

Auszug aus Sill, H.-D. u. a.: Mathematik Mecklenburg-Vorpommern. Klasse 8. Gymnasium. Lehrmaterial. – Berlin: paetec-Verlag, 2001, S. 16, 17:

Entwicklung des Funktionsbegriffes und des funktionalen Denkens

Die Entwicklung der Vorstellungen und Kenntnisse der Schüler zum Funktionsbegriffes begann in der Grundschule mit der Behandlung von Zuordnungen von gleichmächtigen endlichen Mengen und Zahlen, von Vorgänger und Nachfolger einer Zahlen, Vielfachen und Teilern, Berechnungen von Termen in Tabellenform u.a. Zuordnungen. In der Klasse 7 wurden bei der Behandlung der direkten und umgekehrten Proportionalität bereits viele wesentlichen Merkmale von Funktionen und funktionalen Zusammenhängen angesprochen. Die Proportionalität sollte deshalb auch der Ausgangspunkt der weiteren Entwicklung des Funktionsbegriffes sein.

Ein wichtiges Ziel des Stoffgebietes ist die Anbahnung reichhaltiger Vorstellungen und Kenntnisse zum Funktionsbegriff, die in den folgenden Schuljahren aufgegriffen, gefestigt und vertieft werden. Dazu sind insbesondere Beziehungen zur Betrachtung von Zusammenhängen, Abhängigkeiten und Gesetzen herzustellen. Die allgemeine mengentheoretische Betrachtungsweise und die Untersuchung von Zuordnungen außermathematischer Objekte, zwischen denen kein kausaler Zusammenhang besteht (z.B. Häuser – Hausnummern), sollte nur am Rande behandelt werden.

Ein weiteres zentrales Ziel des Stoffgebietes sollte die Entwicklung des funktionalen Denkens sein. Unter funktionalem Denken wird das Erkennen, Erfassen und Anwenden der Abhängigkeit der Veränderung einer Veränderlichen von der Veränderung einer anderen Veränderlichen verstanden. Dazu gehören folgende Teilhandlungen

- Erkennen der Veränderung von y bei Veränderung von x
- Finden einer Möglichkeit x so zu verändern, dass sich y in gewünschter Weise ändert
- Erkennen von Sonder- und Grenzfällen
- Erkennen von Zusammenhängen in der Realität durch funktionale Betrachtungen

Beziehungen der Grundbegriffe

Zur Bezeichnung von x -Werten werde die Begriffe Argument und Stelle verwendet. Es sollte mit Blick auf die Oberstufe häufiger der Begriff Stelle benutzt werden, wobei aber folgende Begriffsbeziehungen auszubilden sind:

- Der Begriff Stelle ist stärker an die grafische Darstellung der Funktion gebunden. Stellen sind alle Werte auf der x -Achse.
- Eine Stelle liegt immer auf der x -Achse. Punkte des Graphen oder y -Werte werden nicht als Stellen im mathematischen Sinne bezeichnet
- Eine Stelle ist im Unterschied zur üblichen Begriffsverwendung als Bezeichnung eines Ortes kein Punkt auf der x -Achse, sondern nur die x -Koordinate des Punktes. (Dies entspricht der Bezeichnung der Punkte auf der x -Achse durch Zahlen, obwohl eigentlich Zahlenpaare verwendet werden müssten.)
- Ein Argument gehört stets zum Definitionsbereich, d.h. jedes Argument ist auch ein Stelle.
- Eine Stelle muss nicht zum Definitionsbereich der Funktion gehören (z.B. Stelle, an der f nicht definiert ist, Polstelle, Unstetigkeitsstelle), d.h. nicht jede Stelle ist ein Argument.

Zusammenhänge und Abhängigkeiten zwischen Größen können durch Funktionen beschrieben werden. Es sollten folgende Sprechweisen verwendet. Die Größe y hängt von der Größe x ab. Die Variable x heißt unabhängige Variable, y heißt abhängige Variable. Die Größe y ist ein Funktion von x . Zwischen den Größen x und y besteht ein Zusammenhang.

Es ist zu beachten, dass aus der Formulierung: "Zwischen den Größen a und b besteht ein Zusammenhang" nicht abgeleitet werden kann, ob damit gemeint ist, dass a von b abhängt oder b von a , was also Definitionsbereich und Wertebereich eines entsprechenden funktionalen Zusammenhangs ist. Im Lehrbuch werden beide Bedeutungen verwendet, wobei die Variante "b hängt von a ab" häufiger vorkommt.

Mit der Formulierung „ y ist ein Funktion von x “ kann der Relationscharakter des Funktionsbegriffes verdeutlicht und eine Beziehung zu Formulierungen in den Naturwissenschaften hergestellt werden.

Nicht jeder gesetzmäßige Zusammenhang kann durch eine Funktion beschrieben werden, (z.B. Körpergröße \rightarrow Körpergewicht). in diesen Fällen handelt es um stochastische Zusammenhänge.

Bei Beschreibung von gesetzmäßigen Zusammenhängen ist die Angabe von Bedingungen nötig. (z.B. $s = f(t) = v \cdot t$ für $v = \text{const.}$)

Beziehungen der Darstellungsarten

Funktionen können dargestellt werden durch, eine wörtliche Beschreibung, eine Wertetabelle oder ein Pfeildiagramm, einen Graphen (Kurve) in einem Koordinatensystem oder eine bzw. mehrere Gleichungen. Zwischen diesen Darstellungsarten und dem Funktionsbegriff bestehen folgende Beziehungen:

- Zu jeder Funktion ist eine Wertetabelle oder ein Pfeildiagramm angebar, die aber nur endlich viele Werte enthalten. Jede Tabelle und jedes Pfeildiagramm, die eine eindeutige Zuordnung enthalten, sind eine Funktion.
- Nicht jede Funktion und auch nicht jede Zahl-Zahl-Funktion kann als Graph in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Jede Kurve (als Menge von Punkten) in einem Koordinatensystem, die mit jeder Parallelen zur y-Achse höchstens einen Punkt gemeinsam hat, kann als Graph einer Funktion aufgefasst werden.
- Wird eine Funktion in Form einer Gleichung dargestellt, so ist die Funktion die Lösungsmenge der Gleichung.
- Nicht jede Funktion lässt sich in Form einer Gleichung angeben. Jede Gleichung mit zwei Variablen, die sich nach einer der Variablen auflösen lässt, kann als Darstellung einer Funktion mit einer Variablen aufgefasst werden. Gleichungen mit mehr als einer Variablen, die sich nach einer der Variablen auflösen lassen, können als Darstellung von Funktionen mit mehreren Variablen aufgefasst werden.

Entwicklung des grafischen Könnens

Unter grafischem Können wird das Können im Skizzieren, Zeichnen und Interpretieren von Graphen verstanden. Es ist eine Einheit formaler und inhaltlicher Aspekte. Zur Entwicklung des grafischen Könnens müssen folgende Teilhandlungen ausgebildet werden:

- a) Lesen und Interpretieren von Graphen
 - Erkennen der auf den Achsen dargestellten Größen
 - Ablesen von zugeordneten x- und y-Werten aus einem Graphen
 - Erkennen der Einteilung auf den Achsen
 - Schätzen von Anstiegen
 - Berechnen von Anstiegen durch tatsächliches oder gedankliches Einzeichnen von Anstiegsdreiecken
 - Deuten des Anstieges bei realen Zusammenhängen als Verhältnis der Größen
- b) Vergleichen von zwei Graphen
 - inhaltliches und formales Vergleichen von Anstiegen
 - gedankliches Entlanggehen auf Parallelen zur x- bzw. y-Achse und deuten der dabei durchlaufenen Werte, Verlauf eines Graphen oberhalb oder unterhalb bzw. rechts oder links vom anderen Graphen deuten
 - Deuten der Schnittpunkte der Graphen
- c) Zeichnen eines Koordinatensystems
 - Zuordnung der Größen zu den Achsen: Erkennen der abhängigen Größe
 - Festlegen eines Maßstabes: dem größten darzustellenden Wert ein geeignete Längenangabe zuordnen
 - Auswahl, berechnen und eintragen der Teilbeschriftungen
- d) Skizzieren eines Graphen nach einer wörtlichen Beschreibung
 - Zeichnen eines Koordinatensystems (s. c))
 - Zeichnen ausgewählter Punkte
 - Erkennen der Änderung von y bei Änderung von x
 - Erkennen der Änderungsrate und zuordnen eines entsprechenden Anstiegs
 - Erkennen der Veränderung der Änderungsrate und zeichnen einer entsprechenden Krümmung