

Universität Rostock  Traditio et Innovatio

Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Primarstufe

Prof. Dr. Hans-Dieter Sill, Universität Rostock
Vortrag auf der Herbsttagung des AK Stochastik
am 28.09.2019 in Bad Herrenalb



05.03.2013 © 2009 UNIVERSITÄT ROSTOCK | INSTITUT FÜR MATHEMATIK

1

Universität Rostock  Traditio et Innovatio

Gliederung

1. Bemerkungen zu historischen Hintergründen und zum aktuellen Stand einer Propädeutik der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe
2. Grundlagen unseres Zugangs
3. Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs
4. Konzept der Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs
 1. Erkennen von möglichen Ergebnissen eines Vorgangs
 2. Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten
 3. Beschreiben von Wahrscheinlichkeiten
 4. Darstellen von Wahrscheinlichkeiten auf einer Skala
 5. Untersuchung des Einflusses von Bedingungen auf die Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen

05.03.2013 © 2009 UNIVERSITÄT ROSTOCK | INSTITUT FÜR MATHEMATIK 2

2

1. Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe

Literatur, die Einfluss auf die aktuelle Situation hat:

- Lindenau & Schindler 1977: Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe und Sekundarstufe I
 - Als Ausgangspunkt sollten im Unterricht die Begriffe „Zufall“ und „zufällig“ gewählt werden. Es werden die Begriffe „Zufallsexperiment“, „zufälliges Ereignis“ und als zentrale Kategorie „Urnenexperiment“ im Unterricht verwendet.
 - Bereits in Klasse 3 sollten Experimente zum empirischen Gesetz der großen Zahlen durchgeführt werden.
 - In den Vorschlägen für die Klassen 3 bis 6 finden sich lediglich Glücksspiele.
 - Der Begriff „Wahrscheinlichkeit wird“ erst in Klasse 6 als Verhältnis eingeführt.
- Kütting 1994: Didaktik der Stochastik
 - 4 Stufen zur Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung: „Zufallsexperimente“, „Ergebnismengen“, „Ereignisse“, „Wahrscheinlichkeit“

1. Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe

- Stufe 1 bis 3 unter Einbeziehung eines qualitativen Wahrscheinlichkeitsbegriffs für die Grundschule, die Stufe 4 für Klasse 5/6.
- Als Zufallsexperimente kommen ausschließlich Spielsituationen vor.
- Ereignisse werden als Teilmengen der Ergebnismenge erklärt.

Formulierungen in den Bildungsstandards:

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen

- Grundbegriffe kennen (z. B. „sicher“, „unmöglich“, „wahrscheinlich“),
- Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen

Aktuelle Lehrbücher, Unterrichtsmaterialien, Publikationen

- Das Wort „Zufall“ spielt eine zentrale Rolle.
- Es werden die Begriffe Zufallsexperiment, Ergebnismengen, Ereignis verwendet.
- Es werden Experimente zum empirischen Gesetz der großen Zahlen durchgeführt.
- Es kommen fast ausschließlich Spielsituationen vor.
- Es gibt viele fachliche Unzulänglichkeiten.

1. Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe

Andere Vorschläge, warnende Stimmen

- Heitele (1977, S. 305)
 - Einstieg in die Stochastik vorwiegend aus der Welt des Kindes
 - Mit qualitativen bzw. komparativen Wahrscheinlichkeiten beginnen
 - Begriffsexplikationen, wie etwa zum Zufallsexperiment sind inadäquat
- Winter (1976)
 - Die stochastischen Erfahrungen müssen unmittelbar einen Beitrag zur Welterschließung liefern.
 - Er sprach sich deutlich gegen eine „Reform von oben“ aus.
- Erfahrungen in Ungarn (Varga 1972)
 - Ab 74 schrittweise Einführung durch Erfassung immer weiterer Schulen
 - Wahrscheinlichkeitsskala als grundlegendes didaktisches Mittel
 - Aufgabe für Generationen

5

2. Grundlagen unseres Zugangs

- **Stochastik:** Zusammenfassung der Teildisziplinen Beschreibende Statistik, Explorative Datenanalyse, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische (Beurteilende oder Schließende) Statistik.
- **Stochastikunterricht:** alle Unterrichtsphasen, in denen sich die Schülerinnen und Schüler explizit stochastisches Wissen und Können aneignen
- **Stochastische Situationen:** Situationen in der Realität, in denen Daten entstehen und erfasst werden können und Situationen, in denen verschiedene Ergebnisse möglich sind, aber nicht mit Sicherheit feststeht, welches eintreten wird. 
- **stochastischer Vorgang:** Realmodell für einen tatsächlichen Vorgang in der Natur, der Gesellschaft oder dem Denken; einziges definierendes Merkmal: Existenz mehrerer möglicher Ergebnisse
- **Methode der Prozessbetrachtung:** Betrachtung des Verlaufs eines stochastischen Vorgangs, seiner Bedingungen und möglichen Ergebnisse
- Quellen: Krüger; Sill et al. 2015: Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I
Sill, Kurtzmann 2019: Didaktik der Stochastik in der Primarstufe 

6



Universität
Rostock

Traditio et Innovatio

3. Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Formale Aspekte

1. Definitionsaspekt
 „Wahrscheinlichkeit“ ist ein nicht definierbarer Grundbegriff in einem Axiomensystem. Wahrscheinlichkeiten werden als Zahlen aus dem Intervall $[0; 1]$ angegeben.

2. Rechenaspekt
 Mit Wahrscheinlichkeiten kann man nach bestimmten Regeln rechnen. Bei gleichwahrscheinlichen Ergebnissen kann man sie mit der Laplace-Formel berechnen.

Inhaltliche Aspekte

3. Objektiver Aspekt

- a) Wahrscheinlichkeiten geben den Grad der Möglichkeit des Eintretens von Ergebnissen von Vorgängen in der Natur oder der Gesellschaft an.
- b) Wahrscheinlichkeiten werden durch das Denken des Subjektes, das den Vorgang betrachtet oder untersucht, nicht beeinflusst.
- c) Wahrscheinlichkeiten hängen von den Bedingungen des Vorgangs ab.
- d) Wahrscheinlichkeiten können empirisch bestimmt werden. Wahrscheinlichkeitsangaben haben immer Modellcharakter.

05.03.2013
© 2009 UNIVERSITÄT ROSTOCK | INSTITUT FÜR MATHEMATIK
7

7



Universität
Rostock

Traditio et Innovatio

3. Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

4. Subjektiver Aspekt

- a) Wahrscheinlichkeiten geben den Grad der Sicherheit der Ergebnisse von Denkvorgängen einer Person an, die als Aussagen (Hypothesen) über einen eingetretenen aber unbekannten Zustand geäußert werden.
- b) Die Wahrscheinlichkeit der geäußerten Aussagen hängt von den Kenntnissen der Person und den ihr bekannten Informationen über den Zustand ab.
- c) Die Wahrscheinlichkeit kann sich bei weiteren Informationen, die die Person erhält, ändern.

5. Darstellungsaspekte

- a) Die Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen können verglichen werden. Ein Ergebnis kann wahrscheinlicher, weniger wahrscheinlich oder genauso wahrscheinlich wie ein anderes sein. (komparativer Aspekt)
- b) Die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen kann in Worten beschrieben werden.
- c) Wahrscheinlichkeiten können auf einer (beschränkten) Skala markiert werden.
- d) Wahrscheinlichkeiten können durch Chancen angegeben werden.
- e) Die Wahrscheinlichkeit kann als Dezimalzahl oder Bruch von 0 bis 1 oder in Prozent von 0 % bis 100 % angegeben werden.

05.03.2013
© 2009 UNIVERSITÄT ROSTOCK | INSTITUT FÜR MATHEMATIK
8

8



3. Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

6. Verwendungsaspekte

Eine Wahrscheinlichkeitsangabe kann verwendet werden

- a) zum Ausdruck des Grades der Erwartung des Eintretens eines Ergebnisses vor dem Ablauf eines Vorgangs,
- b) zur Vorhersage der Häufigkeit eines Ergebnisses bei mehrmaligem Ablauf eines Vorgangs unter gleichen Bedingungen (Häufigkeitsinterpretation),
- c) zur Bewertung eines eingetretenen Ergebnisses nach einem Ablauf eines Vorgangs,
- d) zum Ausdruck des Grades der Sicherheit einer Person über ein eingetretenes aber unbekanntes Ergebnis.

These: Zu allen inhaltlichen Aspekte außer 5.e) können in der Primarstufe erste grundlegende Kenntnisse und Vorstellungen ausgebildet werden.

Weitere Bestandteile des semantischen Netzes zum Wahrscheinlichkeitsbegriff:

Zusammenhänge mit Häufigkeiten, Interpretieren kleiner Wahrscheinlichkeiten, Verteilungen von Wahrscheinlichkeiten, bedingte Wahrscheinlichkeit, ...



4. Konzept der Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Phasen im Anfangsunterricht (KI. 1/2)

1. Erkennen von möglichen Ergebnissen eines Vorgangs
2. Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten
3. Beschreiben von Wahrscheinlichkeiten
4. Darstellen von Wahrscheinlichkeiten auf einer Skala
5. Untersuchung des Einflusses von Bedingungen auf die Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen



4. Konzept der Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Festigung und Erweiterung des Könnens im weiterführenden Unterricht (Kl. 3/4)

- Höheres Anforderungsniveau beim Vergleichen und Beschreiben von Wahrscheinlichkeiten und beim Einfluss von Bedingungen.
- Weitere Kategorien zur qualitativen Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten, Beschriftung des Mittelpunktes der Skala
- Weitere Möglichkeiten zum Interpretieren von Wahrscheinlichkeiten
- Einbeziehung von Situationen aus dem Glücksspielbereich, wie das Entnehmen von Objekten aus Behältern
- Durchführung von Experimenten zu stochastischen Vorgängen
- Möglichkeiten für Verbindungen zwischen der Arbeit mit Daten und dem Umgang mit Wahrscheinlichkeiten:
 - aus erhobenen Daten Schlussfolgerungen für Wahrscheinlichkeiten ableiten
 - aus Wahrscheinlichkeiten Konsequenzen für Datenerhebungen ziehen
- Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten unbekannter Zustände

11



4.1 Erkennen von möglichen Ergebnissen

- In LB oft zahlreiche Aufgaben zu den Wörtern „sicher“, „möglich“, „unmöglich“
- Probleme aufgrund mehrerer Bedeutungen der Wörter, Nutzen für stochastische Bildung gering, deshalb nur wenige Aufgaben zum Identifizieren sicherer und unmöglicher Ergebnisse, eher Vorgänge zu mehreren möglichen Ergebnissen
- Beispiele:  Im Herbst liegen viele Laubblätter auf der Erde. Welche Farben können sie haben?



Wie wird morgen das Wetter bei uns sein? Was tritt ganz sicher ein, was ist möglich und was ist überhaupt nicht möglich?

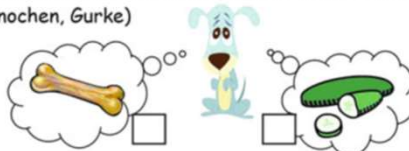
- A. Morgen wird es regnen.
- B. Morgen wird es schneien.
- C. Morgen geht die Sonne wieder auf.
- D. Morgen ist es sehr windig.
- E. Morgen wird es hageln.

12

4.2 Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten

- Vergleichen von Schätzen ist möglich und sinnvoll, wenn
 - sich die beiden Wahrscheinlichkeiten deutlich unterscheiden und
 - die kleinere Wahrscheinlichkeit größer als Null ist.
- Mögliche Formulierungen: „eher“, „wahrscheinlicher“
- Beispiele:

Was wählt der Hund eher? Was ist wahrscheinlicher?
(Knochen, Gurke)



Wann bekommst du eher einen Sonnenbrand? Was ist wahrscheinlicher?

- ☐ Beim Fahrradfahren im Oktober
- ☐ An einem sonnigen Sommertag im Juni

05.03.2013

© 2009 UNIVERSITÄT ROSTOCK | INSTITUT FÜR MATHEMATIK

13

13

4.3 Beschreiben von Wahrscheinlichkeiten

- Anknüpfen an die umgangssprachliche Verwendung von „wahrscheinlich“ im Sinne von „tritt mit großer Sicherheit ein“
- Im Anfangsunterricht nur vier Beschreibungen: „unmöglich“, „unwahrscheinlich“, „wahrscheinlich“ und „sicher“
- Beispiele:

e)



Das Kind wirft den Ball in den Korb.

- ☐ wahrscheinlich
- ☐ unwahrscheinlich

Der Elefant gewinnt beim Tauziehen gegen den Löwen.



Das ist _____ wahrscheinlich, weil

05.03.2013

© 2009 UNIVERSITÄT ROSTOCK | INSTITUT FÜR MATHEMATIK

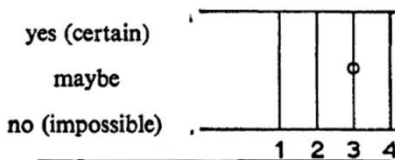
14

14



4.4 Darstellen von Wahrscheinlichkeiten auf einer Skala

- Idee von Varga (1972)
- Probleme:
 - Skala oder Streifen?
 - Horizontal oder vertikal?
 - Enaktive Handlungen?
- Vorschläge:
 - Skala
 - Vertikal
 - Lineal (Rückseite) mit Klammer
 - Bei sicher und unmöglich, Klammer von oben oder unten
 - Kontrolle der Ergebnisse in der Klasse durch Hochhalten des Lineals



15



4.4 Darstellen von Wahrscheinlichkeiten auf einer Skala

- Diskrete Skala als Vorstufe möglich (Wahrscheinlichkeitsleiter)
- Beispiel:



Kontrolliere die Leitern. Sind die Punkte richtig? Wenn nötig, verbessere!

a.)

sicher
😊
unmöglich

Bei Gewitter gibt es Blitz und Donner.

☐ Stimmt!

☐ Stimmt nicht!



Warum? _____

16



4.5 Untersuchen des Einflusses von Bedingungen

- Größe der Wahrscheinlichkeit hängt immer von Bedingungen ab
- Kinder entwickeln viel Phantasie zum Finden von Bedingungen
- Beispiele:
 - Wie wahrscheinlich ist es, dass es zum Geburtstag einen Geburtstagskuchen gibt?
 - Jemand sagt, in diesem Jahr wird bei uns zu Ostern Schnee liegen.
Unter welchen Bedingungen ist dies
 - sicher,
 - wahrscheinlich,
 - unwahrscheinlich,
 - unmöglich?
 - Eine alte Frau fragt: „Wie wahrscheinlich ist es, dass mein Enkel Lutzi mich am Wochenende besuchen kommt? Er war schon länger nicht mehr zu Besuch.“
Finde Gründe, ob es wahrscheinlich oder unwahrscheinlich ist, dass Lutzi seine Oma besucht.



Beispiele für stochastische Situationen

- In der Natur: Wetterentstehung, Pflanzenwachstum, körperliche Entwicklung von Menschen und Tieren
- In der Technik: Produktion und Transport von Werkstücken
- Im Leben eines Menschen; Entwicklung von Freizeitinteressen, Kenntnissen, Fähigkeiten und Einstellungen.
- Im Tagesablauf: Schlafen, Frühstück, Zur-Schule- Gehen, Spielen, Hausaufgabenmachen
- In Glücksspielsituationen: Werfen von Münzen oder Würfeln, Drehen von Glücksrädern, Ziehen aus einem Behälter, Lotto spielen u. a.
- Bei Forschungsarbeiten auf den Gebieten der Soziologie, Psychologie, Pädagogik oder Medizin: Ableiten von Schlussfolgerungen aus Daten