3.6 Gemischte Aufgaben	**4**	• Integration der Kenntnisse zum formalen und inhaltl. Lösen von Gleichungen und Ungleichungen • Entwicklung des Könnens im Lösen von Sachaufgaben • inhaltliches Lösen von Gleichungen • formales Lösen von Gleichungen • geometrische Textaufgaben • Aufgaben mit einer Unbekannten • Aufgaben mit mehreren Unbekannten • Mischungs- und Füllaufgaben • Bewegungsaufgaben
Summe:	**24**	

Standpunkte und Hinweise zur Behandlung des Themas

Bedeutung des inhaltlichen Lösens von Gleichungen und Ungleichungen

Das inhaltliche Lösen ist auch nach der Behandlung algorithmisch-kalkülmäßiger Lösungsverfahren weiterhin eine Lösungsmöglichkeit, die bei einfachem Zahlenmaterial und einfachen Gleichungsstrukturen sinnvoll anzuwenden ist. Analog zum Herangehen an die Lösung numerischer Aufgaben (Erst überprüfen, ob eine Lösung im Kopf möglich ist und dann erst schriftlich oder mit dem Taschenrechner rechnen) sollte auch für algebraische Aufgaben eine entsprechende Einstellung und Gewohnheit zur Überprüfung rationeller, inhaltlicher Lösungsmöglichkeiten entwickelt werden. Es ist allerdings der Gefahr zu begegnen, dass bei zu starken Betonung inhaltlichen Lösens, die Motivation für das kalkülmäßige Lösen verloren geht. Es ist sinnvoll, bei der Erstfestigung der Umformungsregeln einfaches Zahlenmaterial zu verwenden, sodass oft auch eine Lösung im Kopf möglich wäre. Um diese Gefahr zu verringern sollte das algorithmisch-kalkülmäßige Lösen deutlich als ein anderes Herangehen abgesetzt werden, das zuerst an einfachen Beispielen, die zur Kontrolle auch inhaltlich gelöst werden können, einzuüben ist, bevor es dann seine Tragfähigkeit und Überlegenheit an schwierigen Gleichungen zeigen kann. Erst nach Beherrschung des kalkülmäßigen Lösens sollte das Lösungsverfahren wieder freigestellt werden.
Es sollten möglichst solche Aufgaben gewählt werden, die nicht ohne weiteres im Kopf zu bewältigen sind.
Von den Verfahren zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen, die in der 5 und 6. Klasse eingeführt wurden, ist besonders das Zerlegen der Zahlen und das Umkehren der Rechnung auch weiterhin von Bedeutung. Für das inhaltliche Lösen von Ungleichungen ist dagegen besonders das systematische Probieren und mit Einschränkungen das Umkehren der Rechnung geeignet, während ein Zerlegen von Zahlen nicht weiterhilft.

Entwicklung eines syntaktischen Gleichungsbegriffes

Die Schüler haben das *Gleichheitszeichen* bis zur Klasse 7 vor allem als gerichtetes Zeichen (von links nach rechts) kennen gelernt, d.h. die beiden Seiten der Gleichungen haben verschiedene Bedeutung:

- Lösen von Rechenaufgaben: $2 \cdot 4 = 12$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- Bestimmen des kgV: kgV(6; 8) = 24
- Lösen von Gleichungen mit einer Variablen: $8 \cdot x + 13 = 37$; $(x - 2{,}25) : 0{,}5 = 8$
- Angabe der Lösung einer Gleichung: $x = 3$
- Umrechnen von Größen: 3,4 km = 3400 m
- Arbeiten mit Umfangs- und Inhaltsformeln: $u = 2 \cdot (a + b)$; $A = a \cdot b$
- Angabe von Zuordnungen (oft mit Entspricht-Zeichen): 4 kg ≙ 7,96 €
- beim Lösen von Prozentaufgaben: $W = p\% \cdot G$
- beim Arbeiten mit dem Taschenrechner Gleichheitszeichen – Taste als Ergebnistaste

Auf der linken Seite eine Gleichungen steht in solchen Fällen

- was berechnet werden soll (die Aufgabe),
- eine Rechnung mit einer Unbekannten,
- die Unbekannte,
- die Größe, die umgerechnet werden soll,
- eine Größe, die mithilfe der Formel berechnet werden kann,
- die Größe, der eine andere zugeordnet werden soll.

Auf der rechten Seite steht dann
- das Ergebnis der Rechnung mit den Zahlen oder der Unbekannten,
- die Lösung der Gleichung,
- die umgerechnete Größe,
- eine Rechenausdruck mit Größen,
- eine Größe, die der links stehenden zugeordnet werden kann.

Diese gerichtete Auffassung des Gleichheitszeichen ist im Schüler fest verankert und hat auch weiterhin beim Arbeiten mit Formeln, beim Rechnen mit dem Dreisatz, z. T. auch beim Lösen von Gleichungen (Ordnen: Unbekannte links) ihre Bedeutung. Es ist also nicht erforderlich und lernpsychologisch ohnehin kaum möglich, die bisherigen Vorstellungen abzulegen und von nun an völlig neue zu entwickeln. Die Schüler brauchen nicht vergessen, was sie bisher gelernt und geglaubt haben. Die bisherigen Vorstellungen zu Gleichungen sind eine mögliche und in vielen Fällen durchaus sinnvolle Betrachtungsweise.

In folgenden Fällen haben die Schüler die beiden Seiten der Gleichung als *gleichberechtigt* erlebt:
- beim Formulieren von Rechengesetzen: $a + b = b + a$
- als Quotienten- oder Produktgleichheit ; $\frac{x€}{3kg} = 1{,}99\ \frac{€}{kg}$; $4 \cdot x = 6 \cdot 12$
- beim Auftreten von Gleichungen mit der Variablen auf beiden Seiten: $x + x = x \cdot x$

Das *Anwenden von Umformungsregeln* zum Lösen von Gleichungen setzt aber eine rein syntaktische Auffassung der Gleichung voraus. Die Schüler müssen sich in diesem Fall von der Links-Rechts- bzw. Aufgabe-Resultat-Auffassung lösen und Gleichungen als rein formale Zeichenketten ansehen. Analogiebeziehungen zum Arbeiten eines Taschenrechners oder PC sind möglich.
Die syntaktische oder formale Betrachtung einer Gleichung sollte neben die inhaltliche Betrachtungsweise als eine völlig andersartige gestellt werden, deren Sinn in einer formalisierten Arbeitsweise besteht, was viele Schüler ja durchaus anstreben. Damit ergeben sich wesentliche Erleichterungen beim Arbeiten mit Termen und beim Lösen von Gleichungen, allerdings erst, wenn man die formalen Regeln auch beherrscht.
Die syntaktische oder formale Auffassung wird oft den Schüler erstmalig bewusst, wenn die Variable auf beiden Seiten der Gleichung auftritt, also ein Ordnen erforderlich ist. Dies ist deshalb ein Knotenpunkt der Entwicklung.
Es ist nicht erforderlich, die syntaktische Auffassung auch für Gleichungen ohne Variable zu auszubilden.
Dass z. B. 3 = 4 auch eine Gleichung im formalen Sinne ist, ist zwar überraschend, erstaunlich oder auch lustig, für Schüler aber kaum verständlich zu machen und für das formale Umgehen mit Gleichungen ohne größere Bedeutung. Dementsprechend wird die Bezeichnung von Zahlen als Terme möglichst vermieden.

Grundbegriffe der Gleichungslehre

Der Begriff *Aussage* ist den Schülern aus dem Alltag bekannt und wurde in den bisherigen Lehrbüchern der Klassen 5 bis 7 sehr häufig verwendet. Es kann also davon ausgegangen werden, dass die Schüler hinreichende Vorstellungen zum Begriff Aussage besitzen.

Auf den Begriff *Aussageform* kann verzichtet werden, da er keine neuen Einsichten vermittelt, die nicht auch ohne ihn ausgedrückt werden können. Im späteren Mathematikunterricht wird er ebenfalls nicht benötigt.

Die Begriffe *Lösung, lösen und erfüllen* sind den Schülern aus den Klassen 1 bis 7 bekannt und können im bisherigen Sinne verwendet werden.

Die Angabe eine *Lösungsmenge* sollte nur erfolgen, um die Schüler an die Mengenschreibweise mit geschweiften Klammern zu erinnern (Kl. 6 Teilbarkeit). Lösungsmengen sollten nur angegeben werden, wenn mehrere diskrete Lösungen vorhanden sind. Es ist allerdings auch eine Aufzählung möglich, z. B. $x = -1; 2; 3{,}5; 5$.

Betrachtungen zum *Grundbereich* sind bei einigen Anwendungen wichtig, um die erhaltenen Lösungen auf Brauchbarkeit zu untersuchen. Dies ergibt sich aber meist aus dem vorliegenden Sachverhalt. Umfangreiche Übungen zum Lösen von Gleichungen in verschiedenen Grundbereichen werden nicht für erforderlich gehalten. Auch eine Angabe des Grundbereiches bei jeder Gleichung ist nicht notwendig, es reicht ein genereller Hinweis, dass immer der umfassende Grundbereich gemeint ist. Wichtig ist jedoch, die Schüler daran zu gewöhnen, zu Beginn der Lösung einer Gleichung oder Ungleichung immer mögliche Einschränkungen des Grundbereiches zu überprüfen, die sich aus Einschränkungen bei Rechenoperationen (Nenner verschieden Null, Radikand größer Null) ergeben. Die ist insbesondere für die Anwendung der Umformungsregeln von Bedeutung.
Es muss mit Blick auf den Begriff der Äquivalenz von Gleichungen und die Umformungsregeln jedoch die Einsicht vermittelt werden, dass zu jeder Gleichung prinzipiell die Angabe eines Grundbereiches gehört.

Umformungsregeln für Gleichungen

Die Umformungsregeln werden unter Verwendung eines Waagemodells erarbeitet, da diese inhaltliche Interpretation einer Gleichung für das Lösen von Gleichungen ausreichend ist und mit dem Modell ein wesentlicher Aspekt (auf beiden Seiten das Gleiche machen) veranschaulicht werden kann. Allerdings muss ein Beschränkung auf positive Zahlen erfolgen.

Die Umformungsregeln werden gleich für Terme und nicht extra für Zahlen formuliert, da dies mathematisch nicht erforderlich ist und beim Lösen von Gleichungen und insbesondere beim Umstellen von Gleichungen oft mit Termen operiert werden muss. Die Regeln werden zudem kürzer und lassen sich einfacher merken.

Oft wird in Lehrbüchern das Multiplizieren und Dividieren mit Termen sogar explizit als nichtäquivalente Umformung bezeichnet, obwohl dann auch in diesen Büchern damit gearbeitet wird. Diese Auffassungen hängen mit der fehlerhaften Verwendung des Begriffes Äquivalenz von Gleichungen zusammen. So sind die Gleichungen $x = 11$ und $x^2 = 11x$ im Grundbereich $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ zueinander äquivalent. Die Gleichungen $x(x - 5) = 0$ und $x = 0$ sind ebenfalls im Grundbereich $x \in \mathbb{R}, x \neq 5$ zueinander äquivalent.

Die Umformungsregeln werden im Sinne des Erlaubten formuliert, um den Hilfscharakter zum Lösen von Gleichungen zu verdeutlichen.

Es muss den Schülern bewusst werden, dass die Umformungsregeln für beliebige Gleichungen gelten. Deshalb sollten auch andere Gleichungstypen in die Übungen einbezogen werden.

Um das Finden und Verstehen der Umformungsregeln noch deutlicher vom Lösen von Gleichungen abzuheben, wird bei der Erarbeitung und bei den Übungen zu den Umformungsregeln von einer Gleichung der Form $x = a$ ausgegangen, die dann schrittweise zu komplizierteren Gleichungen umgeformt wird. Damit erleben die Schüler gleichzeitig, wie Gleichungen entstehen. Dabei können dann auch andere Gleichungstypen gewonnen werden.

Mit den Umformungsregeln allein ist ein Lösen von Gleichungen nicht möglich. Wichtiger ist die Vermittlung einer Strategie zum Anwenden der Regeln. Deshalb wird eine Schrittfolge zum Lösen von Gleichungen vermittelt, die ein zielgerichtetes Vorgehen ermöglichen soll.

Um die Schüler auf eine geeignete Auswahl der Rechenoperation zum weiteren Isolieren der Variablen zu orientieren und eine geeignete Sprechweise einzuführen, kann die Formulierung „aufheben der letzten Rechenoperation“ verwendet werden. Dies Formulierung ist in der Mathematik üblich und dürfte den Schülern auch schon begegnet sein (Addition und Subtraktion heben sich gegenseitig auf.) Nach dem „Deutschen Universalwörterbuch“ hat „aufheben“ folgende drei Bedeutungsaspekte:

- etwas vom Boden aufnehmen; sich erheben, aufstehen; in die Höhe heben, erheben
- aufbewahren, etwas in guter Obhut haben
- nicht länger bestehen lassen; rückgängig machen; außer Kraft setzen; den gleichen Wert, die gleiche Wirkung wie etwas Entgegengesetztes haben und es dadurch ausgleichen; offiziell beenden

Der dritte Aspekt entspricht etwa dem, was beim „Aufheben“ einer Rechenoperation gemeint ist.
Mit der Bezeichnung „aufheben“ wird außerdem im Unterschied zu dem üblichen „beseitigen“ oder ”auf die andere Seite bringen“ verdeutlicht, dass das Störende keineswegs verschwindet, sondern zu(r) Null oder zu(r) Eins gemacht (“gerade gebogen”) wird und erst die Null als Summand bzw. die Eins als Faktor weggelassen werden kann.

Es kann sofort der TR zugelassen werden, da er beim Lösen von Gleichungen wenig hilft.

Umstellen von Formeln

Ein wichtiges Ziel bei der Erweiterung des Gleichungsbegriffes ist die Einbeziehung von Formeln in die Betrachtungen zu Gleichungen. Für Schüler sind Formeln zwar auch Gleichungen aber etwas anderes als z. B. Gleichungen mit einer Unbekannten oder Gleichungen als Rechenaufgaben. Formeln sind aus formaler Sicht Gleichungen mit mehreren Variablen (und damit auch als Funktionen mehrerer Veränderlicher aufzufassen). Werden Formeln umgeformt, können sie als Gleichungen mit Parametern angesehen werden.

Aus Sicht der späteren Anwendungen der Algebra, vor allem in den nachfolgen Bildungsbereichen, hat das Umstellen von Formeln zumindest den gleichen, wenn nicht sogar einen höheren Stellenwert als das Lösen von Gleichungen. Es sollte deshalb von Anfang an ausreichend berücksichtigt werden.

Als Bezeichnungen für die betrachtete Handlung sind folgende Formulierungen möglich:

– „Umstellen der Formel nach ...”
– „Auflösen der Formel nach ...“
– „Umformen der Formel”

Mit den ersten beiden Formulierungen kann das Ziel besser angegeben werden. Es wird „umstellen“ verwendet, da es etwas deutlicher als „auflösen“ auf die Handlungen orientiert.

Das Umstellen von Formeln stellt höhere Anforderungen an die Schüler, als das Lösen einer Gleichung, da mehrere Variable zu betrachten und unterschiedlich zu behandeln sind. Aufgaben zum Umstellen von Formeln sollten deshalb vorrangig in entfalteter Form unter Einsatz grafischer Mittel (farbiges Markieren der Größe, nach der umgestellt werden soll) gelöst werden. Das Umstellen von Formeln wird dabei als Anwendung der Umformungsregeln behandelt.

Lösen von Sachaufgaben

Das Lösen von Sachaufgaben kann zur Ausbildung des inhaltlichen Verständnisses für das Arbeiten mit Variablen, Termen und Gleichungen beitragen. Der Schwerpunkt wird in der Ausbildung folgender Teilhandlungen gesehen:

- Einführen geeigneter Bezeichnungen für gegebene und gesuchte Größen
  (Aspekte und Verwendung des Variablenbegriffs)
- Übersetzen von Sachverhaltsbeschreibungen in Terme
  (Bedeutung und Konventionen bei Termen)
- Aufstellen von Gleichungen zu Zusammenhängen
  (Aspekte des Gleichungsbegriffes)

Bei Übersetzen von Texten sollte als Kontrollhandlung das Einsetzen von Zahlen ausgebildet werden.

Ein Ziel des Stoffabschnittes ist es weiterhin, die Verwendungsaspekte der Rechenoperationen zu festigen. Bei den Übungen zur Übertragung von sprachlichen Formulierungen in mathematische Zeichenketten werden auch die wichtigsten sprachlichen Varianten für jede der Rechenoperationen berücksichtigt.

Bei der Einführung von Bezeichnungen wird besonders darauf geachtet, dass die Schüler die Bezeichnung des realen Objektes und seiner quantitativen Eigenschaften auseinander halten. So wird angeregt, auch wörtliche Beschreibungen der gegebene bzw. gesuchten Größen zu notieren. Weiterhin sollte das Überprüfen der aufgestellten Gleichungen durch ein Zahlenbeispiel zur festen Gewohnheit werden.

Bei Sachaufgaben mit mehreren Unbekannten sollte schon beim Erfassen eine Reduzierung auf eine Variable erfolgen.

Ein Schwerpunkt des Lösens von Sachaufgaben sollte das sinnvolle Arbeiten mit Tabellen und Skizzen sein. Dazu sind im Abschnitt 7.1 „Lösen von Sachaufgaben“ weitere Aufgaben vorhanden. Eine wichtige Anwendung des Arbeitens mit Tabellen ist beim Lösen von Bewegungsaufgaben möglich. Bei Mischungsaufgaben führt eine geeignete Skizze leicht zur Lösung.