

10.7 Zum Können im Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben

10.7.1 Begriff und Arten von Konstruktionsaufgaben

- a) Begriff (im Mathematikunterricht): Herstellen einer ebenen Figur unter Verwendung von zugelassenen Hilfsmitteln
- b) Figur, Arten der Herstellung, Hilfsmittel
- c) Arten von Konstruktionsaufgaben:
 - Algorithmisch zu lösende Aufgaben (Zeichenfertigkeiten)
 - Nicht algorithmisch zu lösende Aufgaben: problemhafte Aufgaben
- d) Unterschied Skizzieren, Zeichnen, Konstruieren

10.7.2 Allgemeines zu problemhaften Konstruktionsaufgaben

a) Ziele:

1. Entwicklung von Fähigkeiten im Lösen von Problemen
2. Entwicklung der sprachlich-logischen Fähigkeiten
3. Entwicklung von Zeichenfertigkeiten
4. Festigung von Sätzen und Definitionen
5. Gewöhnen an planvolles und exaktes Arbeiten

b) Allgemeine heuristische Orientierungsgrundlage

Anwendung der allgemeinen Orientierung zum Lösen von Problemen

1. Erfassen und Analysieren der Aufgabe
 - (1) *Worum geht es in der Aufgabe?*
 - (2) *Verstehe ich alles in dem Text?*
 - (3) *Wie skizziere ich günstig eine Planfigur?*
 - (4) *Welche Stücke sind gegeben, wie kann ich sie markieren?*
 - (5) *Wie könnte die gesuchte Figur aussehen?*
2. Suchen nach Lösungsideen, Aufstellen eines Lösungsplanes
3. Ausführen der Konstruktion, evtl. Beschreiben der Konstruktion
4. Bestimmen der Anzahl der Lösungen

c) Lösungsschema in der Theorie der Konstruktionsaufgaben (MO)

1. Konstruktionsbeschreibung
2. Beweis, dass die so konstruierte Figur den Bedingungen der Aufgabe genügt
3. evtl. Determination (Nachweis der Existenz, Anzahl der Lösungen mit Beweis)

10.7.3 Zur Methode der Bestimmungslinien

a) Zum Begriff der Bestimmungslinie:

Eine Bestimmungslinie ist eine Menge von Punkten mit einer gemeinsamen Eigenschaft.

b) Arten von Bestimmungslinien:

1. Mittelsenkrechte
2. Winkelhalbierende
3. Mittelparallele
4. Kreis
5. freier Schenkel eines Winkels α angetragen an \overline{AB} in A
6. Parallele zu einer Geraden
7. Kreisbogen \widehat{BA} über einer Strecke \overline{AB} mit dem Winkel γ als Peripheriewinkel über dem Bogen \widehat{AB}

c) Grundideen der Methode:

Anwendung des Rückführungs- und Zerlegungsprinzips:

- (1) Jede Konstruktionsaufgabe lässt sich auf das Bestimmen von Punkten zurückführen.
- (2) Einen Punkt erhält man als Schnitt zweier Bestimmungslinien.

- (3) Eine Bestimmungslinie für einen gesuchten Punkt erhält man, indem man eine der beiden Bedingungen *für sich* betrachtet und die Menge aller Punkte bestimmt, die diese Bedingung erfüllen.
- (4) Die Anzahl der Lösungen ergibt sich aus der Anzahl der Schnittpunkte der beiden Bestimmungslinie für einen Punkt.

d) Heuristische Orientierungen zum Finden von Lösungsideen

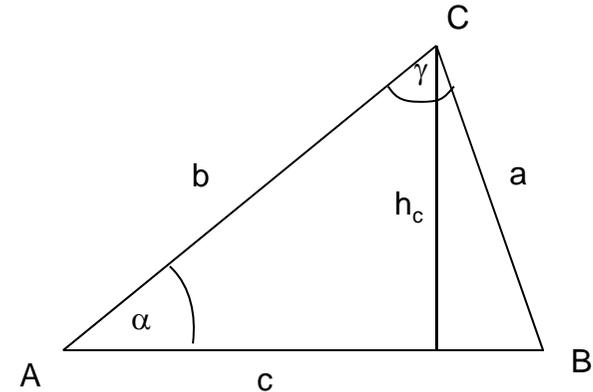
1. Wie viele Punkte brauche ich, um die gesuchte Figur zeichnen zu können?
2. Welche beiden Bedingungen für den gesuchte Punkt erhalte ich aus den gegebenen Stücken oder Angaben?
3. Wo liegen alle Punkte, die die erste Bedingung erfüllen?
4. Wo liegen alle Punkte, die die zweite Bedingung erfüllen?
5. Wie viele Schnittpunkte haben die beiden Bestimmungslinien für den gesuchten Punkt?

Beispiel: Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P auf g .
Gesucht sind alle Punkte, die von g den Abstand 2 cm und von P den Abstand 3 cm haben.

Bei Dreiecks- und Viereckskonstruktionen ist es meist günstig, mit einer Strecke zu beginnen.

e) Ermitteln von Bedingungen und Bestimmungslinien aus gegebenen Stücken

Bsp.: geg.: Strecke AB ges.: Punkt C



	Weiteres gegebenes Stück	Bedingung für Punkt C	Bestimmungslinie für C
a)	$a = 5 \text{ cm}$	C hat von B den Abstand 5 cm.	C liegt auf einem Kreis um B mit Radius $a = 5 \text{ cm}$.
b)	$\alpha = 30^\circ$	$\angle BAC = 30^\circ$	C liegt auf dem freien Schenkel des Winkels α angetragen an AB in A.
c)	$h_c = 3 \text{ cm}$	C hat den Abstand 3 cm von der Geraden AB.	C liegt auf einer Parallelen zu AB im Abstand $h_c = 3 \text{ cm}$.
d)	$\gamma = 40^\circ$	Von C aus erscheint die Strecke AB unter einem Winkel von 40° .	C liegt auf dem Bogen BA mit γ als Peripheriewinkel über dem Bogen AB

f) Hinweise zur Formulierung eines Planes mit Bestimmungslinien

- Angabe von zwei Bestimmungslinie für jeden Punkt, z. B.:
C liegt: 1. auf einem Kreis um A mit dem Radius $b = 5,3 \text{ cm}$
 2. auf einer Parallelen zu c im Abstand von $h_c = 4,4 \text{ cm}$
- bei Winkeln: z. B. C liegt auf dem freien Schenkel des Winkels $\alpha = 35^\circ$ angetragen an AB in A
- erste Punkte ohne Bestimmungslinien direkt festlegen:
z. B.: A und B sind durch $c = 5 \text{ cm}$ festgelegt

g) Rolle der Konstruktionsbeschreibung

h) Hinweise zur Ausführung der Konstruktion

- nur nach einer Seite einer Geraden konstruieren
- Punkte indizieren, z. B.: C_1, C_2, \dots

i) Zur Anzahl der Lösungen

j) Weitere Methoden:

- (1) Konstruieren nach Kongruenzsätzen (nicht zu empfehlen)
- (2) Methode der Teildreiecke (nicht zu empfehlen)
- (3) Vernachlässigen einer Bedingung (z. B. Ähnlichkeitskonstruktionen)
- (4) Methode der Abbildungen (nur exemplarisch)

k) Zur Aneignung und Anwendung der Methode der Bestimmungslinien

(Klassen nach Plan in MV)

- (1) Heranführen an die Betrachtungsweise:
 - Abtragen von Strecken und Winkeln, Kl. 4/5
 - Zeichnen von Schrägbildern auf Gitterpapier, Kl. 5/6
- (2) Erste Anwendung der Methode beim Konstruieren von Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen, Kl. 5/6
- (3) Systematische Einführung vor den Dreieckskonstruktionen (Kl. 6)
Aufgabenfolge:
 - geg.: eine Bedingung; ges.: Bestimmungslinie
 - geg.: 2 Bedingungen; ges.: 2 Bestimmungslinien, Schnittpunkte
 - geg.: ein Stück; ges.: Bedingung und Bestimmungslinie
- (4) Festigen der Methode bei Viereckskonstruktionen (Kl. 6)
- (5) Einführen der 7. Bestimmungslinie bei Konstruktionen mit Sätzen am Kreis (Kl. 7)
- (6) Vertiefen der Methode bei Darstellung von Körpern als Schrägbild und in Zweitafelprojektion (Kl. 7/8)
- (7) Erweitern der Methode bei Konstruktionen mithilfe der Ähnlichkeit (Gy, Kl. 9)

10.7.4 Algorithmisch zu lösende Konstruktionsaufgaben

a) **Aufgabentypen:** (s. Standpunkte zu Zeichenfertigkeiten)

- Zeichnen von Punkten, Geraden, Strahlen
- Zeichnen von Kreisen mit gegebenen Radien
- Zeichnen, Antragen bzw. Abtragen von Strecken und Winkeln bestimmter Größe
- Parallelverschiebungen von Strecken und Geraden
- Grundkonstruktionen: Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Senkrechte errichten, Lot fällen
- Zeichnen von einfachen Schrägbildern auf Kästchenpapier
- Zeichnen von einfachen Ansichten

b) **Zur Verwendung des Geodreiecks**

c) **Schülerleistungen**

d) **Probleme der Fertigkeitsentwicklung**

- OG: Typ 1 (Bildfolgen) und Typ 3 (Erst vorstellen, dann zeichnen!)
- Verbalisieren: Konstruktionsbeschreibung
- Verallgemeinerung: verschiedene Lagen