5 Satzgruppe des PYTHAGORAS

Planungsvorschlag

Thema	h	Schwerpunkte (•), Bemerkungen (–)
Rückblick	**2**	• Dreiecksarten • Flächeninhalt von Dreiecken und Vierecken • Flächenverwandlungen durch Invarianzbeziehungen (Scherung) – Die Aufgaben dienen zur Vorbereitung des Beweises des Satzes des PYTHAGORAS.
5.1 Der Satz der PYTHAGORAS	**5**	• Begriffe am rechtwinkligen Dreieck • Erkennen rechtwinkliger Dreiecke in ebenen und räumlichen Figuren • Vermuten des Satzes durch Verallgemeinern aus Spezialfällen oder aus Beispielen; Finden eines Beweises für den Satz des PYTHAGORAS • Aufstellen von Gleichungen • innermathematische Anwendungen zur Berechnung von Streckenlängen in der Ebene • außermathematische Anwendungen (in der Ebene) • Anwendungen zur Berechnung von Streckenlängen in Körpern, Schnitte durch Körper • Finden und Beweisen der Umkehrung des Satzes • Anwenden der Umkehrung
5.2 Kathetensatz und Höhensatz	**2**	• Finden und Beweisen der Sätze sowie ihrer Umkehrungen • Anwenden der Sätze bei Berechnungen, Begründungen und Konstruktionen (Flächenverwandlung)
5.3 Gemischte Aufgaben	**3**	Auswahl eines der folgenden Schwerpunkte: • Berechnungen in geometrischen Figuren und Körpern, insbesondere im Koordinatensystem • Konstruktionen • Praktische Anwendungen • Herleitungen und Beweise • Historische Probleme
Summe:	**12**	

Standpunkte und Hinweise zum Thema

Verhältnis von geometrischer und arithmetischer Interpretation der Sätze

Die geometrische Interpretation ist mit folgenden Gedanken verbunden:

– Bei einem rechtwinkligen Dreieck bestehen Beziehungen zwischen den Flächeninhalten von Quadraten bzw. Rechtecken.
– Über den Seiten des Dreiecks bzw. der Höhe kann man Quadrate zeichnen oder sich vorstellen. Die Quadrate werden nach außen bzw. nach rechts gezeichnet. Das Hypotenusenquadrat liegt unter der Hypotenuse.
– Der Satz des PYTHAGORAS besagt, dass die Summe der Flächeninhalte zweier Quadrate gleich dem Flächeninhalt eines Quadrates ist.
– Der Kathetensatz bzw. der Höhensatz besagt, dass der Flächeninhalt eines Quadrates gleich dem Flächeninhalt eines Rechtecks ist.

Die arithmetische Interpretation beinhaltet folgende Gedanken:

– In einem rechtwinkligen Dreieck bestehen Beziehungen zwischen den Längen der Seiten, der Höhe bzw. der Hypotenusenabschnitte.
– Der Satz des PYTHAGORAS besagt, dass die Summe der Quadrate der Längen der Katheten gleich dem Quadrat der Länge der Hypotenuse ist.
– Der Kathetensatz bzw. der Höhensatz besagt, dass das Quadrat der Länge einer Kathete bzw. der Höhe gleich dem Produkt aus einem Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse bzw. aus beiden Hypotenusenabschnitten ist.

Bei der arithmetischen Betrachtungsweise ist eine Vorstellung von Quadraten oder Rechtecken über den Seiten bzw. Abschnitten nicht erforderlich.

Obwohl die beiden Betrachtungsweisen unterschiedlich sind, bedingen sie sich gegenseitig. Der Schüler muss von einer zur anderen wechseln können. Bei einer Aneignung der Sätze in Form der Gleichungen $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 = p \cdot c$, $b^2 = q \cdot c$ und $h^2 = p \cdot q$ steht die arithmetische Auffassung im Vordergrund. Bei Verwendung der Kenntnisse zu Flächenformeln ist ein Übergang zur geometrischen Interpretation möglich.

Es wird der Begriff „Quadrat" in den beiden Interpretationen unterschiedlich verwendet. Unter Quadrat wird im Kontext der geometrischen Interpretation ein geometrisches Objekt und im Kontext der arithmetischen Interpretation die zweite Potenz einer Zahl verstanden. Entsprechend müssen auch die Gleichungen unterschiedlich gedeutet werden.
In der geometrischen Interpretation bedeutet z.B. a^2 den Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge a und $c \cdot p$ muss als Flächeninhalt eines Rechteckes mit den Seiten c und p erfasst werden. In der Regel wird die Bezeichnung A für Flächeninhalte nicht verwendet, was das Verständnis erschwert. In der arithmetischen Interpretation kann a^2 direkt als das Quadrat der Seitenlänge a und $c \cdot p$ als das Produkt aus den Seitenlängen c und p aufgefasst werden ohne an die Bedeutung diese Produktes als Flächeninhalt zu denken.

Unter „der Höhe" eines rechtwinkligen Dreiecks wird die Höhe über der Hypotenuse verstanden, obwohl auch ein rechtwinkliges Dreieck drei Höhen hat, von denen zwei aber mit den Katheten identisch sind. Deshalb wird auch auf die sonst üblichen Indizierung einer Höhe verzichtet und die Höhe über der Seite c mit „h" und nicht mit „h_c" bezeichnet.

Die geometrische Interpretation ist aus folgenden Gründen bedeutsam:

- Sie entspricht dem historischen Weg der Satz- und Beweisfindung über die Betrachtung von Flächenverwandlungen.
- Die meisten Beweise beziehen sich auf die Betrachtung von Flächeninhalten.
- Sie ist für eine visuelle Darstellung der Sätze geeignet.
- Ihre sprachliche Fassung ist einfacher als die der arithmetische Interpretation.
- Sie wird bei den Aufgaben zur Flächenverwandlung verwendet.

Die arithmetische Interpretation ist aus folgenden Gründen bedeutsam:

- Sie ergibt sich bei der Herleitung der Sätze über Ähnlichkeitsbeziehungen.
- Sie wird bei allen Anwendungen zur Berechnungen von Streckenlängen verwendet.
- Sie liegt der Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS zu Grunde.

Die arithmetische Interpretation ist mit Abstand die wichtigere Sichtweise für die Anwendungen der Satzgruppe. Durch die vorherrschende Anwendung der Sätze zur Berechnung von Streckenlängen setzt sich ihre Dominanz im Denken des Schülers im Laufe des Stoffgebietes von selbst durch.

Es sollten aber bereits bei der Erarbeitung beide Sichtweisen betrachtet werden. Dies kann erreicht werden, indem die Sätze eng mit den Gleichungen verknüpft werden.

Verhältnis von formaler und inhaltlicher Erfassung des Sachverhaltes bei Anwendung der Sätze

Die inhaltliche Erfassung besteht in folgenden Gedanken:

- Ein Dreieck, das zeichnerisch oder verbal gegeben ist oder selbst hergestellt wurde, hat einen rechten Innenwinkel und ist also ein rechtwinkliges Dreieck.
- Dieses Dreieck hat eine längste Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt. Ist auch die Höhe auf dieser Seite eingezeichnet, wird dadurch die längsten Seite in zwei Abschnitte zerlegt.
- Es gibt Gleichheitsbeziehungen zwischen Flächeninhalten von Quadraten und Rechtecken bzw. zwischen Quadraten und Produkten von Seitenlängen. Man kann eine Gleichung für die gesuchte Größe aufstellen.

Bei einem Arbeiten auf inhaltlicher Ebene werden die Begriffe Kathete, Hypotenuse, Hypotenusenabschnitt, die Bezeichnung der Stücke mit a, b, c bzw. h sowie die Kenntnis Gleichungen $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 = p \cdot c$, $b^2 = q \cdot c$ und $h^2 = p \cdot q$ nicht benötigt.

Die formale Erfassung umfasst folgende Gedanken:

- In einem rechtwinkligen Dreieck werden die Stücke mit a, b, c, h, p, und q bezeichnet bzw. es kann eine Belegung dieser Variablen durch andere vorgenommen werden.
- Es gelten die Beziehungen $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 = p \cdot c$, $b^2 = q \cdot c$ bzw. $h^2 = p \cdot q$.
- Die Gleichungen müssen nach der gesuchten Größe umgestellt werden.

Der erste Gedanke der formalen Erfassung setzt die ersten beiden der inhaltlichen Erfassung voraus. Beim ersten Gedanken wird als Orientierung eine als Bild gespeicherte Darstellung des „Standardfalls" verwendet.

Beim zweiten Gedanken müssen die Terme je nach Interpretation als Flächeninhalte oder als Produkte von Seitenlängen gedeutet werden.

Verhältnis von Formelcharakter und Beziehungscharakter der Sätze

Durch die Verwendung relativ fester Bezeichnungen haben die Sätze der Satzgruppe einen Formelcharakter. Damit unterscheiden sie sich z.B. von den Winkelsätzen, bei denen mit den Bezeichnungen für die Winkel keine Vorstellungen zu ihrer Art (z.B. Scheitelwinkel, Nebenwinkel oder Stufenwinkel) verbunden sind. Eine gewisse Ausnahme ist dabei der Innenwinkelsatz, bei dem mit der Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ feste Vorstellungen zu Innenwinkel im Dreieck verbunden sind. Dem Formelcharakter entspricht die Vorgehensweise, sich die Gleichungen einzuprägen und bei Anwendungen der Sätze zuerst die Gleichungen zu reaktivieren und dann eine entsprechenden Belegung der Variablen vorzunehmen.

Beim Satz des PYTHAGORAS steht der Formelcharakter weiter im Hintergrund als beim Katheten bzw. Höhensatz, bei denen die auch im Namen des Satzes vorkommende Größe auf der linken Seite der Gleichung alleine steht, wenn auch als Quadrat. Schreibt man den Satz des PYTHAGORAS in der Form $c^2 = a^2 + b^2$ und führt zudem noch die zum Katheten- bzw. Höhensatz analoge Bezeichnung Hypotenusensatz ein, wird der Formelcharakter verdeutlicht. Dies wird in einer Reihe von Lehrbüchern getan, entspricht aber nicht der kulturellen Tradition und der damit verbundenen Hauptblickrichtung.

Im Unterschied zu Formeln geht es bei den Sätzen der Satzgruppe aber nicht darum, eine neue Größe (z.B. Flächeninhalt oder Umfang) aus Größen anderer oder der gleicher Art zu berechnen. Bereits die Bezeichnung „Satz“ beinhaltet die Vorstellung, dass es primär um Beziehungen zwischen Aussagen geht. Die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ ist für sich ohne eine Aussage zur Lage des rechten Winkels nicht verwendbar.

Bei einer konkreten außer- oder innermathematischen Anwendung der Sätze ist es zudem nicht erforderlich und z.T. wenig sinnvoll, zuerst die Standardgleichung aufzuschreiben und dann eine entsprechende Belegung der Variablen vorzunehmen. So gilt etwa im Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei A die Gleichung $b^2 + c^2 = a^2$, die nicht durch Neubelegung der Standardgleichung gefunden werden sollte, sondern direkt für das konkrete Dreieck aufgestellt werden kann. Sind Maße von Seiten bekannt, sollte sofort eine Gleichung mit diesen Maßen aufgestellt werden. Eine Einführung von Bezeichnungen für die gegebenen Stücke ist weder für das Erfassen des Sachverhaltes noch für das Finden von Lösungsideen von Bedeutung und stellt nur eine unnötige Formalisierung des Vorgehens dar.

Zur Reihenfolge der Sätze

Folgende Gründe sprechen für eine Behandlung des Satzes des PYTHAGORAS als ersten Satz:

- Dies entspricht dem historischen Vorgehen. Der Kathetensatz wurde von EUKLID etwa 250 Jahre nach PYTHAGORAS gefunden.
- Die Behandlung des Satzes des PYTHAGORAS an erster Stelle unterstreicht seine zentrale Bedeutung und unterstützt seine primäre Aneignung.
- Der entscheidende Beweisgedanke steckt in den Betrachtungen zur Flächengleichheit.
  Wird der Satz des PYTHAGORAS lediglich durch eine formale Rechnung aus dem Kathetensatz hergeleitet, kann für den Schüler leicht die wesentliche Beweisidee für diesen zentralen Satz verloren gehen und er kann so auch die Leistung des PYTHAGORAS kaum erfassen.

Zum Finden und Beweisen der Sätze

Der Satz des PYTHAGORAS kann durch Verallgemeinerung aus dem Spezialfall eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks gefunden werden. In dieser Herleitung steckt bereits der Grundgedanke der Flächenzerlegungsbeweise. Auch eine Verallgemeinerung aus Beispielen (z.B. Dreieck mit den Seiten 3, 4, und 5 cm) ist möglich.

Katheten- und Höhensatz lassen sich kaum in sinnvoller Weise finden. Möglich wäre das Zeichnen eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten 3 cm, 4 cm und 5 cm, in dem $q = 3{,}2$ cm, $p = 1{,}8$ cm und $h = 2{,}4$ cm sind. Mit diesen zeichnerisch gefundenen Maßen könnte versucht werden, Zusammenhänge zu vermuten.

Flächenzerlegungsbeweise, die meist verwendet werden, sind vom Schüler kaum selbst zu finden. Auch eine Verallgemeinerung des Vorgehens beim Sonderfall ist nicht einfach. Wird jedoch eine entsprechende Zerlegung vorgegeben, können die Schüler durchaus Begründungen für die Gleichheit der Flächenteile finden. Dies kann auf präformalem Niveau auch durch Ausschneiden und Umlegen geschehen.

Eher durch Schüler zu finden sind Flächenverwandlungsbeweise, bei denen Flächen durch Scherung ineinander überführt werden. Dies setzt allerdings voraus, dass die entsprechenden Kenntnisse und Betrachtungsweisen vorher reaktiviert werden. Ein Beweis des Satzes des PYTHAGORAS über Flächenverwandlung liefert gleichzeitig auch den Kathetensatz.

Am günstigsten für ein selbständiges Finden eines Beweises und sogar der Sätze selbst durch Herleiten ist das Ausgehen von Eigenschaften ähnlicher Dreiecke.

Historische Betrachtungen

Ausgehend von der exponierten Stellung des Namens PYTHAGORAS sollte das Stoffgebiet genutzt werden, um folgende Kenntnisse und Einsichten zu vermitteln:

- Bereits in den Anfängen der menschlichen Entwicklung wurden mathematische Beziehungen in der Praxis genutzt. Die Mathematik dieser Zeit bestand ausschließlich aus einer Sammlung von Vorschriften zur Lösung konkreten praktischer Aufgaben.
- Im antiken Griechenland (600 v.u.Z. bis 500 u.Z.) änderte die Mathematik grundlegend ihren Gegenstand und ihre Methoden. Die Mathematiker beschäftigten sich nicht mehr ausschließlich mit der Größe von Ackerflächen oder dem Fassungsvermögen von Kornspeichern, sondern mit abstrakten Gebilden wie Quadraten, Rechtecken oder Quadern.
- Die Mathematiker begannen, ihre Erkenntnisse durch logische Überlegungen zu begründen. Erstmalig wurde versucht, eine Erkenntnis aus anderen abzuleiten und so ein System von wahren Aussagen, den mathematischen Sätzen, zu schaffen. Es entstand der Beweis in seiner noch heute bestehenden Form als lückenlose Kette logischer Schlüsse von Voraussetzungen zu einer Behauptung.
- Diese neue Phase in der Entwicklung der Mathematik wurde vor allem durch das Wirken von PYTHAGORAS und THALES eingeleitet, wobei erst im Stoffgebiet Kreis auf das Wirken von THALES eingegangen werden sollte.

Beitrag zur Entwicklung des Könnens im Arbeiten mit Näherungswerten

Es sollte von der Aufgabenstellung her klar unterschieden werden, ob die Zahlenwerte exakt sind oder ob es sich um Näherungswerte handelt, d.h. ob es ein innermathematischer oder ein außermathematischer Sachverhalt ist. Beim Arbeiten mit ideellen Objekten, sollte weiterhin aus der Aufgabenstellung hervorgehen, ob das Ergebnis exakt oder als Näherungswerte anzugeben ist. Bei einer Angabe als Näherungswerte muss die Genauigkeit vorgegeben werden.

Durch das Quadrieren und Wurzelziehen entstehen meist mehr Stellen als sinnvollerweise anzugeben sind. Die bisherigen Regeln für das Arbeiten mit Näherungswerten sind auf die Operationen Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren sowie Rechnungen mit nur zwei Operanden beschränkt.
Für das Quadrieren und Radizieren können die gleichen Regeln wie für das Multiplizieren und Dividieren verwendet werden. Bei den meist auszuführenden Additionen oder Subtraktionen treten z.T. auch Werte mit unterschiedlicher Genauigkeit auf, sodass auch hier die entsprechenden Regeln anzuwenden sind. Die Regeln für alle Rechenarten sollten deshalb im Kapitel zum Lösen von Aufgaben aufgeführt und mit entsprechenden Aufgaben zur Festigung versehen werden.

Bei den meist notwendigen Zwischenrechnungen sollte in der Regel nicht gerundet werden, da die Rechnungen meist mit einer TR erfolgen und eine Verwendung der Zwischenergebnisse auch unter Verwendung eines Speichers meist möglich ist. Wenn gerundet werden muss, so sollte eine Ziffer mehr verwendet werden, als sich nach den Regeln ergibt. Dies sollte aber nicht zu einer weiteren Regel verallgemeinert werden.

In vielen Fällen liegen die zu berechnenden Streckenlängen in der Größenordnung der gegebenen Strecken. Dadurch tritt oft der Fall ein, dass sich im Ergebnis die gleiche Stellenzahl nach dem Komma als sinnvoll erweist wie in den Ausgangswerten. Um Schüler davon zu überzeugen, dass dies jedoch nicht immer gilt, sind bewusst auch Gegenbeispiele zu diskutieren, bei denen z.B. mit der Wertschrankenmethode eine Einsicht in die sinnvolle Genauigkeit erreicht werden kann.

Zum Umgang mit Quadratzahlen und Quadratwurzeln

Es sollte das Auswendigwissen der Quadratzahlen bis 20 gefestigt werden.

Für viele Berechnungen mit Satz des PYTHAGORAS werden die Beziehungen $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ und $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ benötigt, die praktisch vorgezogene Wurzelgesetze darstellt. Darüber sollte nicht hinweggegangen werden. Zumindest an Zahlenbeispielen aber auch allgemein mit Hilfe der Ersetzungen $x = \sqrt{a}$ und $y = \sqrt{b}$ kann die Gültigkeit der Beziehung begründet werden.

Weiterhin sollte auf folgende Konventionen hingewiesen werden:
- Sind Wurzeln irrational werden sie oft nicht als Dezimalbruch, der dann nur ein Näherungswert ist, geschrieben, sondern stehengelassen.
- Rationale Bestandteile des Radikanden werden so weit wie möglich vor die Wurzel gezogen.
- Im Unterschied zur üblichen Schreibweise von Produkten werden stehengebliebene Wurzeln aus Zahlen auch hinter Variable gesetzt, um Verwechslungen zur Gültigkeit des Wurzelzeichens zu vermeiden (z.B. $a\sqrt{2}$)

Zur Verwendung von Formel für spezielle Stücke

Es sollten folgende Formeln behandelt werden, die auch in Tafelwerken zu finden sind:
- Höhe eine gleichseitigen Dreiecks
- Diagonale im Quadrat
- Raumdiagonale eines Quaders
- Abstand zweier Punkte im Koordinatensystem

Die Herleitung der Formeln kann als Aufgabe verwendet werden, mit der ein Beitrag zur Entwicklung des Könnens im Beweisen geleistet werden kann. Die Formeln sollten anschließend im Tafelwerk aufgefunden werden, um die Schüler an das Umgehen mit Nachschlagewerken zu gewöhnen.

Beim Lösen gemischter Aufgaben kann ebenfalls mit dem Tafelwerk gearbeitet werden.