

# 5. Hauptprozesse der Entwicklung des mathematischen Wissens und Könnens

## 5.1 Zur Entwicklung des Wissens und Könnens zu Zahlen und Größen

### 5.1.1 Generelle Probleme

- (1) Existenz von ETR verändert Bedeutung einzelner Bestandteile des Wissens und Könnens
- (2) Sichere Fertigkeiten im Rechnen ohne Hilfsmittel notwendig u. a. für
  - Einfache Berechnungen in der Schule und im Alltag
  - Umrechnen von Größen
  - Arbeiten mit Variablen, Gleichungen und Funktionen
- (3) Arbeit mit Zahlen besitzt Potenzen für fachübergreifende Ziele, z.B.
  - Bestimmte Charaktereigenschaften wie Beharrlichkeit, Sorgfalt
  - Gewohnheiten zur Selbstkontrolle
  - Einsicht in Verhältnis Mathematik - Praxis (Zahl als Modell)
- (4) Fertigkeiten im Rechnen mit natürlichen Zahlen, insbesondere im mündlichen Rechnen sind Grundlage jeglichen Rechnens
  - ⇒ Festigen der Kopfrechenfertigkeiten als ständige Aufgabe, Bsp. 1

### **5.1.2 Bestandteile des Wissens und Könnens (vgl. Bildungsstandards, Kritik)**

1. Kenntnisse zu Zahlen und Zahlenbereichen (vgl. V 6.4.1)
  - (1) Begriffe: natürliche Zahl; gemeiner Bruch; Dezimalbruch; gebrochene Zahl/Bruchzahl; negative, rationale, ganze, reelle Zahl
  - (2) Darstellungen: Stellentafel; Zahlenstrahl/-gerade
2. Wissen und Können zu Rechengesetzen und Vorrangregeln
3. Wissen und Können zu Relationen und Operationen
  - (1) Vergleichen und Ordnen
  - (2) Mündliches Rechnen
  - (3) Schriftliches Rechnen
  - (4) Verwenden eines einfachen TR
  - (5) Teilbarkeit
  - (6) Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren
4. Wissen und Können im Arbeiten mit Größen (vgl. V 10.5)
  - (1) Kenntnisse zu Größenarten, Einheiten, Umrechnungszahlen
  - (2) Größenvorstellungen

- (3) Schätzen von Größen
- (4) Umrechnen von Größen
- 5. Wissen und Können zur Prozent- und Zinsrechnung
- 6. Wissen und Können zu Näherungswerten und sinnvoller Genauigkeit (vgl. V 10.6)
  - (1) Runden, Überschlagen, Abschätzen
  - (2) Begriff: Näherungswert
  - (3) Verfahren zur Bestimmung einer sinnvolle Genauigkeit
- 7. Wissen und Können im Bestimmen von Anzahlen mit kombinatorischen Mitteln
- 8. Spezielle Einstellungen und Gewohnheiten beim Arbeiten mit Zahlen und Größen
  - (1) Wahl eines effektiven Lösungsweges
  - (2) Exakte, übersichtliche Darstellung der Lösung
  - (3) Durchführung von Rechenkontrollen

## 5.2 Entwicklung des Wissens und Könnens zur Algebra

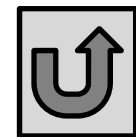
### 5.2.1 Generelle Probleme

- (1) Verständnis für Variable, Terme, Gleichung entscheidend für Lernen von Mathematik ab Kl. 7/8
- (2) Komponenten mathematische Fähigkeiten nach Krutezki
- (3) vielschichtiges Wechselverhältnis formaler und inhaltlicher Aspekte, z. B.: Der Variablenbegriff hat 5 inhaltliche Bedeutungsaspekte.
- (4) Hauptproblem der Schüler: Termumformungen  
Modell zur Ausführung von Handlungen beim Umformen von Termen, nach Malle, 1993
  1. Visuelle Aufnahme der Information über den Ausdruck
  2. Aufrufen eines Schemas
  3. Anpassen des Schemas an konkreten Ausdruck
  4. Ausführen der HandlungenIn jedem Schritt sind typische Fehler möglich.

# Komponenten mathematischer Begabung nach Krutezki, 1968

Ergebnis einer Analyse der Struktur mathematischer Fähigkeiten von Schülern der 6. bis 8. Klasse:

1. Fähigkeit zur formalisierten Wahrnehmung mathematischen Stoffes
2. Fähigkeit zum logischen Denken
3. Fähigkeit zur schnellen und weiten Verallgemeinerung
4. Fähigkeit zum Verkürzen von Gedankengängen und Handlungssystemen
5. Beweglichkeit der Denkprozesse, insbesondere Fähigkeit zum schnellen Umkehren von Gedankengängen
6. Streben nach Klarheit, Einfachheit und Rationalität der Lösung



### **5.2.2 Bestandteile des Wissens und Könnens (vgl.: Bildungsstandards)**

1. Kenntnisse zu den Begriffen Variable, Term, Gleichung, Ungleichung, Können im Anwenden der Begriffe zum Beschreiben von inner- und außermathematischen Sachverhalten (vgl. V 6.4.2)
2. Können im inhaltlichen Lösen aller Typen von Gleichungen und Ungleichungen (vgl. V 5.2.3)
3. Kenntnisse und Fertigkeiten zum Ausführen folgender Handlungen
  - (1) Erkennen der Struktur von Termen
  - (2) Belegen von Termen
  - (3) Umformen von Termen
  - (4) Umformen von Gleichungen und Ungleichungen
  - (5) Lösen einer linearen Gleichung bzw. Ungleichung
  - (6) Umstellen einer Gleichung/Ungleichung nach einem Term
  - (7) Lösen von linearen Gleichungssystemen
  - (8) Lösen einer quadratischen Gleichung
4. Kenntnisse und Gewohnheiten zur Kontrolle der Lösungen
5. Wissen und Können zu Elementen der linearen Algebra (Sek II)

## 5.2.3 Zum Wechselverhältnis von inhaltlichem und formalen Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

### a) Begriff formales Lösen:

- Lösen von Gleichungen und Ungleichungen durch Anwendung der Umformungsregeln für Gleichungen/Ungleichungen
- Syntaktische Sichtweise

### b) Begriff inhaltliches Lösen:

- Lösen ohne Verwendung von Umformungsregeln
- Semantische Sichtweise

### c) Bedeutung:

- (1) einzige Möglichkeit für alle Typen bis zur Einführung der Umformungsregeln in Kl. 7/8
- (2) Möglichkeit für alle Typen, für die die Schüler kein algorithmisches Lösungsverfahren kennen
- (3) ermöglicht z. T. rationelleres Lösen
- (4) ermöglicht Beitrag zur Entwicklung
  - des Kopfrechnens

- der Fähigkeit im Erkennen von Termstrukturen
- sprachlicher Fähigkeiten und geistiger Beweglichkeit

#### **d) Probleme und Prinzipien**

- (1) Prinzip: „Versuche jede Gleichung zuerst inhaltlich zu lösen!“
- (2) Bewertung: als vollwertige Lösung anerkennen
- (3) Schriftliche Darstellung: nur Gleichungen

#### **e) Möglichkeiten zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen und Ungleichungen**

- (1) Systematisches Probieren
- (2) Zerlegen von Zahlen und Termen in Summen und Produkte
- (3) Vergleichen von Zählern und Nennern bei Verhältnisgleichungen
- (4) Verwenden der Umkehroperation bzw. Umkehrfunktion
- (5) Veranschaulichung der Terme und Gl./Ungl. auf der Zahlengerade
- (6) Grafisches Lösen von Gleichungen und Ungleichungen
- (7) Verwenden von Definitionen und Sätzen



## f) Entwicklung des Wissens und Können im Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

(1) Kl. 1 - 4: nur inhaltliches Lösen

- inhaltliches Verständnis des Gleichungsbegriffs
- Aufstellen von Gleichungen zu Sachverhalten und sachbezogenes Lösen von Gleichungen

(2) Kl. 5/6: nur inhaltliches Lösen

- Inhaltliches Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen
- Auch einige quadratische Gleichungen und Gleichungen mit 2 Variablen

(3) Kl. 7/8: Einführung und Dominanz des formalen Lösens

- formales Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen
- Schnittstelle zu formalen Lösens: Ordnen der Variablen
- inhaltliches Lösen von einigen linearen Gleichungen und Verhältnisgleichungen sowie von Gleichungen mit Beträgen

(4) ab Kl. 9: Dominanz des inhaltlichen Lösens

- Vorrangig formales Lösen von Gleichungssystemen
- Formales und inhaltliches Lösen von quadratischen Gleichungen
- Inhaltliches Lösen von einfache Exponential-, Logarithmus- und goniometrischen Gleichungen (GBG)

## 5.3 Entwicklung des Wissens und Könnens zu Funktionen

### 5.3.1 Generelle Probleme

- (1) Mengentheoretische Erklärung des Funktionsbegriffs, inhaltliche Bedeutungen des Funktionsbegriffs (vgl. V 6.4.3)
- (2) Phasen der Entwicklung des Funktionsbegriffs beim Schüler:
  1. Kl. 1 bis 7: Propädeutik: Nachfolger, Tabellen, Abhängigkeiten, direkte und umgekehrte Proportionalität, geometrische Abb.
  2. Kl. 8: Wort „Funktion“, Übergang zur formalen Ebene
  3. Kl. 8/9: Dominanz formales Arbeitens, lineare, quadratische und Potenzfunktionen
  4. Kl. 10 (RS): Dominanz inhaltlicher Aspekte, Exponential- und Winkelfunktionen
  5. Sek. II: Erweiterung des Begriffsnetzes durch Ableitung, Stetigkeit, Grenzwert von Funktionen
- (3) Funktionsklassen oft unverbunden nacheinander, Verallgemeinerung der Eigenschaften am Ende Kl. 10 sinnvoll
- (4) An Gymnasien oft Bruch zwischen Sek. I und Sek. II (Kl. 10 – 12)

### 5.3.2 Bestandteile des Wissens und Könnens (vgl. Bildungsstandards)

1. Kenntnis von Grundbegriffen  
Funktion; Definitionsbereich; Wertebereich; Argument; Stelle; u. a.  
Sek. II: Grenzwert; Stetigkeit; Ableitung; Integral; u. a.
2. Kenntnis der Definition und spezieller Eigenschaften sowie Können im Modellieren von Sachverhalten zu folgenden Funktionen:
  - (1) lineare Funktionen, direkte Proportionalität
  - (2) quadratische Funktionen
  - (3) Potenzfunktionen, umgekehrte Proportionalität
  - (4) Exponential- und Logarithmusfunktion
  - (5) Winkelfunktionen
  - (6) ganz- und gebrochen rationale Funktionen (Sek. II)
3. Wissen und Können zu Aspekten von Betrachtungen zu Funktionen an Graphen bzw. Gleichungen („Kurvendiskussion“)
  - (1) Änderungsverhalten (Monotonieverhalten)
  - (2) Nullstellen
  - (3) Verhalten im Unendlichen

- (4) Verhalten an Polstellen
  - (5) Symmetrieeigenschaften
  - (6) Einfluss von Parametern auf Eigenschaften und den Graphen der Funktion
  - (7) Extremstellen und Extremwerte
  - (8) Krümmungsverhalten (Sek. II)
4. Können im Arbeiten mit Graphen
    - (1) Arbeit mit einem Koordinatensystem
    - (2) Skizzieren eines Graphen zu einem Sachverhalt
    - (3) Lesen und Interpretieren eines Graphen
    - (4) Vergleichen von zwei Graphen
  5. Können im Durchführen dynamischer Betrachtungen zu funktionalen Zusammenhängen (vgl. V 5.3.3)
  6. Wissen und Können in der Anwendung von Mitteln der Differential- und Integralrechnung zur Untersuchung von Funktionseigenschaften und realen Zusammenhängen (Sek. II)

### 5.3.3 Können im Durchführen dynamischer Betrachtungen zu funktionalen Zusammenhängen (Funktionales Denken i. e. S.)

#### a) Begriff:

Erkennen, Erfassen und Anwenden der Abhängigkeit der Veränderung einer Veränderlichen von der Veränderung einer anderen Veränderlichen

#### b) Teilhandlungen:

- (1) Erkennen der Veränderung von  $y$  bei Veränderung von  $x$
- (2) Finden einer Möglichkeit  $x$  so zu verändern, dass sich  $y$  in gewünschter Weise ändert
- (3) Erkennen von Sonder- und Grenzfällen
- (4) Untersuchen von realen Zusammenhängen zweier Größen, Bsp.

#### c) Möglichkeiten:

- (1) Betrachtungen zu Rechenoperationen
- (2) Betrachtungen zu Umfangs-, Flächeninhalts- und Volumenformeln
- (3) Betrachtungen zu beweglichen Figuren in der Geometrie
- (4) Untersuchung von proportionalen Zusammenhängen
- (5) Anstieg einer linearen Funktionen
- (6) Betrachtungen zur Ähnlichkeit von Figuren
- (7) Monotoniebetrachtungen zu Funktionen

## 5.4 Entwicklung des geometrischen Wissens und Könnens

### 5.4.1 Generelle Probleme

- (1) Hoher Anteil von Geometriestunden  
MV: Kl. 1 - 4: 16 %      Kl. 5 - 10: 33 %      Kl. 11/12: ca. 15 %
- (2) Aufbau des Lehrgangs:  
*Kl. 1 - 4:* Propädeutischer Lehrgang: Entwicklung inhaltlicher Vorstellungen zu Grundbegriffen, Dreiecken, Vierecken, Körpern, Symmetrien, Flächeninhalt, Volumen u. a.; Zeichenfertigkeiten; Raumvorstellung;  
*Kl. 5 - 10:* systematische Behandlung der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie  
*Oberstufe:* Analytische Geometrie (Koordinatengeometrie, geometrisches Modell der Vektorrechnung)
- (3) Darstellende Geometrie kein eigenes Thema, aber Aneignung von Verfahren zur Körperdarstellung
- (4) In Oberstufe 2 Alternativen zur Analytischen Geometrie, Linearen Algebra, oft: vektorielle Analytische Geometrie

## 5.4.2 Bestandteile des Wissens und Könnens (vgl. Bildungsstandards)

1. Kenntnis von geometrischen Grundbegriffen und Relationen  
Punkt, Gerade, Ebene, Strahl, Strecke, Abstand, Winkel, u. a.  
liegt auf, ist senkrecht zu, ist kongruent zu, u. a.
2. Wissen und Können zu Bewegungen und Symmetrien (vgl. V 5.4.3):  
Spiegelung und Achsensymmetrie; Verschiebung und  
Verschiebungssymmetrie; Drehung und Drehsymmetrie
3. Wissen und Können zu Begriffen, Sätzen und Berechnungen bei  
ebenen Figuren
  - (1) Winkelsätze an Geraden
  - (2) Dreiecke (Arten, Flächeninhalt, Sätze, Trigonometrie)
  - (3) Vierecke (Arten, Flächeninhalt, Sätze)
  - (4) Kreis (Umfang, Inhalt, Sätze)
4. Wissen und Können zu ähnlichen Figuren
  - (1) maßstäbliche Vergrößerung/Verkleinerung
  - (2) Ähnlichkeit
  - (3) Strahlen- und Ähnlichkeitssätze

5. Wissen und Können zu Körpern
  - (1) Körperbegriffe
  - (2) Körperdarstellung (Projektionsarten, Arten von Bildern)
  - (3) Körperberechnung
6. Wissen und Können zur analytischen Beschreibung von ebenen und räumlichen Figuren (GBG)

Bei 1. bis 6. insbesondere:

7. Können im Lösen von geometrischen Konstruktionsaufgaben
8. Fertigkeiten im Freihandzeichnen und im Umgang mit Zeichengeräten
9. Fähigkeiten zur Raumwahrnehmung und Raumvorstellung (Thema HS)

### **5.4.3 Rolle und Behandlung geometrischer Abbildungen**

#### **a) fachlicher Hintergrund (Felix Klein, David Hilbert):**

- Abbildungsarten: Kongruenzabbildung, Ähnlichkeitsabbildung, affine Abbildung (z. B. schräge Parallelprojektion), projektive Abbildung



- 2 Möglichkeiten zum Aufbau der Geometrie:  
kongruenzgeometrisch oder abbildungsgeometrisch
- unterschiedliche Definition der Begriffe Kongruenz und Ähnlichkeit,  
z.B.: Vielecke sind ähnlich,
  - wenn sie in allen gleich liegenden Winkeln und Verhältnissen von Seiten übereinstimmen. (kongruenzgeometrisch)
  - wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die das eine Vieleck auf das andere abbildet. (abbildungsgeometrisch)
  - wenn sie durch eine maßstäbliche Vergrößerung oder Verkleinerung auseinander hervorgehen (gemischt)

## **b) Prinzipien:**

- (1) Die Abbildungen sollten im Zusammenhang mit den entsprechenden Symmetrien behandelt werden.
- (2) Es sollten bei jedem Thema nach Möglichkeit abbildungsgeometrische und figurbezogene Betrachtungen erfolgen.
- (3) Abbildungen sollten zum Finden von Begründungen genutzt werden.
- (4) Abbildungen sollten zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens genutzt werden.

## 5.5 Entwicklung des stochastischen Wissens und Könnens

### 5.5.1 Generelle Probleme

- (1) Stochastik: Sammelbegriff für Wahrscheinlichkeitsrechnung, beschreibende Statistik/EDA und beurteilende Statistik; in der Schule meist auch Kombinatorik dazu gerechnet
- (2) Geschichte des Stochastikunterrichts:
  - Preußen 1901: Kombinatorik und WR
  - KMK 1958: WR/Statistik an math.-naturw. Gymnasien
  - EPA 75, 89: WR/Statistik als Wahlgebiet
  - EPA 2002: Stochastik als gleichberechtigtes Sachgebiet
  - in DDR: nur Kombinatorik, auch in vielen BL bis 2002 nur wenige Elemente Pläne 2001, Bildungsstandards
- (3) Prinzipien zur Gestaltung des Stochastikunterrichts:
  1. Das exemplarische Arbeiten dominiert gegenüber dem systematischen Vorgehen.
  2. Experimente und Projekte sind notwendige Methoden.
  3. Es sind oft verbale Beschreibungen der numerischen bzw. grafischen Ergebnisse erforderlich.

### **5.5.2 Bestandteile des Wissens und Könnens**

1. Wissen und Können im Erkennen, Strukturieren und Modellieren von Erscheinungen und Zusammenhängen mit Zufallscharakter (vgl. V 6.4.4)
2. Wissen und Können im Erfassen, Analysieren und Interpretieren von statistischen Daten mit Mitteln der beschreibenden Statistik und Explorativen Datenanalyse (EDA)
3. Wissen und Können im Schätzen, Ermitteln und Interpretieren von Wahrscheinlichkeiten, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Erwartungswerten (vgl. V 6.4.5)
4. Können im Schätzen von Parametern und Bewerten von Hypothesen mit Mitteln der beurteilenden Statistik