

10.3 Zum Können im Lösen von Sachaufgaben

10.3.1 Vorbemerkungen

a) Zum Begriff „Anwendungsorientierter Mathematikunterricht“

- Geschichte der Anwendungen im Mathematikunterricht
- Prominentes Schlagwort vor Kompetenzwelle, sehr viele Unterrichtsvorschläge
Zwei Bedeutungen des Begriffs Anwenden:
 - (1) Anwenden im weiteren Sinne:
notwendiger Bestandteil jeder Festigung (Ergebnissicherung)
 - (2) Anwenden im engeren Sinne:
Anwenden der Mathematik zur Bearbeitung realer Probleme;
genetisches Prinzip (Wittmann), Realistic Mathematics (Freudenthal),
Grundverhältnis:
Aneignung der mathematischen Theorie \leftrightarrow Befähigung zum Lösen
von Sachproblemen
- viele Sachaufgaben keine realen Anwendungen, oft unreaale Frage
- Realitätsbezug aber kein notwendiges Merkmal, fiktiven Sachverhalt deutlich machen, z. B. Eine Person fährt von A nach B....
- in Sachverhalte eingekleidete innermathematische Aufgaben


**b) Bezug zum Kompetenzmodell der Bildungsstandards von 2003:
„(K 3) Mathematisch modellieren**

Dazu gehört:

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,
- in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten,
- Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.“

c) Zum Modellieren im Mathematikunterricht

- Begriff: Beschreiben oder Darstellen eines außermathematischen Sachverhalts bzw. einer innermathematischen Struktur durch ein geistiges Konstrukt oder ein materielles Objekt, mit dem wesentliche Merkmale des Sachverhalts bzw. der Struktur erfasst werden.
- Beispiele für Modelle: Quader als Begriff, Quader als Körpermodell, Zahl, Zahlengerade, Funktion, Pfeilklassse, Zufallsexperiment
- Modellmethode: Spezielle Methode der Problemlösung, z. B. bei allen Sachaufgaben
- Hauptschritte der Anwendung der Modellmethode zum Lösen außermathematischer Probleme

1. Bilden eines Realmodells, z. B. durch Vereinfachen der Situation, Vernachlässigen von Bedingungen
 2. Bilden eines mathematischen Modells (Mathematisieren)
 3. Finden einer Lösung im mathematischen Modell
 4. Interpretieren der Lösung im realen Sachverhalt
 5. Überprüfen (Validieren) der Lösung, eventuell Verbessern des Modells (Kreislauf)
- 
- allgemeine Fähigkeit im Modellieren gibt es nicht, „mathematisches Modellieren“ ist Bestandteil aller Aneignungsprozesse mathematischer Begriffe auf allen Stufen,
 - Botschaft der Standards: außermathematische Anwendungen des Gelernten sind wichtig
 - aber auch Vermittlung von Verfahrenskennntnisse zur Modellmethode, in unteren Klassen immanent und in oberen Klassen auch explizit:
 - Kenntnis der 5 Hauptschritte
 - Für einen Sachverhalt gibt es verschiedene math. Modelle.
 - Ein mathematisches Modell kann für verschiedene Sachverhalte verwendet werden.
 - Mathematische Modelle können dem Sachverhalt mehr oder weniger gut entsprechen.

d) Funktionen der Behandlung von Sachaufgaben

1. Motivierung der Schüler
2. Festigung des beim Lösen benötigten mathematischen Wissens und Könnens
3. Beitrag zu fachübergreifenden Zielen
 - Entwicklung der Fähigkeiten im Lösen von Problemen
 - Vermittlung von Kenntnissen und Einstellungen zum Modellieren
 - Entwicklung der sprachlich-logischen Fähigkeiten
 - Entwicklung der sozialen Qualifikationen
4. Verstehen und Hilfe zur Bewältigung von Problemen und Anforderungen im Alltag der Schüler

e) Probleme der Schüler beim Lösen von Sachaufgaben

bei Leistungserhebungen oft geringe Erfüllungsquoten, Ursachen:

- Es gibt kein fertiges Lösungsverfahren.
- (Fast) jede Sachaufgabe ist ein Problem für Schüler.
- Es müssen Informationen aus Texten entnommen werden.
- Das Können im Lösen der Aufgaben wird nicht systematisch entwickelt.
- Die Schüler werden zu selten alleine gelassen.

10.3.2 Hauptschritte einer heuristischen Orientierung zum Lösen von Sachaufgaben

- In LB oft viele spezielle Orientierungen mit unterschiedlicher Anzahl und Formulierung der Teilschritte
- Vorschlag für *eine **allgemeine Orientierungsgrundlage** für alle Sachaufgaben* (vgl. 10.1. f):
 1. Erfassen des Sachverhaltes
 2. Analysieren des Sachverhaltes
 3. Suchen nach Lösungsideen und Planen eines Lösungsweges
 4. Durchführen des Lösungsplanes
 5. Kontrolle und Auswertung der Lösung und des Lösungsweges
- Hauptetappen der Aneignung der in der Sek. I
 - o Kl. 1 – 4: Beginn der Entwicklung von Teilhandlungen
 - o Kl. 5/6: allgemeine Schrittfolge, Festigung der Teilhandlungen
 - o Kl. 7/8: Integration weiterer Aufgabentypen und Teilhandlungen
 - o Kl. 9/10: Verallgemeinerung und Verkürzung zur allgemeinen Vorgehensweise bei der Bearbeitung von Problemen
 - o Kl. 11/12: Integration weiterer Aufgabentypen, insbesondere Extremwertaufgaben

10.3.3 Möglichkeiten zum Erfassen und Analysieren des Sachverhaltes

a) Erfassen des Sachverhaltes

– Ziel: geistiges Hineinversetzen in den Sachverhalt

(1) *Worum geht es in der Aufgabe?*

Ziel: Erfassen der Hauptinformation

(2) *Verstehe ich alles in dem Text?*

Ziel: Klären unbekannter Begriffe und Sachverhalte

(3) *Was muss man in Wirklichkeit noch alles beachten?*

Welche Angaben sind nur Näherungswerte?

Ziel: Vergleiche mit der Wirklichkeit, sinnvolle Genauigkeit beachten

(4) *Welche Fragen könnte man noch stellen, die sich mit den Angaben in der Aufgabe beantworten lassen?*

Ziel: Stellen weiterer Fragen zu den Informationen in der Aufgabe

(5) *Könnte ich mir den Sachverhalt mit Gegenständen veranschaulichen?*

Ziel: Vorstellen oder Realisieren einer gegenständlichen Veranschaulichung des Sachverhalts

(6) *Wie könnte vermutlich die Antwort sein?*

Ziel: Schätzen des Ergebnisses auf Grund von Erfahrungen, Vorstellungen oder Kenntnissen zum Sachverhalt

b) Analysieren des Sachverhaltes

- Ziel: Ermitteln und Darstellen der Detailinformationen

(1) Was ist gesucht? Was ist gegeben?

Ziel: Ermitteln des Gesuchten und Gegebenen (in Worten)

(2) Wie kann ich das Gesuchte und Gegebene günstig bezeichnen?

Ziel: Bezeichnen der gesuchten und gegebenen Größen

(3) Ist eine Skizze möglich?

Ziel: Skizzieren des Sachverhaltes

(4) Kann ich die gesuchten und gegebenen Größen in einer Tabelle erfassen?

Ziel: Anfertigen einer Tabelle

Aufgabe:

Eine Wandergruppe verlässt um 8 Uhr eine Jugendherberge, ihr Ziel ist ein 25 km entfernter Zeltplatz. Zweieinhalb Stunden danach bemerkt man, dass der Gruppenleiter seinen DJH-Mitgliedsausweis vergessen hat. Ein hilfsbereiter Mitarbeiter fährt ihm sofort mit dem Fahrrad hinterher, um ihm den Ausweis zu bringen. Wann kann der Radfahrer wieder zurück sein, wenn man damit rechnet, dass die Wandergruppe durchschnittlich 5 km, der Radfahrer aber 15 km in einer Stunde zurücklegt? (ab Kl. 8)

10.3.4 Anwenden heuristischer Vorgehensweisen zum Finden von Lösungsideen bei Sachaufgaben

(1) Ausgehen vom Ziel (Rückwärtsarbeiten, Rückwärtsaufrollen)

- Teilzielfrage:
Woraus ließe sich die gesuchte Größe unmittelbar berechnen?
- Hilfsmittelfrage:
Gibt es Formeln oder Gleichungen, in denen die gesuchte Größe vorkommt?

Aufgabe:

Jörg fährt mit seinem Fahrrad eine 12 km lange Strecke bergauf und erreicht dabei nur eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 10 km/h. Bergab fährt er dieselbe Strecke mit durchschnittlich 30 km/h. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit für die gesamte Fahrt? (ab Kl. 8)

(2) Ausgehen vom Gegebenen (Vorwärtsarbeiten)

- Teilzielfrage:
Was lässt sich aus den gegebenen Größen unmittelbar berechnen?
- Hilfsmittelfrage:
Gibt es Formeln oder Gleichungen, in denen die gegebenen Größen vorkommen?

(3) Suchen nach Gleichungen (Mischung aus VA und RA)

- ***Welche Formeln oder Gleichungen gibt es, in der die gegebenen oder die gesuchten Größen vorkommen?***
- ***Stimmt die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten überein?***

Aufgabe:

Es sollen zylinderförmige Behälter mit einer Fassungsvermögen von 20 l hergestellt werden. Für die Mantelfläche stehen pro Behälter höchstens 30 dm² zur Verfügung. Wie hoch können die Behälter maximal sein? (Kl. 8)

(4) Arbeiten mit Skizzen

- ***Kann ich mir den Sachverhalt in einer Skizze veranschaulichen?***
 - ***Welche Situationen müsste ich skizzieren?***
 - ***Welche Beziehungen kann ich erkennen?***

Aufgabe: In einem Bus sind ein Drittel der Plätze mit Kindern besetzt. Es sitzen sechs Erwachsene mehr als Kinder im Bus, neun Sitzplätze bleiben frei. Wie viel Plätze hat der Bus? (ab Kl. 5)

(5) Arbeiten mit Tabellen

- ***Kann ich die Angaben in einer Tabelle darstellen?***
 - ***Wofür benötige ich Zeilen? (Welche Objekte treten auf?)***
 - ***Wofür benötige ich Spalten? (Welchen Eigenschaften treten auf?)***
 - ***Welche Beziehungen innerhalb der Zeilen und Spalten erkenne ich?***

Aufgaben: Wanderaufgabe (Folie 7), Aufgaben zum Alter



(6) Arbeiten mit Hilfsaufgaben

- ***Kann ich durch Probieren mit speziellen Werten allgemeine Beziehungen erkennen?***
- ***Lassen sich die Lösungen durch systematisches Probieren finden?***

Aufgabe:

Eine Fußballmannschaft gewann dreimal so viele Spiele wie sie verlor. Vier Spiele verliefen unentschieden. Insgesamt trug sie 28 Spiele aus. Wie viele Spiele gewann sie? (ab Kl. 5)

(7) Invarianzprinzip

Was bleibt gleich?

Aufgabe:

Zum Experimentieren wird eine 30%ige Salzlösung benötigt. Vorhanden sind aber lediglich 2 Liter 10%ige Salzlösung sowie eine Flasche mit 42%iger Salzlösung. Ermittle, wie viel Liter 42%ige Salzlösung den 2 Litern 10%iger Salzlösung zuzusetzen sind, damit eine 30%ige Salzlösung entsteht.

(8) Transformationsprinzip

Kann ich das Problem in die Sprache einer anderen mathematischen Disziplin übersetzen?

Aufgabe: Wanderaufgabe (Folie 7)

(9) Zerlegungsprinzip

- *Ist es möglich, verschiedene Fälle zu betrachten?*
- *Ist es möglich, die Bedingungen für das Gesuchte einzeln zu betrachten?*

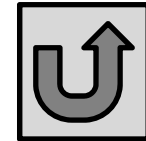
Aufgabe: Ein Hotel hat 30 Ein- und Zweibettzimmer mit zusammen 50 Betten. Wie viel Zimmer von jeder Sorte hat das Hotel?

10.3.5 Weitere Probleme

- Überschlag erst bei Durchführung des Lösungsplanes
- Möglichkeiten zur Kontrolle
 - Vergleich mit Schätzwert: ***Kann das wahr sein?***
 - Vergleich mit Überschlag
- „Mitführen“ der Einheiten
- Antwortsatz
- Arbeit mit sinnvoller Genauigkeit
- Differenzierung der Aufgabenstellung
- Rückschau auf Lösungsideen

Heuristische Orientierungen zum Durchführen des Lösungsplanes

- a) Wie rechne ich am günstigsten?
- b) Kann ich vor der Rechnung einen Überschlag im Kopf machen?
- c) Wie kann ich die Rechnungen sofort kontrollieren?



Heuristische Orientierungen zur Kontrolle und Auswertung der Lösung und des Lösungsweges

- a) Kann das wahr sein?
- b) Habe ich alle wesentlichen Angaben verwendet?
- c) Kann ich das Ergebnis am Sachverhalt überprüfen?
- d) Habe ich das Ergebnis mit einer sinnvollen Genauigkeit angegeben?
- e) Wie lautet die Antwort?

