Prof. Dr. Sill 27.10.2005

Auszug aus Lösungsband zum LB MV 7 R, 2004

1 Rationale Zahlen

Standpunkte und Hinweise zur Behandlung des Themas

Zur Bildung des Begriffs der rationalen Zahlen

Die Schüler haben negative Zahlen in verschiedenen Erfahrungsbereichen darunter auch beim Rechnen mit natürlichen Zahlen kennen gelernt und können einfache Berechnungen mit ihnen durchführen. Ein Ziel der Einführung der rationalen Zahlen und der Rechenoperationen ist es deshalb, an diese Vorerfahrungen der Schüler anzuknüpfen, die intuitiven Vorstellungen aufzugreifen und weiterzuentwickeln.
Ein wesentliches Ziel des Stoffgebietes ist es, reichhaltige Vorstellungen zum Begriff „negative Zahlen", d.h. vor allem zu den Anwendungsaspekten, zu vermitteln. Das sollte bei der Einführung beginnen, sich aber über das ganze Stoffgebiet erstrecken. Alle wesentlichen Anwendungen negativer Zahlen sollten dabei angesprochen werden.
Bei der Betrachtung der Anwendungen wird der Schwerpunkt auf die Bedeutung der negativen Zahlen, als dem eigentlich Neuen für die Schüler, gelegt. Nach Möglichkeit wird auf das Vorzeichen bei den positiven Zahlen verzichtet, um der Art der Begriffsbildung zu entsprechen.
Der Aspekt der Beschreibung von Richtungen durch negative oder positive Zahlen kann bei der Behandlung des Eintragens von Punkten in ein Koordinatensystem verdeutlicht werden.
Der mathematische Hintergrund des gewählten Weges der Zahlenbereichserweiterung ist der Anbau eines neuen Zahlenbereiches an den Bereich der gebrochenen bzw. der natürlichen Zahlen. Es wird zu jeder gebrochenen (bzw. natürlichen Zahl) eine neue Zahl konstruiert. Die neuen Zahlen heißen negative Zahlen und bilden zusammen mit den gebrochenen (bzw. natürlichen Zahlen) den Bereich der rationalen (bzw. ganzen) Zahlen.
Dieser Weg hat folgende Vorteile:

- Die gebrochenen bzw. natürlichen Zahlen bleiben was sie sind und brauchen nicht künstlich als neue (positive rationale oder positive gebrochene) Zahlen angesehen zu werden.
- Es sind keine Überlegungen zur isomorphen Einbettung erforderlich.
- Der Weg entspricht der historischen Vorgehensweise.
- Bei der Erarbeitung der Rechenoperationen kann ausgehend vom Bekannten sofort das Neue (Rechnen mit den negativen Zahlen) betrachtet werden.

Als Gegenstand der Betrachtungen zur Begriffsbildung wird die Zahlengerade als geeignetes Modell zwischen reiner Anwendung (Temperaturskala) und reiner Theorie (Zahl als mathematisches Objekt) verwendet. Damit wird

- die schrittweise Erforschung der Zahlengerade als roter Faden der Zahlenbereichserweiterung fortgesetzt,
- das Ordnen vorbereitet,
- die Erarbeitung der Regeln zur Addition und Subtraktion vorbereitet.

Zur Behandlung ganzer Zahlen

Eine vollständige Aneignung der Regeln zum Rechnen mit rationalen Zahlen ist bereits unter alleiniger Verwendung der ganzen Zahlen möglich, da die Regeln lediglich Vorzeichenregeln sind. Die eigentlichen numerischen Rechnungen mit den Beträgen der rationalen Zahlen werden mit den Regeln zum Rechnen mit natürlichen Zahlen, Brüchen oder Dezimalbrüchen durchgeführt.
Es ist aus mathematischen und inhaltlicher Sicht nicht notwendig, zuerst eine längere Zeit nur mit ganzen Zahlen zu arbeiten, da sämtliche Betrachtungen und Regeln identisch sind.
Der Konzeption des Buches liegt die Vereinigung der beiden einander scheinbar widersprechenden Aspekte zu Grunde: Es wird sofort der Bereich der rationalen Zahlen eingeführt. Bei der Einführung werden der Teilbereich der ganzen Zahlen und seine Anwendungen mit erarbeitet. Bei der anschließenden Behandlung des Koordinatensystems, der Ordnung und der Rechenoperationen werden in der überwiegenden Mehrzahl solche Aufgaben gestellt, die im Kopf gelöst werden können, d.h. es wird vor allem mit ganzen Zahlen gerechnet.
Mit der Betonung der Kopfrechenaufgaben soll auch einem Einsatz der Taschenrechners entgegengewirkt werden, auf den in diesem Stoffgebiet (mit Ausnahme der Behandlung der Quadratwurzel) verzichtet werden kann.
Es wird die Möglichkeit genutzt, die Fertigkeiten im mündlichen, schriftlichen und vorteilhaften Rechnen mit natürlichen Zahlen zu festigen und zu vertiefen. Da das Rechnen mit natürlichen Zahlen Grundlage jeglichen

Rechnens ist, wird damit indirekt auch ein Beitrag zur Festigung der Fertigkeiten im Rechnen mit Brüchen und Dezimalbrüchen geleistet. Es wird an die Aufgabentypen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen aus den Klassen 5 und 6 angeknüpft.

Behandlung des Betrages einer rationalen Zahl

Der Begriff des Betrages einer rationalen Zahl wird inhaltlich in zweifacher Weise erklärt:

- Der Betrag einer rationalen Zahl ist ihr Abstand vom Nullpunkt.
- Eine rationale Zahl besteht aus einem Vorzeichen und dem Betrag. Der Betrag einer negativen Zahl ist also die Zahl ohne ihr Vorzeichen und damit die zu ihr entgegengesetzte gebrochene Zahl. Der Betrag einer gebrochenen Zahl ist die Zahl selbst.

Mit der ersten Bedeutung wird ein neuer Aspekt angesprochen, der langfristig von großer Bedeutung ist, die Beschreibung von Abständen, also geometrischen Zusammenhängen, durch Zahlen.
Die zweite Auffassung ist eine rein syntaktische, die das Arbeiten mit dem Betragsbegriff beim Rechnen mit rationalen Zahlen sehr vereinfacht.

Auf die umgangssprachliche Bedeutung der Betragsbegriffes sollte eingegangen werden.

Die Begriffserklärungen haben den Nachteil, dass sie nicht vollständig mit dem mathematischen Begriffsinhalt übereinstimmen, wonach der Betrag einer rationalen Zahl auch wiederum eine rationale Zahl ist. Im Sinne der gewählten Fassung des Begriffes rationale Zahl ist dies jedoch zu vertreten, da der so erklärte Betrag einer rationalen Zahl als gebrochene Zahl ebenfalls zu den rationalen Zahlen gehört.

Die beiden inhaltlichen Vorstellungen besitzen folgende Vorzüge:

- Bei einer Definition im mathematischen Sinne unter Verwendung von Variablen erhöht sich enorm das Anforderungsniveau, da erstmalig Variable für negative Zahlen auftreten und so z.B. $-a$ auch eine positive Zahl sein kann. Dies muss von den Schülern zwar im Laufe des Unterrichts ohnehin erfasst werden, lässt sich aber besser bei den konzentrierten Betrachtungen zum Arbeiten mit Variablen einordnen. Die Definition ist für die im folgenden genannten wichtigen Anwendung des Betrages sehr umständlich zu handhaben.
- Wird bei den Regeln zum Rechnen mit rationalen Zahlen mit dem Betrag gearbeitet, ist die Auffassung vom Betrag als Zahl ohne Vorzeichen völlig ausreichend und effektiv.
- Zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen ist die Auffassung vom Betrag als Abstand vom Nullpunkt hilfreich und effektiv. Es wird auf ein grafisches und inhaltliches Lösen orientiert, das die Schüler leicht zu folgenden Zusammenhängen führt:
  $| z | = a$ heißt $z = a$ oder $z = - a$; $| z | < a$ heißt $- a < z < a$; $| z | > a$ heißt $z > a$ oder $z < - a$

Vergleichen und Ordnen rationaler Zahlen

Beim Vergleichen ganzer bzw. rationaler Zahlen wird zwischen dem Vergleichen einer positiven mit einer negativen Zahl und dem Vergleichen zweier negativer Zahlen unterschieden. Der erste Fall kann sowohl inhaltlich als auch am Zahlenstrahl leicht verständlich gemacht werden.

Beim Vergleichen zweier negativer Zahlen sind Orientierungen an Anwendungskontexten wenig hilfreich. Der Vergleich auf der Sachebene fällt den Schülern sicher nicht schwer, daraus kann aber nicht unmittelbar auf die richtige mathematische Darstellung geschlossen werden. Im Gegenteil liegt sogar in vielen Fällen genau die umgekehrte Relation inhaltlich viel näher (3000 Euro Schulden sind mehr als 2000 Euro Schulden, 4° Frost sind mehr als 3° Frost; 5 m unter NN ist tiefer als 2 m unter NN; usw.).

Es ist nicht erforderlich, dass die Schüler zu Bearbeitung der Anwendungsprobleme auf die formale Ebene der Arbeit mit negativen Zahlen wechseln müssen, da auf der Sachverhaltsebene die Lösung dieser Aufgaben meist leicht möglich ist. Deshalb können schon vor der formalen Behandlung des Vergleichens rationaler Zahlen Aufgaben zum Vergleichen und Ordnen gestellt werden. Die Sachverhaltsbetrachtungen können zum Begründen der formalen Regel verwendet werden.
Es wird nur eine Orientierungsgrundlage für das Lösen formaler Aufgaben vermittelt, die auf der Betrachtung der Lage der Zahlen auf der Zahlengeraden basiert: Von zwei Zahlen ist diejenige keiner, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt. Eine Verallgemeinerung und Verkürzung wird nicht angestrebt.

In dem Stoffabschnitt wird aus Zeitgründen das stellenweise Vergleichen von Dezimalbrüchen nicht wiederholt und gefestigt, obwohl es im weiteren Unterricht für das Arbeiten mit Näherungswerte durchaus benötigt wird.

Das Verfahren lässt sich nicht in gleicher Weise auch für negative Zahlen anwenden, da die Richtung der Ordnungsrelation nicht mehr der Größe der Stellenwerte entspricht. (-3,7 < -3,6, da 7 > 6). Da außerdem negative gebrochen rationale Zahlen bei Anwendungen kaum vorkommen, sind Übungen zum Vergleichen negativer Dezimalbrüche nicht erforderlich.

Beim Runden negativer Zahlen wird in die betragsmäßig entgegengesetzte Richtung gerundet, wodurch sich die Sprechweise und bei der Endziffer 5 auch das betragsmäßige Runden umkehrt:
z.B. -3,76 wird auf -3,8 abgerundet; -3,72 wird auf -3,7 aufgerundet, -3,5 wird auf -3 aufgerundet.
Auf Grund dieser Schwierigkeiten und der wiederum aus der Sicht der Anwendungen nicht gegebenen Notwendigkeit werden ebenfalls keine Übungen zum Runden negativer Zahlen vorgesehen.

Behandlung der Addition und Subtraktion

Das Anliegen der im Folgenden geäußerten Gedanken ist es,

- den gewählten Weg der Zahlenbereichserweiterung konsequent weiter zu beschreiten,
- zu einer bedeutenden Vereinfachung und Verkürzung der Behandlung der Addition und Subtraktion rationaler Zahlen zu gelangen
- die Behandlung der Rechenoperationen stärker als sonst üblich bereits an den späteren Anforderungen zu orientieren und
- an das intuitive Können der Schüler im Rechnen mit negativen Zahlen anzuknüpfen.

Die den Schülern bisher als gebrochene Zahlen bekannten positiven rationalen Zahlen werden von Anfang an wie bisher behandelt und bezeichnet, d.h. es wird auf das Vorzeichen + sofort verzichtet. Damit entfällt die umständliche und gekünstelte ausführliche Schreibweise mit Klammern und der spätere Verzicht auf diese.
Die Rechenoperationen Addition und Subtraktion werden wie bei den natürlichen und gebrochenen Zahlen parallel behandelt. Die Subtraktion wird also nicht erst nach der ausführlichen Beschäftigung mit der Addition als Rückführung auf die Addition eingeordnet.
Die Behandlung erfolgt in drei Schritten:

1. Addieren oder Subtrahieren einer positiven Zahl durch Schreiten auf der Zahlengeraden
2. Addieren oder Subtrahieren einer negativen Zahl durch Auflösen von Klammern und Rückführung auf 1.
3. Formale Zeichen-Betragsregeln

zu 1. Es wird die Zahlengerade als Ausgangsmodell und Orientierungsgrundlage für die Rechenregeln verwendet, d.h. nicht mit der Ebene des formalen Arbeitens mit Beträgen begonnen. Die auszulösenden und zu verinnerlichenden Rechenhandlungen sind nach Abschluss des Aneignungsprozesses zwar die gleichen, aber die inhaltliche Orientierung an der Zahlengeraden ermöglicht bei auftretenden Problemen durch die größere Anschaulichkeit und geringere Begrifflichkeit viel eher ein Zurückgehen auf entfaltete Denkhandlungen. Außerdem entfällt die Notwendigkeit einer vollständigen und damit mathematisch exakten Formulierung der Vorzeichen-Betrags-Regeln.
Die Operationen Addieren und Subtrahieren werden durch Schreiten nach rechts bzw. nach links modelliert, d.h. auch bei der Subtraktion wird von dem ersten Operanden (dem Minuenden) ausgegangen. Diese Vorstellung knüpft an das Vorgehen bei den natürlichen Zahlen und an die intuitiven Lösungsverfahren der Schüler an.
Die Erarbeitung der Regeln erfolgt mithilfe kleiner ganzer Zahlen und einer Veranschaulichung mit einer Zahlengeraden bzw. mit einem Additionsrechenstab. Beim Rechnen mit größeren ganzen oder gebrochen-rationalen Zahlen orientiert sich der Schüler weiterhin an dem Schreiten auf der Zahlengeraden. Aus dieser Vorstellung heraus können dann ebenfalls die entsprechenden Rechenhandlungen abgeleitet werden.
Bei dieser Gruppe von Aufgaben sind keine Klammern erforderlich.

zu 2. Als Ziel der Erarbeitung wird nicht das Finden neuer Regeln, sondern die Rückführung auf Bekanntes angegeben. Dazu müssen die Klammern aufgelöst werden. Zur Erarbeitung der Klammerauflösungsregeln kann nicht das bisher verwendete Modell des Schreitens auf der Zahlengeraden herangezogen werden, da es nur für positive Zahlen als zweiten Operanden eingeführt wurde. Eine Erweiterung wäre zwar möglich, dies würde aber die aufgebaute Orientierungsgrundlage erheblich beschädigen, da die Schüler nun zwischen mehreren Betrachtungen wechseln müssten. Es geht zudem um ein anderes Anliegen als bei den Aufgaben vom Typ 1, nämlich um das Arbeiten mit Klammern.
Als Mittel zur Erklärung der Klammerauflösungsregeln kann die Interpretation der negativen bzw.

positiven Zahlen als Plus bzw. Minuspunkte verwendet werden. Eine Arbeit mit Guthaben und Schulden wird nicht empfohlen, da die Betrachtungen zur Modellierung sehr schwierig sind (Es gibt keine negatives Geld!).
Es sollten Kurzformen der Regeln verwendet werden, die den Kurzformen der Regeln zur Multiplikation und Division rationaler Zahlen entsprechen.
Die Vorgehensweise entspricht der Orientierung beim Lösen von Gleichungen: Zuerst die Klammern beseitigen!

zu 3. In Verallgemeinerung der inhaltlichen Vorgehensweise unter 1. werden formale Regeln erarbeitet, die eine zunehmende Automatisierung der Handlungen ermöglichen sollen. Vor Anwendung der Regeln müssen alle Klammern um Zahlen entsprechend der formalen Regeln in 2. aufgelöst sein. Eine Unterscheidung von Vorzeichen und Rechenzeichen ist nicht erforderlich, deshalb wird allgemein von „Zeichen“ vor den Zahlen gesprochen.
Die inhaltliche Orientierung durch Schreiten auf der Zahlengeraden sollte als Kontrolle der formalen Vorgehensweise verwendet werden.

Behandlung mehrgliedriger Summen

Es ist für das Berechnen mehrgliedriger Summen bzw. für das spätere Zusammenfassen von Termen effektiv, die Ausdrücke als Summen anzusehen. Damit ist eine Interpretation der auftretenden Zeichen verbunden, sie werden als Vorzeichen gedeutet und gehören damit untrennbar zu den Zahlen. Dies beugt späteren Fehlern vor.
Diese neue Teilhandlung kann gleich als Zusammenfassen bezeichnet werden. Damit wird ihre besondere Stellung und die neue Interpretation der Zeichen im Unterschied zu den Summen und Differenzen aus zwei Zahlen unterstrichen. Ziel der Zusammenfassens ist es, unter Ausnutzung des Kommutativgesetzes entweder alle Zahlen mit gleichem Vorzeichen oder gleiche bzw. dicht bei einander liegende Zahlen zusammenzufassen.
Zur Entwicklung der Handlung sind Übungen im Einkringeln von Vorzeichen und Zahl sinnvoll.

Behandlung der Multiplikation und Division

Es wird entsprechend dem bisherigen Vorgehen sofort das Vorzeichen „+“ weggelassen.

Die Regel zur Multiplikation zweier negativer Zahlen sollte auf mehreren Wegen einsichtig gemacht werden, da verbreitet Unverständnis vorhanden ist. Verständnis kann in folgender Weise erreicht werden:

- Anwendung der Permanenzprinzips bei Aufgabenfolgen
- $3 \cdot (-1) = (-1) + (-1) + (-1) = -3$, also ist $-3 = (-1) \cdot 3$, d.h. „$(-1) \cdot$“ bedeutet: Bilde die entgegengesetzte Zahl. Also ist $(-3) \cdot (-4) = (-1) \cdot 3 \cdot (-4) = (-1) \cdot (-12) = -(-12) = 12$
- Verbindung zum Klammernauflösen: Minus Minus ergibt Plus: $-(-3) = 3$
- Allegorien: doppelte Verneinung ist Bejahung; Negation der Negation

Die Regeln zur Division sollten nicht inhaltlich erklärt, sondern aus der Umkehreigenschaft formal abgeleitet werden.
Als Kurzform der Regeln werden (unter Tipps und Tricks) die Formulierungen „Plus mal Minus gleich Plus“ und „Minus mal Minus gleich Plus“ verwendet.
Aus Zeitgründen sollten alle Rechnungen möglichst im Kopf durchführbar sein.

Zum Arbeiten mit dem Koordinatensystem

Das Koordinatensystem wird bei der Einführung als eine Anwendung der rationalen Zahlen behandelt.
Sicherheit im Eintragen und Ablesen von Punkten ist nicht erforderlich, da die Arbeit mit dem Koordinatensystem erst wieder in der 8. Klasse benötigt wird.
Die Schüler kennen die Begriffe Rechtswert und Hochwert aus Klasse 5. Diese Bezeichnungen wurden den Fremdwörtern Abszisse und Ordinate vorgezogen, da sie selbsterklärend sind und eine Verwechslung ansonsten leicht möglich ist. Weiterhin bestehen gut merkbare Verbindungen zu den Bezeichnungen x-Achse (Pfeil nach rechts) und y-Achse (Pfeil nach oben), die wiederum durch die lexikografische Anordnung x - y unterstützt werden.
Zur Bezeichnung der Achsen bzw. Koordinaten werden aber zunehmend die Bezeichnungen x-Achse und y-Achse bzw. x-Koordinate und y-Koordinate verwendet.

Quadrieren und Wurzelziehen sowie der Ausblick auf irrationale Zahlen

Mit dem Quadratwurzelziehen lernen die Schüler eine neue Rechenoperation kennen, die einige Besonderheiten im Vergleich zu den bisher bekannten aufweist:

- Es ist nicht ersichtlich, dass es eine Operation ist, da im Unterschied zum Quadrieren ein Operand (der Wurzelexponent) bei der Quadratwurzel nicht geschrieben wird. Da außer der Quadratwurzel keine weiteren behandelt werden, kann dies auch kaum verständlich gemacht werden. Hinzukommt, dass auf dem Taschenrechner auch nur eine Zahl und das Operationszeichen eingegeben wird und dann sofort das Ergebnis erscheint.
- Im Unterschied zu den Operationen Quadrieren und Potenzieren, bei denen die Operation durch das Hochstellen eines Operanden ausgedrückt wird, wird beim Wurzelziehen ein neues Operationszeichen verwendet.
- Im Unterschied zum Quadrieren und Potenzieren (mit natürlichen Exponenten) kann die Quadratwurzel nicht mithilfe der Grundrechenoperationen durch ein entsprechendes Rechenverfahren berechnet werden. Es ist nur durch Probieren eine Zerlegung in zwei gleiche Faktoren möglich. Ansonsten kann das Ergebnis nur durch schrittweise Näherung bestimmt werden.
- Erstmalig kann ein Rechenergebnis nie vollständig, sondern nur mit einer bestimmten Genauigkeit angegeben werden. Eine (explizite oder implizite) Genauigkeitsforderung ist damit ein notwendiger Bestandteil der Aufgabenstellung.

In Anbetracht der knappen Zeit, der nicht vorhandenen Notwendigkeit für den folgenden Unterricht und der erneuten Behandlung in der Klasse 9 werden die genannten Aspekte nur im Ansatz berücksichtigt. Auch wird das Können im Berechnen von Quadratwurzeln erst bei Aufgaben zur Satzgruppe des Pythagoras benötigt. Es ist ausreichend, vor allem die Wurzeln aus Quadratzahlen zu beherrschen.
Weiterhin soll das Quadrieren und die Beherrschung der Quadratzahlen bis 20 wiederholt und durch die Betrachtung der Umkehraufgaben gefestigt und vertieft werden.
Hauptziel des Stoffabschnittes im Hinblick auf die Zahlenbereichserweiterung ist es, die Schüler zu der Einsicht zu führen, dass es außer den rationalen Zahlen noch weitere Zahlen gibt. Dies ist verbunden mit der Ergänzung des in der Kl. 6 angeeigneten Begriffsystems zu den Arten von Dezimalbrüchen, das bei dieser Gelegenheit wiederholt wird. Im Zusammenhang mit der Erweiterung des Dezimalbruchbegriffes auf unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche sollten die Schüler erkennen, dass sich jeder Bruch in einen Dezimalbruch aber nicht jeder Dezimalbruch in einen Bruch verwandeln lässt. Die Brüche sind also nur eine Teilmenge der Dezimalbrüche.

Beitrag historischer Betrachtungen zum Verständnis negativer Zahlen

Mit historischen Betrachtungen kann verdeutlicht werden, dass man durchaus mit Guthaben und Schulden und auch weiteren Anwendungen der negativen Zahlen umgehen kann, ohne den Begriff der negative Zahlen als mathematisches Objekt und spezielle Regeln zum Rechnen mit negativen Zahlen zu verwenden.
Die Akzeptanz der negativen Zahlen und des Rechnens mit Ihnen ist vor allem ein innermathematisches Problem.
Es kann verdeutlicht werden, dass es viele Sachsituationen gibt, in denen negative Zahlen keinen Sinn ergeben; z.B. von 0 Stück Schokolade kann man nicht 4 wegnehmen, eine Strecke von 4 cm kann man nicht um 10 cm verkürzen.
Diese Betrachtungen können die Schüler darauf vorbereiten, bei der Lösung von Sachaufgaben die eventuell auf innermathematischem Weg erhaltenen negativen Lösungen (z.B. bei quadratischen Gleichungen) am Sachverhalt auf Existenzmöglichkeit zu überprüfen.