

Standpunkte und Hinweise zum Thema

Der Ähnlichkeitsbegriff im Alltag und in der Mathematik

Es gibt wesentliche Unterschiede zwischen der Verwendung des Begriffes „ähnlich“ in der Umgangssprache und in der Mathematik. Man sagt, zwei Personen oder zwei Gegenstände sind einander ähnlich, wenn sie sich im Aussehen nur wenig unterscheiden. Streckenverhältnisse, Winkel oder die Größe spielen dabei keine Rolle. Auch bei ungefähr gleicher Größe spricht man von einem ähnlichen Aussehen. Zwei im mathematischen Sinne ähnliche Figuren würde man umgangssprachlich nicht als ähnlich bezeichnen, sondern eher, dass die eine Figur genauso aussieht wie die andere.

Es sollte deshalb kein Anknüpfen an die Vorstellungen der Schüler zur Ähnlichkeit erfolgen, sondern der Begriff Ähnlichkeit im mathematischen Sinne neu aufgebaut werden. Ein Vergleich mit der umgangssprachlichen Bedeutung von ähnlich sollte erst am Ende des Kapitels in den gemischten Übungen erfolgen.

Figurgeometrische und abbildungsgeometrische Definition der Ähnlichkeit

Die Ähnlichkeit von Figuren kann aus mathematischer Sicht auf zwei Arten definiert werden:

- figurgeometrisch: Ist bei geradlinig begrenzten ebenen Figuren eine eindeutige Zuordnung der Strecken und Winkel der Figuren möglich, sodass alle entsprechenden Winkel gleich groß und alle einander entsprechenden Seiten im gleichen Verhältnis stehen, heißen die Figuren ähnlich zueinander. Diese Definition wird heute in der Mathematik nicht mehr verwendet. Wenn beliebige Strecken betrachtet werden, kann man auf die Gleichheit der Winkel verzichten.
- abbildungsgeometrisch: Zwei beliebige Figuren heißen ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die die eine auf die andere abbildet.

Die figurbezogene Definition der Ähnlichkeit hat in der Schule folgende Vorteile

- Es kann an die Kenntnisse und Vorstellungen zur maßstäblichen Vergrößerung bzw. Verkleinerung angeknüpft werden.
- Es ist keine vorherige Behandlung der zentrischen Streckung erforderlich.

Wenn die Winkel in die Definition einbezogen werden, treten folgende Nachteile bzw. Probleme auf:

- Eine Definition kann in sinnvoller Weise nur für ebene geradlinig begrenzte Figuren erfolgen. Bei krummlinig begrenzten ebenen Figuren ist der Begriff Winkel nicht erklärt bzw. es treten keine Winkel auf (Kreis, Ellipse).
- Die Ähnlichkeit von Kreisen kann also z.B. nicht aus der Definition gefolgert werden und müsste gesondert erklärt werden.
- Bei Körpern gibt es keine Innenwinkel der Figur. Für ebenflächig begrenzte Körper könnten die Winkel der Seitenflächen betrachtet werden. Die Ähnlichkeit von Prismen und Pyramiden könnte damit über die Ähnlichkeit der einander entsprechenden Begrenzungsflächen erklärt werden. Die Ähnlichkeit von Zylindern, Kegeln und Kugeln könnte über die Ähnlichkeit von Kreisen erklärt werden.

Die abbildungsgeometrische Definition hat folgende Vorteile:

- Es ist ein systematischer Aufbau des Geometrieunterrichts möglich.
- Es können analoge Betrachtungen zur Bildung des Begriffes Kongruenz angestellt werden.
- Die Ähnlichkeit wird allgemein für beliebige Figuren (d.h. auch Körper) erklärt.

Sie ist aber mit folgenden Nachteilen verbunden:

- Es ist vor Bildung des Begriffes Ähnlichkeit ein erheblicher Aufwand an neuen Begriffen und Verfahren nötig (zentrische Streckung, Ähnlichkeitsabbildung, Zusammensetzung von Bewegungen und Streckungen).
- Diese Inhalte haben nur eine lokale bzw. theoretische Bedeutung. Für spätere Anwendungen werden die Begriffe nur bedingt benötigt.
- Die damit verbundenen Aufgaben (Konstruktionen, Satzfindungen und Beweise) sind sehr anspruchsvoll.

Maßstäbliche Vergrößerungen und Verkleinerung und die Definition der Ähnlichkeit

Die Schüler kennen das maßstäbliche Verkleinern und Vergrößern aus dem Alltag, aus anderen Fächern und dem Mathematikunterricht seit der Grundschule. Sie haben sichere inhaltliche Vorstellungen und Kenntnisse zur Vorgehensweise.

Es sind aber folgende Unterschiede zum Begriff der ähnlichen Figuren zu beachten:

- Bei einer maßstäblichen Vergrößerung oder Verkleinerung eines Objektes spricht man nicht davon, das Original und Modell einander ähnlich sind, sondern sagt z.B. „Das Modell sieht genauso aus wie das Original.“
- Bei Vergrößerungen oder Verkleinerungen haben beide Objekte ein unterschiedliches Wesen. Eines ist immer das Original, d.h. die Realität, das andere ist ein neu geschaffenes, künstliches Objekt, das aus einem anderen Material besteht und als Vergrößerung oder Verkleinerung einen bestimmten Zweck erfüllt.
- Bei Vergrößerungen oder Verkleinerungen von ebenen oder räumlichen Objekten spielen die Winkel keine vordergründige Rolle, da es sich oft um rechte Winkel handelt.

Die wesentliche Gemeinsamkeit ist aber die Konstanz der Verhältnisse einander entsprechender Strecken. Die gleiche Größe der einander entsprechenden Winkel wird implizit als vorhanden angenommen.

Der Begriff „Ähnlichkeit“ sollte ausgehend von den Kenntnissen und Vorstellungen der Schüler zum Vergrößern und Verkleinern von Figuren und Körpern gebildet werden, d. h., Figuren werden als ähnlich bezeichnet, wenn sie durch eine maßstäbliche Vergrößerung oder Verkleinerung auseinander hervorgehen. Dabei muss hervorgehoben werden, dass alle Strecken der Originalfigur, d. h. auch z. B. die nicht eingezeichneten Strecken, in gleichem Verhältnis zu vergrößern sind, da sonst die Invarianz der Winkel nicht gegeben ist.

Ein wesentlicher Vorteil ist, dass damit auch sofort der Blick für die Ähnlichkeit von Körpern geöffnet wird ohne dass dazu das Problem der Gleichheit der Winkel erörtert werden muss.

Da bei vielen Aufgaben der Ähnlichkeitsfaktor zu bestimmen ist bzw. mit ihm gearbeitet werden muss, sollte die Relation „ähnlich“ nicht als symmetrische Relation erklärt werden, sondern zunächst in der Weise definiert werden, dass eine Figur zu einer anderen Figur mit einem bestimmten Faktor ähnlich ist. Umgekehrt sind die Figuren zwar auch zueinander ähnlich aber mit dem Kehrwert des Faktors.

Der Satz über die Gleichheit entsprechender Winkel ist bei dem gewählten Aufbau die beweistheoretisch entscheidende und schwierigste Stelle, die die Gedanken beinhaltet, die bei anderen Vorgehensweisen etwa beim Beweis der Strahlensätze erforderlich sind. Dieser Beweis sollte nicht umgangen, sondern zumindest plausibel gemacht werden.

Zur Aneignung des Begriffes Streckenverhältnis

Der Begriff Streckenverhältnis ist der zentrale Gegenstand des Stoffgebietes Ähnlichkeit. Ohne dass eine explizite Erklärung erforderlich ist, muss durch das Lösen von Aufgaben folgendes System von Gedanken herausgebildet werden:

- Ein Streckenverhältnis ist eine spezielle Form eines Verhältnisses von Größen, nämlich der Länge zweier Strecken.
- Im Unterschied zu anderen Verhältnissen von Größen hat es keine Einheit.
- Der Maßstab ist ebenfalls ein Streckenverhältnis, nämlich das Verhältnis der Längen einander entsprechender Strecken in einer Zeichnung bzw. einem Modell und der Wirklichkeit.
- Die Längenangaben müssen analog zum Maßstab stets die gleiche Einheit besitzen.
- Das Verhältnis kann in der Form $1 : n$, $\frac{p}{q}$ oder k angegeben werden. dabei sind n , p und $q \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Q}$.
- Analog zur Proportionalität von Größen kann das konstante Verhältnis auch als Proportionalitätsfaktor der Streckenlängen angegeben werden. Der Faktor heißt dann Ähnlichkeitsfaktor.

Zur Herausbildung einiger dieser Gedankenverbindungen sind spezielle Aufgaben erforderlich.

Der Begriff Streckenverhältnis ist streng genommen nicht korrekt, da nicht die Strecken, sondern die Längen der Strecken ins Verhältnis gesetzt werden.

Zur Bedeutung und Behandlung der zentrischen Streckung

Die zentrische Streckung hat eine theoretische Bedeutung beim abbildungsgeometrischen Aufbau der Ähnlichkeit. Für das Lösen von Anwendungsaufgaben wird sie nicht benötigt. Es sollte eine Beschränkung auf einfache Konstruktionen zum Erzeugen ähnlicher Figuren erfolgen. Dies kann bereits bei der Wiederholung des Vergrößerns und Verkleinerns erfolgen.

Bei dem im Lehrbuch gewählten Aufbau der Ähnlichkeit ist die zentrische Streckung nicht erforderlich und kann erst nach den Strahlensätzen am Ende des Stoffgebietes behandelt werden. Sie sollte vor allem zur Festigung und Vertiefung des Könnens im Konstruieren dienen.

Konstruktionen mithilfe der Ähnlichkeit

Die Konstruktionen mithilfe der Ähnlichkeit sollten ebenfalls nach der Methode der Bestimmungslinien erfolgen. Bei den Lösungsüberlegungen kommt als weiteres heuristische Prinzip das Arbeiten mit Hilfsaufgaben dazu. Eine Hilfsaufgabe entsteht in diesen Fällen, indem eine Bedingung der Aufgabe vernachlässigt wird und man eine Hilfsfigur sucht, die zur gesuchten Figur ähnlich. Durch eine zentrische Streckung kann dann aus der Hilfsfigur die gesuchte Figur konstruiert werden. Mit Blick auf die Abiturstufe sind Aufgaben zum Einbeschreiben von Figuren in andere Figuren von besonderer Bedeutung.