4 Geometrie in der Ebene

Planungsvorschlag

Thema	h	Schwerpunkte und Bemerkungen
Rückblick	**2**	• Wiederholung der Dreiecksarten, Höhe eines Dreiecks, Innenwinkelsumme im Dreieck • Konstruktion von Dreiecken • Kongruenz von Figuren; Flächeninhalt von Figuren • Auftreten von Kreisen, Kreise als Schnittfiguren, • Zeichnen von Kreisen und Kreisornamenten • Wiederholung von Durchmesser, Radius, Sehne eines Kreises • Wiederholung der Winkelsätze im Dreieck, insbesondere im gleichschenkligen Dreieck • Umkreis von Dreiecken
4.1 Dreiecke Kongruenzsätze für Dreiecke Flächeninhalt von Dreiecken	**6**	• Erarbeiten der Kongruenzsätze und Anwenden zur eindeutigen Festlegung eines Dreiecks • Führen einfacher Nachweise zur Kongruenz • Wiederholung Flächeninhalt rechtwinkliger Dreiecke • Erarbeitung der Flächeninhaltsformel für beliebige Dreiecke und einfache Anwendungen • weitere Anwendungen der Flächeninhaltsformel bei Begründungen und Sachaufgaben
4.2 Vierecke und Vielecke Flächeninhalt von Vierecken Konstruktion von Vierecken und Vielecken	**6**	• Wiederholung der Vierecksarten • Herleiten der Flächeninhaltsformel für Trapeze, Parallelogramme, Rhomben und Drachenvierecke und Anwenden der Formeln bei formalen und Sachaufgaben • Konstruieren von Vierecken nach der Methode der Bestimmungslinien • Begriff und Konstruktion von Vielecken
4.3 Der Kreis Linien am Kreis	3	• Entwicklung des Könnens im Definieren: Finden verschiedener Definition des Kreises, Erkennen und Anwenden von Definitionen • Einführen von Kreisbogen, Tangente, Sekante • Lagebeziehungen von Kreisen und Geraden • Finden und Begründen des Satzes über die Orthogonalität von Tangente und Berührungsradius; – Tangenten sollten mit dem Geodreieck gezeichnet werden. • Wiederholen und Festigung der Methode der Bestimmungslinien zum Lösen von Konstruktionsaufgaben durch Bestimmen von Durchschnittsmengen • Einführen von Sehnenviereck als spezielles Viereck *Diff.:* Herleiten des Satzes über die Gegenwinkel im Sehnenviereck und Hinweis auf Tangentenviereck *Diff.:* Vertiefung der Kenntnisse zu den Vierecksarten durch Einordnen des Sehnen- und Tangentenvierecks
Der Satz des Thales	5	• Finden und Beweisen des Thalessatzes und seiner Umkehrung • Einführen von „Menge aller Punkte, von denen aus eine Strecke unter einem Winkel erscheint“; Einführen von „ Thaleskreis“ • Anwenden des Thalessatzes bei Berechnungen • Anwenden des Thalessatzes und seiner Umkehrung bei Konstruktionen
Winkel am Kreis	3	• Einführen der Begriffe Peripheriewinkel und Zentriwinkel • Finden und Beweisen des Peripheriewinkelsatzes sowie des Zentriwinkel-Peripheriewinkelsatzes • Anwenden der Sätze bei Berechnungen • Verallgemeinerung des Thaleskreises zum Kreisbogen, von dem aus eine Strecke unter einem bestimmten Winkel erscheint

Umfang von Kreisen	4	• Finden der Umfangsformel und Anwenden bei einfachen Bestimmungsaufgaben – Betrachtungen zur Geschichte von π, Vertiefen der Kenntnisse zu irrationalen Zahlen und Näherungswerten • Herleiten und Anwenden der Formel für die Länge eines Kreisbogens
Flächeninhalt von Kreisen	4	• Finden und einfache Anwendungen der Flächeninhaltsformel • Flächeninhalt zusammengesetzter Flächen • Herleiten und Anwenden der Formel / Flächeninhalt eines Kreisringes • *Diff.*: Herleiten der Formel für den Flächeninhalt eines Kreissektors
4.4 Gemischte Aufgaben	**5**	Auswahl aus folgenden Schwerpunkten: • formale Berechnungen an zusammengesetzten Figuren • Lösen von Konstruktionsaufgaben • Entwicklung des Könnens im Beweisen – Finden von Beweisideen (Methode des Rückwärtsarbeitens) • *Diff.*: Probleme des Unendlichen • Funktionale Betracht. zu linearen und quadratischen Zusammenhängen • Umfangs- und Geschwindigkeitsberechnungen • Zusammenfassung der Kenntnisse zu Dreiecken und Vierecken • Berechnung von Umfängen, Flächeninhalten oder Stücken von Vierecken, Vielecken und zusammengesetzten Flächen, dabei auch Umstellen von Formeln, Lesen maßstäblicher Zeichnungen • Anwenden geometrischer Konstruktionen, insbesondere maßstäbliche Zeichnungen • Anwenden der Flächeninhaltsformeln bei Flächenverwandlungen • Anwenden von Definitionen und Sätzen zum Finden von Begründungen bzw. Führen einfacher Beweise
Summe:	**38**	

Standpunkte und Hinweise zur Behandlung des Themas

Behandlung der Kongruenzsätze

Die Kongruenzsätze für Dreiecke können unter zwei Gesichtspunkten motiviert und angewendet werden:

– Durch wie viele und welche Stücke ist ein Dreieck bereits eindeutig festgelegt?
– Wie viele und welche Stücke muss man vergleichen, um eine Aussage über die Kongruenz zweier vorliegender Dreiecke treffen zu können?

Die Kongruenzsätze können durch funktionale Betrachtungen an beweglichen Figuren gefunden und begründet werden:

– Ein Dreieck ist eine starre Figur. Man kann es nicht ändern, ohne wenigstens eine Seite zu ändern. Mit drei gegebenen Seiten ist also ein Dreieck eindeutig festgelegt.
– Sind zwei Seiten und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben, kann man durch Drehen der kleineren Seite noch ein zweites Dreieck mit den gleichen Stücken herstellen.

Behandlung der Formel für den Flächeninhalts eines Dreiecks

Die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks sollte durch Rückführung auf rechtwinklige Dreiecke gewonnen. Dies hat folgende Vorteile:

– Die Flächeninhaltsformel für Dreiecke kann unabhängig von den Inhaltsformeln für die übrigen Vierecke behandelt werden.
– Beim Finden von Lösungsideen können eine Reihe heuristischer Vorgehensweise angewendet werden, so das Spezialisieren, Verallgemeinern und Anwenden des Rückführungsprinzips.
– Die Herleitung ist gut überschaubar und enthält als technische Schwierigkeit lediglich die Anwendung des Distributivgesetzes (Ausklammern).

Formeln für Flächeninhalt und Umfang von Vierecken

Die Flächeninhaltsformeln sollten sowohl verbal als auch in Form einer Gleichung angeeignet werden. Dabei ist zu beachten, dass es sich um zwei verschiedene Betrachtungsweisen handelt, die einander bedingen:

– Verbale Formulierungen setzen die Kenntnis von Begriffe voraus. Sie sind allgemeiner als Formeln, da sie nicht an einen speziellen Repräsentanten gebunden sind.
– Die Angabe einer Formel ist an die Vorstellung eines Repräsentanten der Objektklasse mit bestimmten Bezeichnun-

gen gebunden. Dabei wird meist eine „typischer“ Fall, also keine Sonder- oder Grenzfälle, mit einer Standardbezeichnung verwendet. Das Können im Arbeiten mit einer Formel setzt die Fähigkeit voraus, das Allgemeine der Formel erfasst zu haben, d.h. sich von den konkreten Bezeichnungen und der besonderen Lage der Figur lösen zu können. Bei einer Figur derselben Klasse mit anderen Bezeichnungen oder in anderer Lage müssen die Variable richtig zugeordnet werden können. Insbesondere bei Spezialfällen ist dies oft problematisch.

- Die Kenntnis einer Formel ist nutzlos, wenn nicht der Zusammenhang auch verbal formuliert werden kann. Mit einer verbalen Formulierung kann nur gearbeitet werden (insbesondere beim Lösen von Bestimmungsaufgaben), wenn diese auch als Formel aufgeschrieben werden kann.
- Verbale Formulierungen sind weit umständlicher und damit weit schwerer zu merken als die symbolhafte Darstellung in Form einer Formel. Zusammenhänge sollten deshalb als Kurzform in Gestalt einer Formel im Gedächtnis gespeichert werden.

Es ist nicht sinnvoll, für jede Vierecksart eine spezielle Umfangsformel zu erarbeiten und lernen zu lassen. Damit werden die Schüler nur unnötig belastet. Für die Berechnung des Umfangs eine beliebigen Vierecks ist die Kenntnis der verbalen Formulierung: „Der Umfang eines Vierecks ist die Summe seiner Seitenlängen“ ausreichend.

Vorkenntnisse zum Kreis

Die Begriffe Kreis, Mittelpunkt eines Kreises, Radius und Durchmesser sowie das Zeichnen von Kreisen kennen die Schüler bereits aus der Grundschule. Im bisherigen Unterricht traten diese Inhalte an folgenden Stellen auf:

- Kl. 5: Kreis als Darstellung einer Einheit bei Brüchen
- Kl. 6: Kreis als Darstellung einer Einheit bei Brüchen, Drehung, Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal, Umkreis und Inkreis eines Dreiecks, Kreis als Bestimmungslinie bei Dreieckskonstruktionen, Zeichnen von Kreismustern, Kreis als Grundfläche eines Zylinders und Kegels, Schrägbild eines Kreises (Zusatz)
- Kl. 7: Kreis zur Darstellung von 100%, Lesen und Zeichnen von Kreisdiagrammen, Kreis als Bestimmungslinie bei Konstruktionen von Dreiecken und Vierecken, Umkreis regelmäßiger Vielecke, Kreis als Grundfläche eines Zylinders und Kegels, Kreis als Glücksrad.

Definition des Kreises und Können im Definieren

Mit der *Definition des Kreises* kann das Können der Schüler im Definieren weiterentwickelt werden. Es werden zu diesem Zweck zwei Arten der Definition des Kreises angeboten: Definition durch Oberbegriff und artspezifische Merkmale bzw. eine genetische Definition, die gegenübergestellt und verglichen werden sollten.
Es kann als Ergänzung auch versucht werden, den Kreis als Figur mit konstanter Dicke zu definieren.

Die *Doppelbedeutung* einiger mathematischer Begriffe kann am Beispiel des Begriffes „Radius eines Kreises“ (als Strecke, d.h. ein Kreis hat unendlich viel Radien, bzw. als Länge der Strecke, d.h. ein Kreis hat nur einen Radius) verdeutlicht werden.
Am Beispiel der Unterscheidung von Kreis und Kreisfläche (in Analogie zu Viereck und Vierecksfläche) kann verdeutlicht werden, dass in einigen Fällen ein Begriff in zwei Bedeutungen verwendet wird, obwohl es durchaus zwei Begriffe gibt. Die Unterscheidung von Kreis und Kreisfläche wird im Lehrbuch entsprechend den Gepflogenheiten nicht streng eingehalten (z.B. Flächeninhalt von Kreisen und nicht von Kreisflächen, Kreis als Grundfläche eines Zylinders und nicht Kreisfläche), da aus dem Zusammenhang hervorgeht, was gemeint ist.

Der Begriff *Bogen* ist den Schülern seit der 5. Klasse als Möglichkeit zur Kennzeichnung von Winkeln vertraut. Allerdings wird ein Bogen in dieser Bedeutung von den Schülern sicher nicht stets als Teil eines Kreises angesehen, obwohl dies in den Abbildungen meist der Fall ist und auch beim Freihandzeichnen eine gleichmäßige Krümmung angestrebt wird.

Zu den Winkeln am Kreis

Für die Winkel am Kreis sind verschiedene Bezeichnungen üblich. In den Lehrplänen der alten Bundesländer wird durchgehend die Bezeichnungen Umfangs- und Mittelpunktswinkel verwendet, während in den Plänen der neuen Bundesländer die Bezeichnungen Peripheriewinkel und Zentriwinkel benutzt werden. In der Mathematik sind beide Bezeichnungen möglich, wobei z.T. beim Kreis von Peripherie- und Zentriwinkel und beim n-Eck bzw. Kreissektor vom Mittelpunktswinkel gesprochen wird.
Die deutschen Bezeichnungen haben den Vorteil, dass sie stärker selbsterklärend sind. Die Bezeichnung „Umfangswinkel“ ist allerdings unkorrekt, da „Umfang eines Kreises“ auch im Sprachgebrauch der Schüler für die Länge der Kreislinie bzw. die Länge des Randes verwendet wird. „Peripherie“ ist als Synonym für Rand zutreffender und sollte in seiner übertragenen Bedeutung auch zum allgemeinen Sprachschatz der Schüler gehören.
Der Wortbestandteil „Zentri“ hat keine eigenständige Bedeutung, kommt in keiner anderen Wortkombination vor (bis auf Zentrifugalkraft) und orientiert nur wenig auf den Mittelpunkt eines Kreises. Die Bezeichnung „Mittelpunktswinkel“ ist mit Blick auf seine Verwendung bei der Arbeit mit Kreissektoren und n-Ecken günstiger. Allerdings ist die Bezeichnung „Peripheriewinkel-Mittelpunktswinkel-Satz“ recht umständlich.
Im Lehrbuch werden beide Bezeichnungen angeboten. Bei den Sätzen am Kreis wird „Peripheriewinkel“ und „Zentriwinkel”, bei der Kreisbogenlänge und dem Kreissektor „Mittelpunktswinkel“ verwendet.

Bei der Entwicklung der Kenntnisse zum Zusammenhang von Bogen, Sehne und Peripherie- bzw. Zentriwinkel sind folgende Beziehungen zu beachten:

(1) Jedem Bogen ist eindeutig eine Sehne zugeordnet, jeder Sehne können aber zwei Bögen zugeordnet werden.

(2) Jedem Bogen lässt sich eindeutig eine Menge von untereinander gleichen Peripheriewinkeln und ein Zentriwinkel zuordnen.

(3) Jeder Sehne außer dem Durchmesser lassen sich wegen (1) zwei Mengen von untereinander gleichen Peripheriewinkeln, die auf verschiedenen Seiten der Sehne liegen und ein Zentriwinkel zuordnen. Ist die Sehne ein Durchmesser, sind die Peripheriewinkel auf beiden Seiten der Sehne gleich (90°).

(4) Jedem Peripheriewinkel und jedem Zentriwinkel ist eindeutig ein Bogen und eine Sehne zugeordnet.

(5) Einen Peripherie- oder Zentriwinkel an sich gibt es nicht. Die Winkel sind immer an einen bestimmten Kreis bzw. Kreisbogen gebunden. Dies sollte bereits bei der Definition der Begriffe deutlich werden.

(6) Wegen (3) ist die Bezeichnung „Peripheriewinkel über einer Sehne“ nicht eindeutig. Es wäre aber möglich zu definieren: Zwei Peripheriewinkel liegen über derselben Sehne, wenn sie auf der gleichen Seite der Sehne liegen. Dies liegt intuitiv bereits im Verständnis der Schüler.

(7) Es hat sich in der Lehrbuchliteratur aber durchgesetzt, den Begriff Peripherie- und Zentriwinkel an einen Bogen und nicht an eine Sehne zu binden. Bei vielen Anwendungen insbesondere auch bei der Umkehrung der Sätze ist aber auch eine Sehne vorhanden bzw. sogar ausschließlich vorhanden. Es ist zudem bei formalen Aufgaben nicht üblich und tritt bei Anwendungen sehr selten auf, dass Peripheriewinkel vorkommen, die auf dem Zeichenblatt unter einer Sehne liegen. Bei stumpfen Peripheriewinkeln wird der Mittelpunkt des Kreises unter die Sehne gelegt.

(8) Insgesamt sollte trotz des Bezuges in der Definition und den Sätzen zum Bogen eine enge gedankliche Verbindung von Bogen und Sehne erzeugt werden.

Sätze am Kreis

Der *Thalessatz* kann als besondere Eigenschaft rechtwinkliger Dreiecke oder als spezieller Satz über Winkel am Kreis eingeordnet werden. Er lässt sich unabhängig von den Sätzen über Winkel am Kreis beweisen und kann deshalb auch vor diesen Sätzen behandelt werden. Für diese Einordnung sprechen folgende Gründe:

– Die besondere Rolle des Thalessatzes wird hervorgehoben.
– Der Bezug zum rechtwinkligen Dreieck ist ein wichtiger Anwendungsaspekt, der bei der Einordnung in die Winkelsätze am Kreis etwas in den Hintergrund tritt.
– Die Umkehrung des Thalessatzes ist direkt eine Aussage über rechtwinklige Dreiecke.
– Die Konstruktionen mit dem Thaleskreis bereiten günstig die Konstruktionen mithilfe des Peripheriewinkelsatzes vor, da der Thaleskreis ein spezieller „Fasskreisbogen“ ist.
– Diese Vorgehensweise entspricht eher der historischen Entwicklung, da als einziges Zeugnis die Aussage der Schriftstellerin Pamphile erhalten ist, nach der Thales als Erster „das rechtwinklige Dreieck in den Kreis eingezeichnet“ hat.

Der *Satz des Thales* lässt sich u.a. auf folgende Weisen finden:

– Messen von Peripheriewinkeln über dem Durchmesser
– Verallgemeinern aus dem Spezialfall eines gleichschenkligen Dreiecks über dem Durchmesser
– Arbeit mit beweglichen Figuren / Verändern der Lage des Scheitelpunktes des Winkels oder der Lage der Sehne
– Herleiten des Satzes mithilfe des Satzes über die Gegenwinkel im Sehnenviereck, indem das Dreieck an der Seite $\overline{AB}$ gespiegelt wird und so ein Kreis mit einem Sehnenviereck entsteht (Rückführung auf Bekanntes).

Zum Finden des Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satzes können dynamische Betrachtungen und die Verallgemeinerung aus dem Spezialfall des Thalessatzes verwendet werden. Beim Beweis sollte auf die notwendigen Fallunterscheidung nicht verzichtet werden, um die Kenntnisse zu Fallunterscheidungen zu festigen.

Konstruktionen mit den Sätzen am Kreis

Die Konstruktionen mit den Sätzen am Kreis lassen sich in die Methode der Bestimmungslinien einordnen. Dazu muss die Begriffsbildung eingeführt werden, dass „eine Strecke unter einem Winkel erscheint“, die aber leicht anschaulich als Blickwinkel verdeutlicht werden kann. Diese Bestimmungslinie (Kreisbogen) wird in einigen Lehrbüchern als Fasskreisbogen bezeichnet, da er alle Scheitelpunkte der entsprechenden Peripheriewinkel umfasst. Da dieser Begriff in der Mathematik nicht üblich ist, wird diese Bezeichnung nicht verwendet und die Punktmenge umschrieben. Dabei ist jedoch eine gewisse Schwerfälligkeit der Formulierungen in Kauf zu nehmen. (Kreisbogen $\overset{\frown}{BA}$ mit dem betreffenden Winkel als Peripheriewinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$). Ein Spezialfall dieser Bestimmungslinie ist der Thaleskreis, wobei hier die Punkte auf beiden Kreisbögen $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{BA}$ die Bedingung erfüllen.

Dann ergibt sich z.B. aus dem gegebenen Stück „ein Winkel von 90°“ die Eigenschaft des gesuchten Punktes X „von X aus erscheint die gegenüberliegende Strecke unter einem Winkel von 90°“. Die Frage nach der Menge aller Punkte, für die diese Bedingung erfüllt ist, führt auf den Thaleskreis. Diese Fragestellung tritt ebenfalls beim Finden der Umkehrung des Thalessatzes auf, die die Begründung für den Thaleskreis als Bestimmungslinie liefert.

Entwicklung des Könnens im Beweisen

Ein Schwerpunkt des Stoffgebietes ist die Weiterentwicklung des Könnens im Beweisen. Die Schüler sollen erleben, dass in der Mathematik alle Sätze ein System bilden, in dem auf deduktive Weise Sätze aus anderen gewonnen werden können. Dazu sollte eine Kette von mehreren Sätzen und Beweisen behandelt werden.
Die Schüler sollen weiter mit der Strategie des Rückwärtsarbeitens vertraut gemacht werden, die sie bereits vom Lösen von Bestimmungsaufgaben kennen. Bei Beweisaufgaben läuft diese Vorgehen auf das Suchen von Sätzen mit ähnlicher Behauptung hinaus. Deshalb werden im Rückblick bisher behandelte Sätze, die im Stoffgebiet benötigt werden, nach der Art der Behauptung geordnet angegeben.

Berechnungen am Kreis

Mit Betrachtungen zur Geschichte der Zahl π und zur Quadratur des Kreises können folgende Erkenntnisse vertieft bzw. vermittelt werden:

- Die Lösung von Problemen ist eine wesentliche Triebkraft der Entwicklung der Mathematik, auch wenn diese nicht unmittelbar eine praktische Bedeutung haben.
- In der Mathematik geht es nicht nur um exakt angebbare Zahlen. Die ständige Verbesserung eines Näherungswertes und die damit verbundenen Betrachtungen zu seiner Genauigkeit sind ebenfalls eine Aufgabe innermathematischer Untersuchungen (Vorbereitung auf numerische Mathematik).
- Es gibt allerdings ein tief verwurzeltes Bestreben, alle Probleme im Bereich der rationalen Zahlen zu lösen, d.h. alle Verhältnisse durch rationale Zahlen auszudrücken.
- Die Methode der Einschachtelung ist eine geeignet, krummlinige Figuren und damit das Problem der Unendlichkeit in den Griff zu bekommen. Damit werden Grundgedanken der Iteration und Integration vorbereitet. Auf Probleme der Anschauung bei geometrischen Grenzprozessen sollten eingegangen werden, indem Paradoxa behandelt werden.