

10 Entwicklung von Problemlösefähigkeiten

10.1 Zum Lösen von Problemen im Mathematikunterricht

a) Zu den Begriffen Aufgabe (Aufgabenstellung) und Problem (Problemaufgabe)

Eine mathematische *Schüleraufgabe* ist eine Aufforderung an Schüler zur Ausführung von Handlungen, die mathematisches Wissen und Können erfordern.



Eine mathematische Schüleraufgabe ist ein *Problem für einen Schüler*, wenn ihm die Lösungsschritte nicht bekannt oder unmittelbar bewusst sind.

b) Arten problemhafter Aufgaben:

- Herleitungen, Begründungs- und Beweisaufgaben, (vgl. 9.2, 10.2)
- Sachaufgaben (vgl. 10.3)
- die meisten geometrischen Konstruktionsaufgaben (vgl. 10.7)
- weitere formale Aufgaben, die der jeweilige Schüler nicht auf Anhieb lösen kann, weil er z. B. keine Fertigkeiten dazu besitzt, das Verfahren vergessen hat oder die Aufgabe ein hohes Anforderungsniveau hat (vgl. 10.4)

c) Bezug zum Kompetenzmodell der Bildungsstandards von 2003

„(K2): Probleme mathematisch lösen:

Dazu gehört:

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,
- geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden,
- die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren.“

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss
(Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4. 12. 2003), S. 8

Bedeutung:

Heuristik wird zu einem Gegenstand des Mathematikunterrichts


Kritik:

- Tautologie: zum Probleme lösen gehört Probleme bearbeiten
- nur Tätigkeiten, keine Fähigkeiten (Kompetenzen)
- ungenaue Formulierungen: welche Hilfsmittel, Strategien, Prinzipien?
- Reflektieren ist kein notwendiger Bestandteil der Problembearbeitung
- Es fehlen Einstellungen zum Problemlösen.

d) Bestandteile des Könnens im Lösen von Problemen:

1. Wissen und Können zu den fachlichen Anforderungen der Aufgabe
2. Kenntnisse und Gewohnheiten zu heuristischen Vorgehensweisen
3. Beweglichkeit des Denkens
4. Interesse am selbständigen Lösen von Problemen
5. Selbstvertrauen und Beharrlichkeit

e) Zur Heuristik

- Begriff: Methoden und Regeln des Entdeckens und Erfindens
- Geschichte der Heuristik in der Mathematik: 
Archimedes (um 287 v. Chr.), Pappus (um 300),
Hadamard (1866-1963); Polya (1887-1985)
- Anliegen: Förderung der geistigen Beweglichkeit durch einen höheren Grad an Bewusstheit
- Ziel und Methode:
Stelle dir selbst geeignete Fragen.
- Lösungsschema einer mathematischen Aufgabe
- Elemente: Heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien

f) Allgemeine Schrittfolge zum Lösen von Problemen

1. **Erfassen** und **Analysieren** der Aufgabenstellung
2. **Suchen** nach Lösungsideen und **Planen** eines Lösungsweges
3. **Durchführen** des Lösungsplanes
4. **Kontrollieren** und **Auswerten** der Lösung und des Lösungsweges

g) Heuristische Hilfsmittel:

Tabellen, Skizzen, gegenständliche Veranschaulichungen

h) Generelle heuristische Vorgehensweisen für alle Problemaufgaben

1. Allgemeine Prinzipien

- Suchen nach Analogien (Analogieprinzip)
- Zurückführen auf Bekanntes (Rückführungsprinzip)

2. Heuristische Strategien

- Ausgehen vom Ziel (Rückwärtsarbeiten)
- Ausgehen vom Gegebenen (Vorwärtsarbeiten)

3. Spezielle Prinzipien

- Arbeiten mit Hilfsaufgaben (Probieren, Spezialisieren, Verallgemeinern)
- Zerlegen in Teilprobleme (Zerlegungsprinzip)
- Übersetzen des Problems (Transformationsprinzip)
- Invarianzprinzip

i) Aspekte geistiger Beweglichkeit und ihre Förderung durch heuristische Hilfsmittel und Vorgehensweisen

Aspekte geistiger Beweglichkeit	Förderung durch Vorgehensweisen
<p>Reduktion: intuitives Reduzieren des Problems auf das Wesentliche, Vereinfachen des Problems, Betrachten von Beispielen</p>	<p>Erfassen der Hauptinformation: <i>Worum geht es in der Aufgabe?</i> Verwenden von Tabellen und Skizzen Arbeit mit Hilfsaufgaben</p>
<p>Reversibilität: Umkehren von Gedankengängen</p>	<p>Ausgehen von Ziel (Rückwärtsarbeiten)</p>
<p>Aspektbeachtung: gleichzeitige Beachtung mehrerer Aspekte</p>	<p>Zerlegungsprinzip Invarianzprinzip</p>
<p>Aspektwechsel: von bisherigen Gedanken loslassen, Sachverhalt neu oder umstrukturieren</p>	<p>Transformationsprinzip</p>
<p>Transferierung: Übertragung eines bekannten Vorgehens auf das neue Problem</p>	<p>Analogieprinzip Transformationsprinzip</p>

„Ausgleich fehlender geistiger Beweglichkeit durch einen höheren Grad an Bewusstheit“

10.2 Zum Können im Argumentieren, Begründen und Beweisen

10.2.1 Vorbemerkungen

a) Zu den Begriffen Argumentieren, Begründen, Beweisen und Herleiten

- *Argumentieren*: Angabe von Aussagen (Argumenten), mit denen die Wahrheit einer Behauptung mit Schlüssen begründet werden soll, die dies aber nicht unbedingt mit Sicherheit ermöglichen; $P(\text{Beh. ist wahr}) \leq 1$
- *Begründen* einer Behauptung: Angabe von Aussagen, mit denen die Wahrheit der Behauptung mit Sicherheit festgestellt werden kann
- *Beweisen* einer (schon bekannten) Behauptung: Angabe einer lückenlose Kette von Begründungen (deduktive Schlüsse)
- *Herleiten*: deduktive Schlüsse zum Finden einer (noch nicht bekannten) Behauptung und damit gleichzeitig ihres Beweises

b) Bezug zum Kompetenzmodell der Bildungsstandards von 2003

(K 1) Mathematisch argumentieren

„Dazu gehört:

- Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es ...?“, „Wie verändert sich...?“, „Ist das immer so ...?“) und Vermutungen begründet äußern,
- mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise),
- Lösungswege beschreiben und begründen.“

c) Beweisleistungen

d) Funktionen der Behandlung von Begründungs- und Beweisaufgaben bzw. Herleitungen

1. Aneignung von Kenntnissen und Entwicklung von Einstellungen zum Begründen und Beweisen als einer typischen mathematischen Arbeitsweise
2. Entwicklung der Fähigkeiten und Einstellungen zum selbständigen Lösen von Problemen
3. Festigung von Sätzen und Definitionen
4. Entwicklung der sprachlich-logischen Fähigkeiten

10.2.2 Möglichkeiten zur Motivation des Begründens und Beweisens

- Messen nicht in Frage stellen
- Wahrheit der Aussage nicht in Frage stellen
- Hauptmotiv: Suchen nach Begründungen
- auch geeignet:
unzulässige Verallgemeinerungen
optische Täuschungen

10.2.3 Möglichkeiten für nichtdeduktive Argumentationen

- (1) Verallgemeinern aus zahlreichen Einzelbeispielen
- (2) Gegenständliche Veranschaulichungen bzw. Handlungen
- (3) Präformale Begründungen und Beweise

Begriff: eine reduktive Schlussweise, die sich aber zu einer deduktiven verallgemeinern lässt

Möglichkeiten:

- Betrachtung repräsentativer Beispiele
- Handlungsbeweise

10.2.4 Zum Lösen von Beweisaufgaben

a) Hauptschritte (vgl. 10.1 f))

1. Erfassen und Analysieren der Aufgabenstellung
2. Suchen nach Beweisideen und Finden eines Beweises
3. Durchführen und Darstellen des Beweises
4. Kontrollieren und Auswerten der Beweisfindung und Beweisdarstellung

b) Möglichkeiten zum Analysieren und Erfassen der Aufgabenstellung bei einer Beweisaufgabe

(1) Worum geht es in der Aufgabe?

(2) Verstehe ich alles in dem Text?

(3) Ist eine Skizze möglich?

(4) Was ist die Behauptung und was sind die Voraussetzungen?

c) Heuristische Vorgehensweise zum Finden von Beweisideen (vgl. 10.1 h))

(1) Rückwärtsarbeiten

Teilzielfrage: *Woraus würde die Behauptung unmittelbar folgen?*

Hilfsmittelfrage: *Kenne ich Sätze mit gleicher Behauptung?*

Hilfsmittel: Umstrukturierter Wissensspeicher (Sätze nach Behauptung geordnet)

(2) Vorwärtsarbeiten

Teilzielfrage: *Was folgt aus den Voraussetzungen?*

Hilfsmittelfrage: *Kenne ich Sätze mit gleichen Voraussetzungen?*

(3) Arbeit mit Hilfsaufgaben

Kann ich durch Probieren mit speziellen Werten allgemeine Beziehungen erkennen?

(4) Zurückführen auf Bekanntes

Kenne ich einen ähnlichen, bereits bewiesenen Satz, auf den ich das Problem zurückführen kann?

(5) Zerlegen in Teilprobleme

Ist es möglich, verschiedene Fälle zu betrachten?

d) Weitere Probleme

- „Motivation“ von Hilfslinien
- Rolle und Art der Beweisdarstellung
- Probleme indirekter Beweise