheinlich“ ist. Die Vorhersagen der Kinder hängen von den Informationen und Kenntnissen ab, die sie zu den betreffenden Vorgängen haben. Wenn zum Beispiel ein Kind den Wetterbericht gehört hat, kann es genau nur Vorhersagen für das morgige Wetter machen. Bei der Prognose der benötigten Zeit für die Hausaufgaben hat die Fähigkeit zur Selbsteinschätzung und zur Einschätzung der Anforderung der Aufgaben Einfluss auf die genannte Zeit, die das Kind für am wahrscheinlichsten hält. Auch bei der Vorhersage der wahrscheinlichen Anzahl der Kinder am nächsten Tag können Kenntnisse über einzelne Mitschüler die Antworten beeinflussen. Die Kinder können bei diesem Einstieg erleben, dass Vorhersagen meist unsicher sind, man dies mit dem Wort „wahrscheinlich“ ausdrücken kann und man oft angeben kann, was die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses beeinflusst.

Vergleichen der Wahrscheinlichkeit zweier Ergebnisse

Nach dem Anknüpfen an die umgangssprachliche Verwendung des Wortes „wahrscheinlich“ kann gefragt werden, welches von zwei möglichen Ergebnissen „wahrscheinlicher“ ist. Damit wird in einer weiteren Phase der Ausbildung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sein komparativer Aspekt angesprochen. Zum Vergleich der Wahrscheinlichkeit von zwei Ergebnissen gibt es u. a. folgenden Möglichkeiten.

1. Vorstellen des künftigen Verlaufs eines Vorgangs, der den Schüler betrifft

Beispiel

Du machst einen Weitsprung. Was ist wahrscheinlicher?

A: Du kommst über 2 m.

B: Du kommst nicht über 2 m.

2. Anwenden von Kenntnissen aus dem Alltag

Beispiel

Alle Schüler singen ein Lied für dich. Was ist wahrscheinlicher?

A: Alle singen ein Geburtstagslied.

B: Alle singen ein Weihnachtslied.

3. Schlüsse aus Daten zum Umfeld der Schüler

Beispiel

Im Kunstunterricht der Klasse 2b wurde eine Umfrage zur Lieblingsfarbe in der Klasse gemacht, deren Ergebnisse den Schülerinnen und Schülern bekannt sind. Die Kunstlehrerin will der Mathelehrerin der Klasse 2b die Lieblingsfarbe der Schülerinnen und Schüler mitteilen. Welche Aussage von ihr ist wahrscheinlicher?

A: Die Lieblingsfarbe in der 2b ist rot.

B: Die Lieblingsfarbe in der 2b ist blau.

Verbale Schätzung von Wahrscheinlichkeiten

In einer nächsten Phase der Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sollte man das Arbeiten mit einer Wahrscheinlichkeitsskala einführen. Spätestens an dieser Stelle muss das Wort „Wahrscheinlichkeit“ im Unterricht verwendet werden. Durch das Arbeiten mit der Skala wird eine anschauliche und erweiterbare Vorstellung vom Wahrscheinlichkeitsbegriff ausgebildet. Dazu gibt es in der Literatur zahlreiche Vorschläge, die aber teilweise mit Problemen verbunden sind, die vor allem die Skalierung betreffen. Man findet folgende Vorschläge in der Literatur:

- Es wird als Begriff für das ganze (offene) Intervall die Bezeichnung „wahrscheinlich (möglich)“ verwendet. Dies ist aufgrund der Bedeutungen des Wortes „wahrscheinlich“ nicht sinnvoll.
- Für die Teilintervalle von größer 0 bis unter 0,5 und über 0,5 bis unter 1 werden die Bezeichnungen „weniger wahrscheinlich“ und „eher wahrscheinlich“ verwendet. Dies ist als erste Annäherung an qualitative Wahrscheinlichkeitsangaben durchaus geeignet.

- Es werden drei Teilintervalle mit den Bezeichnungen „wahrscheinlich“, „unwahrscheinlich“ und „möglich“ verwendet. Dabei tritt das Problem auf, dass Ergebnisse, die wahrscheinlich oder unwahrscheinlich sind, auch als möglich bezeichnet werden können.
- Mit den verbalen Beschreibungen kleine, mittlere und große Wahrscheinlichkeit kann die Wahrscheinlichkeitsskala in annähernd drei gleich große eingeteilt werden.

Ein besonderes Problem ist die Bezeichnung des Mittelpunktes der Skala. Es ist in vielen Fällen sinnvoll, diesen Punkt zu beschriften, um die öfter auftretende Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, etwa beim Wurf einer Münze, darstellen zu können. Zur Bezeichnung dieses Punktes sind Wörter wie „möglich“ oder „wahrscheinlich“ nicht geeignet, da sie ein bestimmtes Intervall angeben.

Eine Möglichkeit ist die Angabe der Chancen für das Ergebnis in der Form 1 : 1 oder, wie es auch durchaus üblich ist mit „fifty-fifty“. Da viele Schülerinnen und Schüler bereits den Prozentbegriff aus dem Alltag kennen, ist auch eine Bezeichnung mit 50 % bzw. 50 %ige Wahrscheinlichkeit möglich. In Worten kann die Wahrscheinlichkeit auch so ausgedrückt werden: „Die Chancen für das Eintreten oder Nichteintreten des Ereignisses sind gleich groß.“

Eine enaktive Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsskala ist in einfacher Weise mit einem Schülerlineal möglich, das in vertikaler Lage gehalten wird und auf dem die Wahrscheinlichkeiten zum Beispiel mithilfe einer Wäscheklammer markiert werden. Zu einem schnellen Vergleich der Ergebnisse in der Klasse können die Lineale hochgehalten werden. Es sollte beachtet werden, dass die auf dem Lineal vorhandene Skala bei der Markierung von Wahrscheinlichkeiten nicht beachtet wird, da der Nullpunkt der Skala auf dem Lineal oft nicht am Anfang des Lineals beginnt und je nachdem wie das Lineal gehalten wird, die Zentimeterskala von unten nach oben oder von oben nach unten gehen kann. Deshalb ist es am besten, wenn man möglichst die Rückseite des Lineals verwendet, auf der keine Skala zu sehen ist. Günstig ist auch die Verwendung eines Pappstreifens anstelle des Lineals. Es hat sich bewährt, die Grenzfälle „unmöglich“ und „sicher“ dadurch zu kennzeichnen, dass die Klammer von unten bzw. von oben an dem Lineal bzw. dem Pappstreifen befestigt wird.

Für die zeichnerische Darstellung einer solchen Skala ist es günstig, eine Strecke in vertikaler Lage zu verwenden, auf der die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse durch Striche gekennzeichnet werden. Die vertikale Lage der Strecke ist der horizontalen Lage vorzuziehen, da so auf die spätere Verwendung der y-Achse für die Angabe von Wahrscheinlichkeiten vorbereitet wird, wenn Wahrscheinlichkeitsverteilungen graphisch dargestellt werden. Ein weiterer Vorteil der senkrechten Darstellung ist, dass dann die Wahrscheinlichkeitsaussagen einfacher neben der Skala notiert werden können.

Mögliche Aufgaben zu Vorgängen aus dem Alltag der Schüler sind:

- Wie wahrscheinlich ist es, dass du heute ein Brot in einem Bäckergeschäft bekommst?
- Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Kind unserer Schule im Dezember Weihnachten feiert?

Wahrscheinlichkeiten unbekannter Zustände

Es gibt in der Fachwissenschaft zwei gegensätzliche Auffassungen zu inhaltlichen Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Nach der sogenannten klassischen oder objektiven Auffassung hat die Angabe von Wahrscheinlichkeiten nur Sinn bei (zumindest theoretisch) beliebig oft wiederholbaren Vorgängen. Wahrscheinlichkeit wird als ein Häufigkeitsmaß aufgefasst. Für Vorgänge, die in einer bestimmten Form nur einmal ablaufen können, wie ein Fußballspiel oder ein Pferderennen mache es keinen Sinn von Wahrscheinlichkeiten zu sprechen. Auch eine Vermutung oder eine Hypothese besitzt keine Wahrscheinlichkeit, sie ist entweder wahr oder falsch.

Im Gegensatz dazu sind die Anhänger einer anderen Auffassung, die auch als bayesianisch bezeichnet wird, der Meinung, dass es sinnvoll ist, auch bei einmaligen Vorgängen und bei Vermutungen über einen unbekannten Zustand von der Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses oder Zustandes zu sprechen. Die Bezeichnung bayesianisch bezieht sich auf Thomas Bayes (1701–1761) den Namensgeber des Satzes von Bayes, der eine zentrale Rolle in dieser Wahrscheinlichkeitsauffassung spielt.

Beispiel

Wenn ein Kind Fieber bekommt, so ist das ein Zeichen für eine Erkrankung, die aber zunächst meist unbekannt ist. Je nach den weiteren Symptomen sind für die Eltern bestimmte Erkrankungen mehr oder weniger wahrscheinlich. Eine größere Sicherheit über den Krankheitszustand ergibt sich erst nach Untersuchungen eines Arztes. Seine Diagnose sagt aus, welche Krankheit für ihn am wahrscheinlichsten ist.

Weitere Beispiele für diese stochastischen Situationen aus dem Lebensumfeld von Grundschülerinnen und Grundschülern sind die Suche nach dem Verursacher eines Schadens (Wer war das?), die Suche nach den Ursachen eines Defektes an einem Gerät (Woran kann das liegen?) oder auch Vermutungen über eingepackte Geschenke (Was könnte das wohl sein?). Solche Denkweisen sind bei vielen beruflichen Tätigkeiten von großer Bedeutung, wie beim Suchen der Täterin, des Täters durch eine Kriminalistin, einen Kriminalisten, beim Untersuchen eines defekten Autos oder eines PCs durch einen Monteur oder auch beim Suchen nach Ursachen für die überraschend schlechte Leistung einer Schülerin, eines Schülers in einer Arbeit durch eine Lehrperson.

Aus Sicht der Prozessbetrachtung sind beide Auffassungen je nach dem Kontext der Anwendung von Wahrscheinlichkeiten sinnvoll. Dazu kann man zwei Arten von Vorgängen unterscheiden. Zum einen sind es Vorgänge, die noch nicht angefangen haben bzw. deren Ablauf noch andauert, wie z. B. das Werfen eines Würfels, das Wachstum von Getreideähren, das Wetter oder die Entwicklung des Krankenstandes in der Klasse. Bei diesen Vorgängen existiert für alle möglichen Ergebnisse eine Wahrscheinlichkeit, die unabhängig von dem Menschen ist, der diese Vorgänge untersucht. Die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse sind in vielen Fällen nicht bekannt. Sie können aufgrund von Erfahrungen geschätzt oder in Experimenten näherungsweise bestimmt werden. Diese subjektiven Schätzungen der oft unbekannten (objektiven) Wahrscheinlichkeit sind um-

so besser, je mehr Kenntnisse oder Informationen die Person über den Vorgang und seine Bedingungen hat.

Eine zweite Gruppe von Vorgängen bilden solche, die bereits abgelaufen sind (Die Würfel sind gefallen.), deren Ergebnisse (die Augenzahl, die Krankheit, die Täterin, der Täter) aber nicht oder nur teilweise bekannt sind. Der Mensch (die Schülerin, der Schüler, die Ärztin, der Arzt, die Kriminalistin, der Kriminalist), der das eingetretene aber unbekannte Ergebnis nach Ablauf des Vorgangs bestimmen möchte, kann bestimmte Vermutungen äußern. Es macht Sinn, diesen Vermutungen über das eingetretene Ergebnis eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuzuordnen, etwa wie sicher ist sich die Ärztin, der Arzt, dass die Krankheit K vorliegt. Diese Wahrscheinlichkeiten sind aber immer an den Kenntnis- und Informationsstand des betreffenden Menschen gebunden. Liegen ihm z. B. neue Informationen vor (bei einem Arzt etwa nach einer Blutuntersuchung), kann sich die Wahrscheinlichkeit seiner Vermutungen (Hypothesen über den unbekannten Zustand) ändern. Dies kann dann auch dazu führen, dass man sich sicher ist, welcher Zustand eingetreten ist.

Beispiel

Es gibt drei Behälter mit Kugeln. Im ersten Behälter sind nur weiße Kugeln, im zweiten Behälter sind nur rote Kugeln und im dritten Behälter ist die Hälfte der Kugeln rot und die andere Hälfte weiß. Aus einem der Behälter werden zwei Kugeln gezogen und dir gezeigt, du weißt aber nicht, aus welchem Behälter sie gezogen wurden. Schätze die Wahrscheinlichkeit, dass aus dem ersten Behälter, dem zweiten Behälter oder dem dritten Behälter gezogen wurde. Markiere deine Schätzung auf einer Wahrscheinlichkeitsskala.

- a. Beide Kugeln sind weiß.
- b. Beide Kugeln sind rot.
- c. Eine Kugel ist weiß und die andere ist rot.

Im Fall a) und b) kann man jeweils einen Behälter ausschließen. Werden dann weitere Kugeln der gleichen Farbe gezogen, erhöht sich ständig die Wahrscheinlichkeit für einen Behälter mit Kugeln der gleichen Farbe. Sobald aber eine andere Farbe auftritt, kann es nur der dritte Behälter gewesen sein, was im Fall c) sofort feststeht.

Wahrscheinlichkeiten und Chancen

Anstelle von Wahrscheinlichkeit wird im Alltag auch oft von Chancen gesprochen. Zwischen beiden Begriffen gibt es enge Beziehungen. Wenn die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis groß ist, sind auch die Chancen für das Eintreten dieses Ergebnisses groß und umgekehrt. In der Literatur, insbesondere auch in Schulbüchern werden diese Begriffe oft synonym verwendet, was aber fachlich nicht richtig ist. Dies ist bereits bei der Angabe der Wahrscheinlichkeit 0,5 durch die Chancen 1 : 1 (oder fifty-fifty) ersichtlich, das Verhältnis 1 : 1 ist nicht gleich 0,5. Chancen können deshalb auch nicht auf einer Wahrscheinlichkeitsskala dargestellt werden, wie es teilweise geschieht.

Unter den Chancen (engl. odds) eines Ereignisses A versteht man den Quotienten aus der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses von A . Die Chancen eines Ereignisses A werden oft mit $O(A)$ bezeichnet und es gilt:

$$O(A) = \frac{P(A)}{P(\bar{A})}.$$

Im Falle gleichwahrscheinlicher Ergebnisse sind die Chancen für ein Ereignis A das Verhältnis der Anzahl der für A günstigen zu den für A ungünstigen Möglichkeiten. Aus den Chancen als Verhältnis für eine Ergebnis A kann die Wahrscheinlichkeit von A berechnet werden und umgekehrt.

Beispiele

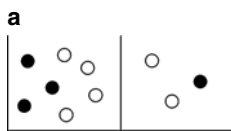
1. Beim Würfeln betragen die Chancen $1 : 5$ für die Augenzahl 6 und $5 : 1$ für keine 6.
2. Betragen die Chancen für ein Ergebnis A $3 : 5$, so gilt für seine Wahrscheinlichkeit $P(A) = 3/8$.
3. Ist für ein Ergebnis A die Wahrscheinlichkeit $P(A) = 5/8$, so sind die Chancen für A gleich $5 : 3$.

Strebt $P(A)$ gegen 1, so strebt $O(A)$ gegen unendlich. Strebt $P(A)$ gegen 0, so strebt $O(A)$ auch gegen 0. Ist $O(A) = O(B)$, so ist auch $P(A) = P(B)$.

Mit der Angabe von Chancen als Verhältnis kann im Stochastikunterricht in der Primarstufe die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses quantitativ charakterisiert werden, ohne dass dazu der Bruchbegriff benötigt wird. Es ist außerdem oft viel einfacher, das Verhältnis von günstigen zu ungünstigen Ergebnissen zu erkennen als das Verhältnis der günstigen Ergebnisse zu allen Ergebnissen.

Beispiele

1. Sind auf einem Glücksrad mit 8 gleichgroßen Feldern 3 rote und 5 grüne vorhanden und ist Rot die Gewinnfarbe, so kann ohne Verwendung von Brüchen festgestellt werden, dass die Chancen für einen Gewinn $3 : 5$ stehen.
2. In einem Behälter liegen schwarze und weiße Kugeln. Wenn du eine weiße Kugel ziehst, gewinnst du. Aus welchem Behälter würdest du ziehen? Begründe deine Entscheidung. (Neubert 2012, S. 95 f.)

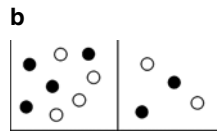


Behälter 1 Behälter 2

Chancen für eine weiße Kugel:

4 : 3

2 : 1



Behälter 1 Behälter 2

Chancen für eine weiße Kugel:

4 : 4

2 : 2

Bei der Aufgabe a) können folgende Überlegungen angestellt werden:

- Für Behälter 1 stehen die Chancen für das Ziehen einer weißen Kugel 4 : 3, das ist nur etwas besser als 1 : 1 (fifty-fifty). Bei Behälter 2 sind die Chancen für das Ziehen einer weißen Kugel doppelt so groß wie für das Ziehen einer schwarzen Kugel. Also muss man Behälter 2 wählen.
- Bei Aufgabe b) ist erkennbar, dass die Chancen in beiden Fällen gleich groß sind.

3.6 Zusammenfassende Bemerkungen

Insgesamt ergibt sich, dass sowohl in der Lehrerbildung als auch in der Schule noch erhebliche Anstrengungen erforderlich sind, um eine gründliche und fundierte Aus- und Fortbildung und einen sinnvollen Stochastikunterricht durchzuführen. Bevor weitere konkrete Aktivitäten und Unterrichtsvorschläge entwickelt werden, sollte zunächst eine Phase der Diskussion grundlegender Probleme erfolgen. Dabei muss man sich von dem in vieler Hinsicht problematischen Inhalt der Bildungsstandards lösen und ein neues fundiertes Konzept für den Stochastikunterricht in der Primarstufe entwickeln, das dann Grundlage für eine Weiterschreibung der Bildungsstandards ist. Dabei kommt den Arbeitskreisen Grundschule und Stochastik der GDM eine besondere Verantwortung zu. Ich rege eine gemeinsame Tagung von Mitgliedern dieser beiden Arbeitskreise zum Stochastikunterricht in der Primarstufe an.

A Anhang

Empfehlungen für die Stochastikausbildung von Lehrkräften an Grundschulen

(Empfehlungen des Arbeitskreises Stochastik der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, angenommen auf der Herbsttagung am 28.10.2012)

Damit angehende Grundschullehrerinnen und Grundschullehrer sachkompetent Stochastik unterrichten lernen, hält es der Arbeitskreis Stochastik für erforderlich, dass in der ersten Ausbildungsphase Studierende die folgenden fachbezogenen Kompetenzen erwerben können.

A.1 1. Kompetenzen im Erkennen und Analysieren von Erscheinungen mit Zufallscharakter

Die Studierenden

- kennen Kontexte und Bedeutungen der Verwendung des Zufallsbegriffs in der Umgangssprache und in der Mathematik,
- können Erscheinungen in der Natur, der Gesellschaft und dem Denken, in denen der Zufall eine Rolle spielt, erkennen und analysieren, indem sie folgende Überlegungen anstellen:
 1. Betrachtung eines einzelnen Vorgangs unter Verwendung folgender Fragen:
 - a. Welcher Vorgang läuft ab?
 - b. Welches Merkmal interessiert mich bzw. wird betrachtet?
 - c. Welche Ergebnisse des Vorgangs sind bezüglich dieses Merkmals möglich?
Welche Faktoren haben Einfluss auf das Eintreten der Ergebnisse?
 2. Betrachtung mehrfacher Wiederholungen des Vorgangs, dabei Gewinnen von Aussagen über die Häufigkeit bzw. die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen,
 3. Betrachtungen zu Zusammenhängen zwischen Einflussfaktoren und den Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen,
- können diese Überlegungen sowohl im Zusammenhang mit der Analyse von Daten als auch bei der Ermittlung und Interpretation von Wahrscheinlichkeiten anwenden.

A.2 2. Kompetenzen in der Planung, Durchführung und Auswertung statistischer Untersuchungen

Die Studierenden/die Lehrkräfte

- können Fragen stellen, die sich mithilfe von statistischen Untersuchungen beantworten lassen,
- beherrschen grundlegende Vorgehensweisen und bei der Planung einer statistischen Untersuchung, insbesondere kennen sie
- kennen Probleme der Auswahl einer Stichprobe und können eine solche in einfachen Fällen durch zufällige Auswahl gewinnen,
- kennen ausgewählte Probleme der Erstellung von Fragen und können zu einfachen Sachverhalten geeignete Fragen entwickeln,
- kennen exemplarisch mögliche Fehler bei der Planung von statistischen Untersuchungen,
- können sicher Strichlisten und Häufigkeitstabellen für eindimensionale Daten anfertigen sowie relative Häufigkeiten berechnen,
- kennen sicher folgende Möglichkeiten zur grafischen Darstellung von eindimensionalen Daten: Kreisdiagramm, Streckendiagramm (Stabdiagramm), Streifendiagramm

(Balken- oder Säulendiagramm), Liniendiagramm (Kurvendiagramm, Streckenzug, Polygonzug) und Bilddiagramm (Piktogramm),

- können angemessene grafische Darstellungen für Daten auswählen und erstellen, wobei sie auch geeignete Software verwenden,
- können vorliegende grafische Darstellungen lesen und interpretieren,
- kennen fehlerhafte grafische Darstellungen,
- können sicher das arithmetische Mittel einer Häufigkeitsverteilung bestimmen, interpretieren und dessen angemessene Verwendung beurteilen,
- verstehen qualitativ das Problem der Streuung, können sicher die Spannweite interpretieren und kennen exemplarisch weitere Streuungsmaße,
- kennen folgende Mittel und Methoden der Explorativen Datenanalyse und können sie in geeigneten einfachen Fällen sicher anwenden und mit den Mitteln und Methoden der klassischen beschreibenden Statistik vergleichen: Stamm-Blätter-Diagramm (Stängel-Blätter-Diagramm), Boxplot, Zentralwert (Median), Viertelwerte (Quartile), Vierteldifferenz,
- kennen exemplarisch Probleme der Gruppierung von Daten und können in einfachen Fällen eine Klassenbildung vornehmen, das arithmetische Mittel näherungsweise berechnen und Histogramme erstellen,
- können auf der Grundlage von Daten Schlussfolgerungen und Prognosen qualitativ herleiten und bewerten, insbesondere nach Beziehungen zwischen der Ausprägung der Bedingungen und der Verteilung der Daten suchen, begründete Vermutungen aufstellen, neue Fragen formulieren und dazu entsprechende neue Untersuchungen planen.

A.3 3. Kompetenzen in der Ermittlung und Interpretation von Wahrscheinlichkeiten

Die Studierenden/die Lehrkräfte

- haben sichere Kenntnisse zum komparativen Aspekt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und können sie in realen Sachkontexten anwenden,
- können Wahrscheinlichkeiten für wiederholbare reale Vorgänge in der Natur oder der Gesellschaft sicher interpretieren, insbesondere als Prognose für den Grad der Möglichkeit des Eintretens von Ergebnissen und als Prognose für erwartete Häufigkeiten bei mehrfacher Wiederholung des Vorgangs unter vergleichbaren Bedingungen,
- können exemplarisch die Verwendung von Wahrscheinlichkeiten als Grad der Sicherheit einer Person, die als Aussagen (Hypothesen) über einen eingetretenen aber unbekannten Zustand geäußert werden und die von den Kenntnissen der Person sowie von Informationen über den Zustand abhängen, interpretieren,
- können Beziehungen zwischen realen zufälligen Erscheinungen und dazu vorliegenden Daten (z. B. relative Häufigkeiten, arithmetisches Mittel) und Begriffen und Zusam-

menhängen auf der Modellebene (z. B. Zufallsexperiment, Ereignis, Wahrscheinlichkeitsraum, Urne, Erwartungswert) herstellen,

- können den Erwartungswert bei einer vorliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsgröße berechnen und sachbezogen interpretieren,
- können Berechnungen im Modell der Gleichwahrscheinlichkeit durchführen,
- können die Wahrscheinlichkeit bei zusammengesetzten (mehrstufigen) Vorgängen mithilfe von Baumdiagrammen und Pfadregeln berechnen, kennen den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen und können ihn interpretieren,
- erwerben ein inhaltliches Verständnis für den Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“,
- können mit simulierten erwarteten absoluten Häufigkeiten Wahrscheinlichkeiten, insbesondere bedingte Wahrscheinlichkeiten ermitteln und interpretieren,
- lernen exemplarisch Sachkontexte kennen, bei denen eine Simulation mithilfe von Zufallszahlen sinnvoll ist und können Experimente mit Zufallsgeneratoren bzw. Zufallszahlen planen, durchführen und auswerten.

Literatur

- Arbeitskreis Stochastik der GDM (2003). Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. *Stochastik in der Schule*, 23(3), 21–26.
- Bender, P., Beyer, D., Brück-Binninger, U., Kowallek, R., Schmidt, S., Sorger, P., Wielpütz, H., & Wittmann, E. Ch (1999). Überlegungen zur fachmathematischen Ausbildung der angehenden Grundschullehrerinnen und -lehrer. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 20(4), 301–310.
- Bohrisch, G. & Mirwald, E. (1988). *Zu Möglichkeiten des Einbeziehens von elementaren Aufgabenstellungen kombinatorischen oder stochastischen Charakters in die mathematische Bildung und Erziehung der Schüler unterer Klassen*. Dissertation. Erfurt: Pädagogische Fakultät.
- DMV, GDM, & MNU (2008). Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 85, 4–14.
- Engel, A. (1966). Propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie. *Der Mathematikunterricht*, 12(4), 5–20.
- Fischbein, E., Pampu, J., & Minzat, I. (1978). Einführung in die Wahrscheinlichkeit auf der Primärstufe. In H.-G. Steiner (Hrsg.), *Didaktik der Mathematik* (S. 140–160). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Heitele, D. (1976). *Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe*. Dissertation. Dortmund: Pädagogische Hochschule Ruhr.
- KMK (Kultusministerkonferenz) (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf. Zugriffen: 14. Mai 2017.
- Kurtzmann, G., & Sill, H. D. (2012). Vorschläge zu Zielen und Inhalten stochastischer Bildung in der Primärstufe sowie in der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften. In M. Ludwig (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 1005–1008). Münster: WTM.
- Lindenau, V., & Schindler, M. (1977). *Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primärstufe und Sekundarstufe I*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

- Müller, G., & Wittmann, E. C. (1977). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele* (3. Aufl.). Braunschweig: Vieweg.
- Neubert, B. (2012). *Leitidee: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit* (1. Aufl.). Offenburg: Miltenberger, K.
- Schupp, H. (1979). Stochastik in der Sekundarstufe I. In D. Volk (Hrsg.), *Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht* (S. 297–309). München: Fink.
- Sill, H. D. (2010). Zur Modellierung zufälliger Erscheinungen. *Stochastik in der Schule*, 30(3), 2–13.
- Varga, T. (1972). Logic and probability in the lower grades. *Educ Stud Math*, 4(3), 346–357.
- Winter, H. (1976). Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule (Klasse 1–6). *Didaktik der Mathematik*, 1, 22–37.