

Wissenschaftliche und methodologische Grundpositionen zur Herausgabe einer Lehrbuchreihe „Mathematik“

1. Gegenstand und Methode einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht

Standpunkte:

Der hauptsächliche Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen zum Mathematikunterricht sind die Entwicklungsprozesse des mathematischen Wissens und Könnens von Schülern unter den Bedingungen des Klassenunterrichts in einer historisch und regional konkreten Situation.

Die Hauptmethoden zur theoretischen Analyse des Gegenstandes sind:

- Analyse der zu entwickelnden Kenntnisse als System ihrer inhaltlichen und formalen Beziehungen
- Analyse der geistigen und manuellen Tätigkeiten beim Lösen von Aufgaben als Einheit von elementaren und komplexen Handlungen

Bei der Analyse und Konzipierung von Entwicklungsprozessen wird von einem fiktiven Schüler und einer fiktiven Klasse ausgegangen, Es ist dabei nicht an einen Durchschnittsschüler oder eine Durchschnittsklasse gedacht, sondern es werden möglichst viele Probleme und Schwierigkeiten berücksichtigt. Es wird versucht, den neuen Stoff in die bisherige Vorstellungswelt und das aktuelle Können des fiktiven Schülers einzuordnen und eine weitere Phase der Entwicklung zu konzipieren. Bei der Planung dieser Prozesse wird von den zeitlichen Bedingungen für den Unterricht in der fiktiven Klasse ausgegangen und eine Minimalvariante konzipiert, die eine Realisierung aller Ziele auf dem untersten Niveau ermöglicht.

Leider sind in der didaktischen Literatur nur wenige Resultate solcher komplexer und unterrichtsbezogener Analysen zu finden, so daß in den meisten Fällen eigene Überlegungen angestellt werden müssen. Dabei sind aber die zahlreichen Einzelergebnisse didaktischer Forschungen und die hinter den vorhandenen Lehrbüchern stehenden Ansätze einer konstruktiven Synthese zu unterziehen.

Neben einer theoretischen Analyse werden vorliegende Ergebnisse empirischer Untersuchungen zu Kenntnissen, Vorstellungen und Leistungen der Schüler sowie Bedingungen und Resultaten des Klassenunterrichts ausgewertet.

Die bisherige Erfahrung zeigt, daß mit der verwendeten Methode zahlreiche Mängel in der Struktur, der Art und dem Umfang der vorhandenen Aufgabentypen in den bisherigen Lehrbüchern und damit auch dem Unterricht aufgedeckt und neuen Einsichten und Herangehensweisen zur Mehrzahl der behandelten Themen gefunden werden können.

Auf Grund der großen Komplexität, Vielschichtigkeit und Unschärfe des Zielsystems gibt es stets mehrere Möglichkeiten für sinnvolle Unterrichtskonzepte, die sich vor allem in der Reihenfolge, der Art der Verflechtungen und der Akzentuierung einzelner Ziele unterscheiden.

Konsequenzen für die Lehrbuchentwicklung:

Die Lehrbuchentwicklung kann sich nicht darauf beschränken, nach Sichtung vorhandener Literatur und unter Verwendung der eigenen Unterrichtserfahrungen eine Zusammenstellung von Texten und Aufgaben vorzunehmen. Da die äußere Qualität der vorhandenen Lehrbücher in der Kürze der Entwicklungszeit kaum erreicht oder überboten werden kann, ist die inhaltliche Qualität der entscheidende Ansatzpunkt und Rechtfertigungsgrund für die Neuentwicklung und damit auch das wichtigste Kaufargument.

Vor der bzw. in enger Verbindung mit der Text- und Aufgabenentwicklung wird die Weiterentwicklung des Systems des Wissens und Könnens des fiktiven Schülers diskutiert und konzipiert sowie ein fiktiver Unterrichtsprozeß geplant. Die Unterrichtsplanung beinhaltet die Auswahl der Unterrichtsschwerpunkte und ihres zeitlichen Umfangs sowie die Zuordnung von möglichen Aufgaben zu jedem Schwerpunkt. Resultate dieser Überlegungen werden als Standpunkte und Stoffverteilungsvorschläge in die Lehrerhandreichung aufgenommen.

Es ist kaum möglich von einem Lehrbuch zum anderen Konzepte von Entwicklungsprozessen zu ändern. Jedes neue Buch muß an die bisherigen Linienführungen anknüpfen.

Es müssen bei allen Überlegungen die Vorstellungen, Kenntnisse und Erfahrungen der Lehrer¹ sowie die aktuellen Unterrichtsbedingungen berücksichtigt werden. Neue Aufgabentypen, Schwerpunktsetzungen oder methodische Wege bedürfen einer kritischen Erörterung und einer möglichst ausführlichen Darstellung im Leitfaden, Aufgaben zu möglichst allen Aneignungsphasen, Begründungen im Lehrerhandbuch sowie einer Überprüfung ihrer Verständlichkeit durch möglichst viele Lehrer.

¹ Der Begriff Lehrer wird als Berufsbezeichnung für beide Geschlechter verwendet.

Obwohl bei neuen methodischen Wegen in der Regel nicht von einer sofortigen Akzeptanz ausgegangen werden kann, ist bei massiver Kritik und Ablehnung eine nochmalige gründliche Prüfung aller Bedenken und ein eventueller Rückgang auf traditionelle Vorgehensweise zu erwägen.

Die Entwicklung eines solchen Lehrbuchwerkes ist deshalb nur in ständiger Wechselwirkung von vorwiegend theoretisch und vorwiegend auf die Praxis ausgerichteten Überlegungen möglich.

2. Funktionen des Mathematikunterrichts

Standpunkte:

Die Aufgaben des Mathematikunterrichts können in unterschiedliche Bezugssysteme eingeordnet werden. Unter einer Funktion des Mathematikunterrichts wird seine Rolle in einem dieser Bezugssysteme verstanden. Es können folgende Funktionen unterschieden werden.

- (1) Funktion in Bezug auf die bisherigen Bildungswege (4)
- (2) Funktion im System der parallel laufenden Unterrichtsfächer (7)
- (3) Funktion in Bezug auf die weiteren Bildungswege (6)
- (4) Funktion in Bezug auf die Bewältigung der mathematischen bzw. mit der Mathematik verbundenen Anforderungen im persönlichen, beruflichen und gesellschaftlichen Leben eines Bürgers unserer Gesellschaft (9)
- (5) Funktion bei der Bewahrung und Weiterentwicklung der Wissenschaft Mathematik als Teil der menschlichen Kultur (7)
- (6) Funktion bei der Persönlichkeitsentwicklung der Schüler (9)
- (7) Funktion bei der Reflexion und Gestaltung des gegenwärtigen Lebens der Schüler (3)

(Die Zahlen geben an, in wie vielen der folgenden 10 analysierten Lehrpläne zumindest gewisse Aussagen zu diesen Funktionen enthalten sind: BE, 87; HHGY, 97; MVGY, 97; NWGS, 96; NWGY, 93; NWRE, 93; SH, 95; SNGY, 92; STGY, 94; THGY, 93)

Der Mathematikunterricht muß alle Funktionen in angemessener Weise erfüllen. Jede Überbewertung oder gesonderte Diskussion einzelner Funktionen führt zu Einseitigkeiten. Aus jeder Funktion ergeben sich Ziele, die z.T. übereinstimmen.

Konsequenzen für die Lehrbuchentwicklung:

Bei allen konkreten Zielen sollten möglichst Bezügen zu allen Funktionen betrachtet werden. So kann bei Überlegungen zur Entwicklung des Könnens im Lösen von Gleichungen in Kl. 7 gefragt werden:

- Welches Wissen und Können ist Klasse 1 bis 6 entwickelt worden?
- In welchen Fächern ist welches Können im Lösen von Gleichungen erforderlich?
- Welche Rolle spielt das Lösen von Gleichungen in der Berufsausbildung und im Studium?
- Was sollten man im Alltag zu Gleichungen wissen und können?
- Wie hat sich das Lösen von Gleichungen in der Mathematik entwickelt?
- Welche Charaktereigenschaften können beim Lösen von Gleichungen günstig entwickelt werden?
- Welche aktuellen Probleme können mit Hilfe von Gleichungen formuliert bzw. bearbeitet werden?

3. Ziele des Mathematikunterrichts und ihre Struktur

Standpunkte:

Unter einem **Ziel** wird ein spezielles System von Kenntnissen, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Einstellungen u.a. Persönlichkeitseigenschaften verstanden, das im Mathematikunterricht bei den Schüler auszubilden ist.

Ziele des Mathematikunterrichts können unter drei Aspekten betrachtet werden sind:

1. Grad der Aneignung
 - Stufe 1: Aneignung erster Vorstellungen und Einsichten, temporärer Fertigkeiten, elementarer Fähigkeiten
 - Stufe 2: Aneignung eines soliden und anwendungsbereiten Wissens und Könnens
 - Stufe 3: Aneignung stets verfügbarer disponibler Kenntnisse, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einstellungen
2. Grad der Fachspezifik
 - a) Fachspezifische Ziele, für die der Mathematikunterricht die Hauptverantwortung trägt. z.B. Rechnen mit Brüchen
 - b) Ziele mehrerer Fächer, insbesondere der naturwissenschaftlichen Fächer, z.B. Entwicklung von Größenvorstellungen, Entwicklung einer funktionalen Denkweise
 - c) Allgemeine Lernziele (Ziele aller Fächer), z.B. Schöpferische Fähigkeiten, soziale Kompetenzen
3. Spezifik der Schulart

Der Hauptansatz zur Bewältigung der Stoff-Zeit-Problematik im Mathematikunterricht wird in einer konsequenten Gewichtung der Ziele hinsichtlich ihres Grades der Aneignung und nicht in einem mehr

oder weniger eingeplanten Verzicht gesehen. Damit soll sowohl der Sicherung des grundlegenden Wissens und Könnens (Stufe 3) als auch der kontinuierlichen Entwicklung mathematischer Denk- und Arbeitsweisen ein stärkeres Gewicht gegeben werden.

Mit dem Begriff **Wissen und Können** (oft nur kurz als **Können** bezeichnet, da Können eigentlich auch Kenntnisse beinhaltet) werden Systeme von Persönlichkeitseigenschaften bezeichnet, in denen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten und Gewohnheiten dominierend sind.

Unter einer **Entwicklungslinie** (Linienführung) im Mathematikunterricht wird ein über mehrere Klassenstufen verlaufender Prozeß der Aneignung eines Ziels oder einer Gruppe von Zielen des Mathematikunterrichts verstanden. Entwicklungslinien können häufig durch ein sich änderndes Wechselverhältnis zweier unterschiedlicher Aspekte (z.B. Verhältnis von inhaltlichem und algorithmischen Lösen von Gleichungen) charakterisiert werden.

Als Hauptansatz zur Strukturierung der Ziele des Mathematikunterrichts wird das System der Entwicklungslinien verwendet. Daraus ergibt sich ein am schrittweisen Lernen und Verstehen der Schüler ausgerichteter Aufbau des Mathematikunterrichts, der sich sowohl von der hauptsächlichlichen Orientierung des Mathematikunterrichts an der Fachsystematik als auch von einem nur an wechselnden Tätigkeiten orientierten Mathematikunterricht unterscheidet.

Man kann folgende fünf Hauptgruppen von fachspezifischen Entwicklungsprozessen, zu denen jeweils einige Teilprozesse angegeben werden, unterscheiden:

1. **Entwicklung des Rechnenkönnens**

- Entwicklung von Fertigkeiten im mündlichen und schriftlichen Rechnen sowie im Arbeiten mit Rechenhilfsmitteln
- das Wissen und Können im Umgang mit Näherungswerten und Näherungsverfahren,
- die Herausbildung von Zahlen- und Größenvorstellungen,
- die Entwicklung des Verhältnisbegriffes

2. **Entwicklung des Könnens im Arbeiten mit Variablen, Termen, Gleichungen und Ungleichungen**

- die Entwicklung des Variablenbegriffes
- das Verhältnis von inhaltlichem und formalem Arbeiten mit Termen,
- das Verhältnis von inhaltlichem und kalkülmäßig-algorithmischem Lösen von Gleichungen und Ungleichungen,

3. **Entwicklung des Könnens im Arbeiten mit Funktionen**

- die Entwicklung des Funktionsbegriffes (Verhältnis von Zusammenhang und Zuordnung),
- die Entwicklung des Könnens im Arbeiten mit Graphen,
- die Entwicklung des funktionalen Denkens.

4. **Entwicklung des geometrischen Könnens**

- die Entwicklung der Vorstellungen und Kenntnisse über Unterscheidungsmerkmale, Eigenschaften und Inhaltsbestimmungen ebener und räumlicher geometrischer Figuren als Verhältnis von inhaltlich-anschaulichen und formal-rechnerischen Aspekten,
- die Entwicklung des räumlichen Wahrnehmungs-, Vorstellungs- und Darstellungsvermögens als Verhältnis des Arbeitens auf gegenständlicher, zeichnerischer oder gedanklicher Ebene,
- Entwicklung von Fertigkeiten im Umgang mit Geräten zum Zeichnen und Messen geometrischer Objekte sowie im Skizzieren und Zeichnen ebener und räumlicher Figuren.

5. **Entwicklung des stochastischen Könnens**

- die Entwicklung der Vorstellungen und Kenntnisse über zufällige Erscheinungen,
- die Entwicklung des Könnens im Erfassen, Analysieren und Interpretieren von Daten, insbesondere durch Suchen nach stochastischen Zusammenhängen,
- die Entwicklung des Wahrscheinlichkeits- und Erwartungsbegriffes,
- die Anbahnung der Entwicklung des stochastischen Schließens.

Konsequenzen für die Lehrbuchentwicklung:

Vor der Aufgabenentwicklung ist im Zusammenhang mit der Unterrichtsplanung ein Kreis von wenigen Zielen auszuwählen, bei denen ein höherer Grad der Aneignung erreicht werden soll. Für alle übrigen Ziele wird die Stufe 1 geplant.

Es ist bei den fachübergreifenden Zielen jeweils zu überlegen, welche Wechselbeziehungen zu anderen Fächern zu beachten sind. Für die naturwissenschaftlichen Fächer sind Abstimmungen mit den anderen Lehrbuchreihen des Verlages vorzunehmen.

Zur spezifischen Realisierung von Zielen aller Fächer, die gegenwärtig einen erhöhten Stellenwert erhalten, werden Zeiten und Angebote für projektorientierten Unterricht geplant.

Bei allen Stoffgebieten ist zu überlegen, welche Entwicklungslinien berührt werden, wie der Entwicklungsstand eingeschätzt und welche neue Phase konzipiert werden kann.

4. Zur Rolle der Aufgaben im Mathematikunterricht

Das Lösen von Aufgaben ist wesentliches Mittel und Hauptinhalt des Mathematikunterrichts. Aufgaben spiegeln das Ausgangsniveau, die einzelnen Phasen des Lernprozesses und das geplante Endniveau wider. Aufgaben sind das dominierende Moment eines Lehrbuches, nach dem die Qualität zuerst beurteilt wird.

Das Lösen von Aufgaben als Tätigkeit kann aber nicht mit den Zielen des Mathematikunterrichts gleichgesetzt werden. Ein Ziel ist ein System psychischer Eigenschaften. Aufgaben sind lediglich ein Mittel zur Ausbildung dieses Systems und zu seiner Überprüfung.

Ebensowenig kann eine Strukturierung der Ziele und auch der Inhalte alleine durch Gruppierung oder Klassifizierung von Aufgaben erfolgen. Aufgaben sind in der Regel multifunktional. Die Menge der Aufgaben und die Möglichkeiten ihrer Gruppierung übersteigen bei weitem die realen Möglichkeiten des Mathematikunterrichts.

Eine Beurteilung von Aufgaben kann nicht primär nach äußeren Kriterien erfolgen, sondern nach ihrer Funktionalität im Lernprozeß. Eine Aufgabe ist nicht vor allem gut oder schlecht, sondern mehr oder weniger für einen bestimmten Zweck brauchbar. Trotzdem muß eine Aufgabe in einem Lehrbuch auch strengen äußeren Kriterien entsprechen. Dazu zählen maximale Verständlichkeit und Eindeutigkeit der Anforderungen.

Zur Aufdeckung der relevanten Linienführungen in einem Stoffgebiet ist die genaue Analyse der Anforderungsstruktur möglicher Aufgaben ein entscheidendes Mittel. Es müssen Beziehungen der einzelnen Anforderungen zu den Systemen des jeweiligen Wissens und Könnens hergestellt werden.

Die Art der Formulierung einer Aufgabe ist für ihren methodischen Einsatz oft entscheidend. So werden zur Entwicklung geistiger Haltungen und eines entsprechenden Unterrichtsklimas Aufgaben mit offener Fragestellung, verschiedenen Lösungswegen und auch nicht lösbare Aufgaben benötigt. Die Konstruktion solcher Aufgaben im Kontext der geplanten Entwicklungsprozesse erfordert eine Reihe von Überlegungen.

Konsequenzen für die Lehrbuchentwicklung:

Zur Sicherung der äußeren Qualität der Aufgaben sollten sie zumindest durch einen kritischen Gutachter vollständig gelöst und durchdacht werden. Es sollten weiterhin stets die Aufgaben zusammen mit den Lösungen durch die Autoren eingereicht werden.

In angemessenem Umfang werden offene Aufgaben, Aufgaben mit verschiedenen Lösungswegen und nicht lösbare Aufgaben aufgenommen.

5. Zur Rolle von Lehrbüchern im Unterricht

Das Lehrbuch ist für die meisten Lehrer das wichtigste Hilfsmittel zur Planung und Durchführung des Unterrichts.

Lehrer sind bei ihrer normalen Unterrichtsvorbereitung in der Regel nicht in der Lage, die genannten Analysen vorzunehmen, da bei ihnen Zeit, greifbare Literatur und wissenschaftlichen Kenntnisse und Denkweisen nicht ausreichend vorhanden sind. Das Lehrbuch muß ihnen deshalb insbesondere durch die Auswahl, Anordnung und Gewichtung der Aufgaben die grundlegenden Entscheidungen zur langfristigen Planung der einzelnen Entwicklungsprozesse abnehmen.

Die Ergebnisse von TIMSS in Deutschland sind m.E. vor allem darauf zurückzuführen, daß sich Schüler und Lehrer unzureichend geistig mit den Inhalten und der Gestaltung des Unterrichts auseinandersetzen. Eine zentrale Funktion der Lehrbuchreihe sollte deshalb die Anregung einer höheren geistigen Aktivität der Schüler und Lehrer sein. Die Lehrbücher sollten deshalb einen möglichst großen Spielraum für eigene Entscheidungen des Lehrers lassen.

Je klarer die Orientierung für Eckpunkte der Entwicklung, Mindestziele und Schwerpunktsetzungen sind, desto selbständiger und kreativer können z.B. folgende methodische Entscheidungen durch den Lehrer getroffen werden:

- Welche Motivierung und Zielorientierung ist besonders geeignet?
- Welche Elemente des notwendigen Wissens und Könnens müssen in welchem Umfang lang- oder kurzfristig reaktiviert werden?
- Welche Art der Erarbeitung eines Begriffes oder eines Satzes ist geeignet? Welche Aufträge oder Beispiele sind dazu geeignet?
- Wie kann eine Erstfestigung von Begriffen erfolgen?
- Welche Aufgaben und Schwerpunkte sind die gemischten Übungen und die Klassenarbeiten auszuwählen? usw.

Konsequenzen für die Lehrbuchentwicklung:

Es werden möglichst keine methodischen Elemente wie fiktive Unterrichtsgespräche, Schüleraufträge zur Erarbeitung neuen Stoffes u.a. aufgenommen. Die Darstellungen im Leitfaden folgen nicht einem möglichen Gedankengang bei der Erarbeitung des Stoffes.

