5.5 Vierecke
Vierecksarten
 	
Innenwinkelsumme im Viereck
	8	• Wiederholung von Quadrat, Rechteck, Trapez und Parallelogramm
		• Einführen von Rhombus und Drachenviereck
		• Eigenschaften und Begriffsbeziehungen
		• Konstruktion von Vierecken
		– *Diff.:*
		  * Arbeiten mit Mengendiagrammen
		  * Ausbilden erster Kenntnisse zur Festlegung von Begriffen durch Angabe eines Oberbegriffes und artspezifischer Merkmale
		• Finden und Anwenden das Satzes über die Innenwinkelsumme im Viereck

5.6 Körper	**10**	
Rückblick Volumen	2	• Festigung der Größenvorst. und des Umrechnens zum Volumen
Merkmale und Eigenschaften von Körpern	2	• Wiederholung von Merkmalen und Eigenschaften von Würfeln, Quadern, Pyramiden, Zylindern, Kegeln und Kugeln
Schrägbilder und Netze	4	• Wiederholung der Schrägbilddarstellung von Quadern • Schrägbilder von Pyramiden • Entwicklung des räumlichen Vorstellungsv. durch Arbeit mit Netzen – *Diff.:* Entdecken des Eulerschen Polyedersatzes
Volumen und Oberflächeninhalt von Quadern	2	• Berechnen des Oberflächeninhalts von Quadern • Wiederholung der Volumenberechnung von Quadern – Es sollten die Kenntnisse zur Arbeit mit sinnvoller Genauigkeit gefestigt werden.
5.7 Gemischte Aufgaben	**5**	Auswahl von Schwerpunkten entsprechend der Klassensituation • Festigung: Dreiecksarten; Seiten-Winkel-Beziehungen; besondere Linien in Dreiecken • Festigung der Winkelsätze am Dreieck und an geschnittenen Geraden • Umfang und Flächenberechnungen • Konstruktion von Bewegungen • Anfertigen von symmetrischen Mustern • Anwenden geometrischer Konstruktionen, insbesondere maßstäbliche Zeichnungen • Lösen formaler Konstruktionsaufgaben • Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens durch Arbeit mit Schrägbildern und Netzen • Kongruenz von Figuren und Körpern • Zusammengesetzte Körper (Zusatz)
Summe:	**70**	

Standpunkte und Hinweise zur Behandlung des Themas

Entwicklung von Vorstellungen bei Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen

Mit den Begriffen Spiegelung, Verschiebung und Drehung verbinden die Schülern Vorstellungen aus dem Alltag, an die angeknüpft werden sollte. Die Abstraktion der realen Vorgänge zum mathematischen Begriff einer geometrischen Abbildung ist ein langer und anspruchsvoller Prozess, der in der Klasse 6 nur in Ansätzen begonnen werden kann.

Es gibt eine Reihe von Unterschieden in den inhaltlichen Vorstellungen zu dem bereits in Klasse 5 behandeltem Spiegelungsbegriff einerseits und Verschiebungen bzw. Drehungen andererseits, die im Unterricht beachtet werden sollten:

– Mit dem Begriff Spiegelung ist sowohl der Vorgang des Spiegelns, als das Vorliegen eines Spiegelbildes zu einem Original verbunden. Dabei werden z.T. räumliche Objekte auf eine Ebene abgebildet (Spiegelbild im Wasser). Mit Verschiebung und Drehung werden dagegen vor allem die Vorgänge des Verschiebens bzw. Drehens eines Gegenstandes erfasst. Räumliche Objekte bleiben dabei räumlich.
– Während bei einer realen Spiegelung auch das Original noch sichtbar ist, ist nach einer mechanischen Verschiebung bzw. Drehung eines Körpers immer noch nur ein Körper vorhanden, der lediglich seine Lage verändert hat. Dies ändert sich, wenn durch Verschieben bzw. Drehen z. B. einer Schablone Muster und Ornamente hergestellt werden. Hierbei wird aber meist die Verschiebung bzw. Drehung mehrmals nacheinander ausgeführt, so dass eine Reihe von deckungsgleichen Figuren vorhanden ist. Eine erneute Spiegelung einer Figur (an der gleichen Spiegelgeraden) führt dagegen wieder auf die Ausgangsfigur zurück.

– Während bei einer Verschiebung bzw. Drehung das Aussehen der Figur meist nur wenig geändert wird, sieht eine gespiegelte Figur oft anders aus als das Original (z. B. Spiegelschrift).

Die Vorstellung der geometrischen Abbildungen als mechanische Bewegungen sind für die meisten Verwendungen der Abbildungen bis zur Klasse 10 ausreichend und oft sinnvoll:

– Beim Konstruieren von Bewegungen kann durch das gedankliche Ausführen einer solchen mechanischen Bewegung das Ergebnis der Aufgabe gut vorhergesehen und skizziert werden.
– Für das Finden von Begründungen durch Betrachten von Bewegungen ist die Vorstellung der mechanischen Bewegung von Strecken oder Teilfiguren ausreichend und sinnvoll.
– Der Kongruenz- und der Ähnlichkeitsbegriff wird als Relation zwischen zwei Figuren gebildet. Die Vorstellung einer Abbildung einer Ebene auf sich ist nicht erforderlich.
– Bei der Bildung des Funktionsbegriffes ist ein Bezug zu geometrischen Abbildungen als Beispiel für Funktionen nicht erforderlich und wird auch kaum verständlich.

Ansätze für Verallgemeinerungen, die erst in der Oberstufe bei der Behandlung der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra benötigt werden, sind in folgender Weise möglich:

– Es kann verdeutlicht werden, dass es bei den Bewegungen nur auf den Ausgangs- und den Endzustand ankommt.
– Es werden öfter die Begriffe Original und Bild mit den entsprechenden Bezeichnungen (A’) verwendet.
– Es wird die Abbildung von Punkten und nicht nur von Figuren betrachtet. Damit wird deutlich, das eine gegebene Abbildungsvorschrift im Prinzip auf jeden Punkt der Ebene angewendet werden kann.

Verhältnis von Identifizierungen und Realisierungen von Bewegungen

Es wird empfohlen, den Aufgaben zur Identifizierung von Bewegungen (Erkennen, ob eine Figur oder Teile einer Figur auf eine andere Figur oder andere Teile der Figur abgebildet werden können) aus folgenden Gründen ein größeres Gewicht beizumessen:

– Ein wichtiges Ziel der Behandlung von Bewegungen ist die Beschreibung und Analyse von Erscheinungen in der Umwelt der Schüler. Dabei geht es vor allem um das Erkennen und Beschreiben von Symmetrien (Axialsymmetrie, Verschiebungssymmetrie, Drehsymmetrie). In diesen Fällen sind das Original (das Grundmuster) und oft mehrere Bilder vorhanden und es muss die Abbildung zwischen ihnen erkannt und beschrieben werden.
– Betrachtungen zur Deckungsgleichheit von Original und Bild können motivierter erfolgen. Bei der Durchführung von Bewegungen ist es für die Schüler selbstverständlich, dass das Bild zum Original deckungsgleich ist, da mit den Vorstellungen einer mechanischen Bewegung sich die Form der Figur bei einer Bewegung nicht ändert. Bei der Identifizierung von Bewegungen ist die Deckungsgleichheit eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Bewegung. Sind die Figuren nicht deckungsgleich, können sie auch nicht durch eine Bewegung auseinander hervorgegangen sein.
– Bei den späteren Anwendungen der Bewegungen zum Finden von Begründungen bzw. Beweisen liegen in der Regel immer Original und Bild vor und es ein Bewegung zu finden, die z. B. eine Strecke oder eine andere Teilfigur auf eine andere Strecke oder Teilfigur abbildet.
– Das Können im Konstruieren von Bewegungen wird im folgenden Unterricht bei Konstruktionsaufgaben kaum noch benötigt.

Das Realisieren von Bewegungen (Herstellen bzw. Konstruieren von Figuren durch eine Bewegung) sollten mit folgenden Zielsetzungen erfolgen:

– Das Ausführen gegenständlicher Handlungen (z. B. Arbeit mit Schablonen) fördert die Entwicklung anschaulicher Vorstellungen zu den Bewegungen.
– Das Anfertigen von Ornamenten und Mustern (z. B. Parkettierungen) trägt zur Gestaltung eines projektorientierten Unterrichts bei und fördert die Entwicklung des ästhetischen Empfindens.
– Durch das Konstruieren werden die Zeichenfertigkeiten gefestigt und das Lösen von Konstruktionsaufgaben vorbereitet.

Entwicklung von Kenntnissen und Fähigkeiten im Beweisen

Mit dem Innenwinkelsatz sollen die Schüler erstmalig explizit einen vollständigen mathematischen Beweis kennenlernen. Dabei sollte an die Einstellungen und Gewohnheiten zum Begründen angeknüpft werden. Ein mathematischer Beweis ist nichts anderes als eine lückenlose Kette von Begründungen. Es sollte unterschieden werden zwischen dem Finden eines Beweises und seiner schriftlichen Darstellung. Das Entscheidende beim Beweisen ist das Finden der Beweisideen, also der Überlegungen oder Sätze, die als Begründungen verwendet werden können. Die schriftliche Darstellung eines Beweises entspricht der Ausführung des Lösungsplanes, die erst erfolgen sollte, wenn man genau weiß, wie man vorgehen möchte.

Eine wichtige Vorstufe für exakte formale Beweise, die hohe Anforderungen an das Abstraktionsvermögen stellen, sind beispielgebundene Begründungen. So kann die Grundidee des Beweises des Innenwinkelsatzes ausgehend von einem konkreten Berechnungsproblem (gegeben sind zwei Innenwinkel, die Größe des dritten ist gesucht) gefunden werden.

Das Vorgehen in konkreten Fall (Einzeichnen einer Parallelen und Berechnen aller Winkel) kann zum allgemeinen Beweis mit Variablen verallgemeinert werden.
Der mathematische Beweis sollte von andern Formen des Beweisens in den Natur- und Gesellschaftswissenschaften abgegrenzt werden, ohne diese Formen zu diskreditieren. Das Ausmessen der Winkel vieler Dreiecke ist bei Berücksichtigung der unterschiedlichen Dreiecksarten durchaus von großer Beweiskraft und dürfte alle Schüler von der Richtigkeit des Satzes überzeugen. Das besondere eines mathematischen Beweises ist, dass man ohne Messen auskommt und alleine durch Überlegungen eine Begründung für die Richtigkeit der Aussage finden kann.
Als Motiv für das Führen eines Beweises sollten in der Regel nicht Zweifel an der Richtigkeit der Behauptung herangezogen werden. Dies ist meist wenig glaubwürdig, zumal wenn der Satz durch Verallgemeinerung aus Beispielen gefunden wurde und die Schüler die Erfahrung gemacht haben, dass sich die im Unterricht gefundenen Vermutungen stets als richtig erweisen. Hauptmotiv für einen Beweis sollte das Suchen nach einer lückenlosen und möglichst kurzen Kette von Begründungen sein.
Eine wichtige heuristische Strategie beim Finden von Beweisideen ist das Rückwärtsarbeiten. Analog dem Vorgehen bei Sachaufgaben wird vom Gesuchten, der Behauptung, ausgegangen. Es kann nun gefragt werden, woraus die Behauptung unmittelbar folgen würde bzw. welche Sätze eine ähnliche Behauptung haben und somit als Beweismittel dienen könnten. Beim Finden des Beweises des Innenwinkelsatzes (bzw. bei einem konkreten Berechnungsproblem) sind folgende Überlegungen in dieser Richtung möglich:

– Da die Summe zweier Nebenwinkel 180˚ beträgt, müsste versucht werden, einen Nebenwinkel eines Innenwinkels in eine Summe aus den anderen beiden Innenwinkel zu zerlegen.
– Da ein gestreckter Winkel 180˚ beträgt, müsste versucht werden, alle drei Innenwinkel zu einem gestreckten Winkel zusammenzulegen.

Wurde auch der Satz über entgegengesetzt liegende Winkel behandelt, ist noch ein dritter Zugang möglich, der sofort zum Einzeichnen der Parallele führt.

Behandlung des Begriffes Kongruenz

Es sollte keine Definition der Kongruenz im engen Sinne erfolgen, sondern ein System von Aussagen und Merkmalen in seiner Gesamtheit und Verflechtung vermittelt werden. Dazu gehören folgende Merkmale und Beziehungen:

– Kongruent können nur zwei (oder mehrere) Figuren zueinander sein.
– Kongruent heißt deckungsgleich. Bei Strecken, Winkel, Kreisen und Quadraten kann man anstelle „kongruent“ auch „gleich“ oder „gleich groß“ sagen.
– Kongruente Figuren stimmen in Form und Größe überein.
– In kongruenten Figuren sind alle einander entsprechenden Seiten und Winkel gleich groß.
– Durch eine Spiegelung, Verschiebung, Drehung oder eine Hintereinanderausführung dieser Abbildungen lassen sich kongruente Figuren aufeinander abbilden.
– Durch eine Spiegelung, Verschiebung, Drehung oder eine Hintereinanderausführung dieser Abbildungen kann man zu einer Figur eine zu ihr kongruente erzeugen.

Der Kongruenzbegriff sollte für beliebige Figuren gebildet und erst dann auf Dreiecke eingeschränkt werden. Als Zusatz kann auch auf die Kongruenz von Körpern hingewiesen werden.
Es sollten auch materielle Handlungen (zur Deckung bringen) sowie das Messen und Vergleichen entsprechender Strecken und Winkel geplant werden.

Konstruktion von Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden

Es wird ein problemhafte Erarbeitung der Konstruktionen empfohlen, um das Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben weiter vorzubereiten. Als Orientierung für die Lösungsverfahren ist die Verwendung einer Raute (ohne den Begriff zu verwenden) möglich. Damit kann auch eine Begründung der Konstruktionen mithilfe der Eigenschaften gleichschenkliger Dreiecke erfolgen, so dass Kongruenzsätze nicht benötigt werden. Für spätere Anwendungen sollten Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende als Punktmengen mit bestimmten Eigenschaften charakterisiert und entsprechende Umkehraufgaben gelöst werden (Wo liegen Punkte mit diesen Eigenschaften?).
Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende sollten mit Zirkel und Lineal gezeichnet werden, da diese Linien mit einem Geodreieck in den meisten Fällen nicht oder weniger effektiv zu zeichnen sind. Beim Errichten von Senkrechten und Fällen eines Lotes sollte wie bisher mit einem Geodreieck gearbeitet werden, da es viel einfacher und ebenso genau ist.

Konstruktion von Dreiecken

Es wird nicht empfohlen, die Aufgaben zum Konstruieren von Dreiecken auf der Grundlage der Kongruenzsätze zu typisieren und jeweils ein spezielles (algorithmisches) Konstruktionsverfahren zu vermitteln. Das Konstruieren von Dreiecken sollte in eine allgemeine Vorgehensweise zum Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben eingeordnet und als Lösen problemhafter Aufgaben behandelt werden. Diese Vorgehensweise (Methode der Bestimmungslinien) wurde bereits bei den Konstruktion von Bewegungen und bei der Konstruktion von Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden vorbereitet. Sie lässt sich ebenso auf die Viereckskonstruktionen und die Konstruktion von Schrägbildern und Zweitafelbildern anwenden.

Die Hauptschritte beim Lösen einer geometrischen Konstruktionsaufgabe können als Analogie zu den Hauptschritten beim Lösen von Sachaufgaben erarbeitet werden. Es ist allerdings sinnvoll, die beiden ersten Schritte zum Lösen von Sachaufgaben zu einem Schritt zusammenzuziehen, da das Erfassen des Sachverhaltes beim Lösen der formalen Konstruktionsaufgaben in der Regel nicht erforderlich ist. Ist die Konstruktionsaufgabe in einen außermathematischen Sachverhalt eingebettet, so ist sie zunächst als Sachaufgabe zu behandeln und erst nach der Mathematisierung als Konstruktionsaufgabe anzusehen. Der vierte Schritt beim Lösen einer Konstruktionsaufgabe, der in der Fachsprache als Determination bezeichnet wird, entspricht ebenfalls nicht im vollen Umfang dem letzten Schritt beim Lösen von Sachaufgaben. Er spiegelt eine Besonderheit des Lösens von Konstruktionsaufgaben, die häufige Existenz mehrerer z.T. kongruenter Lösungen, wider.
Bei der Formulierung der Konstruktionsaufgaben wurde die in der Fachsprache übliche Sprechweise „Konstruiere ein Dreieck aus....“ möglichst vermieden und die Formulierung „Konstruiere alle Dreiecke aus...“ verwendet, um die Schüler deutlicher auf die Suche nach allen Lösungen zu orientieren. Die Aufgabenstellung „Konstruiere ein Dreieck....“ ist formal bereits erfüllt, wenn eine Lösung gefunden wurde.
Die Bezeichnung „Stücke eines Dreiecks“ sollte nicht auf Seiten und Winkel eingegrenzt, sondern im Sinne von „gegebene Angaben“ verwendet werden, d.h. auch Höhen, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende und andere Linien können Stücke sein.
Das Konstruieren von Dreiecken wird mit Blick auf spätere Anwendungen gleich mit dem Anfertigen maßstäblicher Zeichnungen verbunden, aus denen die Größe von Strecken und Winkeln durch Messen näherungsweise ermittelt werden kann.

Behandlung der Methode der Bestimmungslinien

Die Methode der Bestimmungslinien ordnet sind in die allgemeine Vorgehensweise zum Lösen von Konstruktionsaufgaben als Möglichkeit zum Finden von Lösungsideen ein.
Die Grundgedanken der Methode ergeben sich aus dem Rückführungs- und dem Zerlegungsprinzip.
Alle Konstruktionsaufgaben lassen sich auf das Bestimmen von Punkten zurückführen. Dies ist später insbesondere für die Konstruktion von Schräg- und Zweitafelbildern von Bedeutung.
Punkte können mit Ausnahme des ersten oder der ersten Punkte einer Konstruktion nur als Schnitt zweier Linien festgelegt werden. Der entscheidende Gedanke und auch gleichzeitig das schwierigste Problem bei der Aneignung der Methode ist die Zerlegung des Problems der Schnittpunktbestimmung in zwei voneinander unabhängige Teilprobleme, nämlich die Ermittlung je einer der beiden Linien, die die Lage des Punktes bestimmen. Dazu werden die Bedingungen, die der Punkt erfüllen soll, einzeln für sich betrachtet und zunächst alle Punkte bestimmt, die je eine der Bedingungen erfüllen. Die beiden Bedingungen für den gesuchten Punkt ergeben sich aus den gegebenen Stücken. Dazu sind aber weitere Überlegungen erforderlich, da der Zusammenhang zwischen gegebenem Stück und damit verbundener Bedingung bzw. Eigenschaft des Punktes nicht auf der Hand liegen. So ist mit einer gegebenen Dreieckseite der Abstand des gesuchten Punktes zu einem Eckpunkt festgelegt und alle Punkte, die diese Bedingung erfüllen, liegen auf einem Kreis. Ist eine Höhe gegeben, so ist der Abstand eines Punktes von einer Geraden festgelegt und alle Punkte, die diese Bedingung erfüllen liegen, auf einer Parallelen zu dieser Geraden.
Der gesuchte Punkt bzw. bei mehreren Lösungen die gesuchten Punkte sind dann alle Schnittpunkte der beiden Bestimmungslinien. Um alle Lösung zu finden und den Grundgedanken der isolierten Betrachtung der beiden Linien zu verdeutlichen, sollten die Linien möglichst vollständig gezeichnet und keinesfalls auf kleine Kreisbögen reduziert werden.
Die Bezeichnung „Methode der Bestimmungslinien“ braucht nicht vermittelt werden, da sie entbehrlich ist. In der Fachsprache sind auch die Bezeichnungen „Methode der Punktmengen“ oder „Methode der geometrischen Örter“ üblich.
Zur Aneignung der Methode sind spezielle Aufgabenstellungen und ein zielgerichtetes Arbeiten erforderlich. Vor dem Lösen der üblichen Konstruktionsaufgaben für Dreiecke sollten nacheinander folgende Aufgabengruppen behandelt werden:

- Konstruktion aller Punkte, die eine Bedingung erfüllen
- Konstruktion aller Punkte, die zwei Bedingungen erfüllen
- Ermittlung der Bedingung und der dazugehörigen Bestimmungslinie aus einem gegebenen Stück
- Ermittlung der zwei Bedingungen und der dazugehörigen Bestimmungslinie bei zwei gegebenen Stücken

Arbeit mit Konstruktionsbeschreibungen

Zu einer formalen mathematischen Lösung einer Konstruktionsaufgabe gehört eine Konstruktionsbeschreibung, während die Ausführung der Konstruktion nicht erforderlich ist. Allerdings muss dann auch der Beweis durchgeführt werden, dass alle nach der Beschreibung konstruierten Figuren den gegebenen Bedingungen entsprechen. Dieses Vorgehen ist für die Schule ungeeignet, da es gemessen an der Bedeutung der Aufgaben zu hohe Anforderungen stellt.
Das Beschreiben von Konstruktionen ist eine gute Möglichkeit zur sprachlichen Schulung im Mathematikunterricht und sollte als kommentierendes Arbeiten genutzt werden. Wird ein Lösungsplan nach der Methode der Bestimmungslinien aufgestellt, so erübrigt sich die schriftliche Fixierung einer Konstruktionsbeschreibung, da durch den Plan die Handlung hinreichend beschrieben werden.