

6.4 Bedeutungsaspekte ausgewählter Begriffe

6.4.1 Zahlbegriffe und Rechenoperationen

a) Natürliche Zahl

- Entspricht Bedeutung des Wortes ZAHL beim Schüler bis Kl. 5
- Bedeutungen entwickeln sich durch entsprechende Lernhandlungen, kein expliziter Gegenstand
- Mögliche Schüleraufgabe: „Wozu verwendet man Zahlen?“
- Inhaltliche Aspekte des Begriffs Natürliche Zahl:
 - 1. **Kardinalzahlaspekt:** Zahlen beschreiben die Anzahl der Elemente einer (endlichen, abzählbaren) Menge.
 - 2. **Ordinalzahlaspekt**
 - Zählzahlaspekt: Folge, die beim Zählen durchlaufen wird
 - Ordnungzahlaspekt: Zahlen geben den Rangplatz an.
 - 3. **Maßzahlaspekt:** Zahlen dienen als Maßzahlen bei Größen.
 - 4. **Operatoraspekt:** Zahlen bezeichnen eine Vielfachheit.
 - 5. **Darstellungsaspekt:** Zahlen lassen sich durch Ziffernreihen darstellen
 - 6. **Rechenzahlaspekt:** Mit Zahlen kann man rechnen.
 - 7. **Codierungsaspekt:** Zahlen werden zur Bezeichnung, Codierung bzw. Nummerierung verwendet.



- Formale Aspekte des Begriffs „Natürliche Zahl“
 1. Natürliche Zahlen werden axiomatisch festgelegt.
 2. Natürliche Zahlen bilden mit einer oder mehrerer Rechenoperationen eine algebraische Struktur.

b) Addieren und Subtrahieren natürlicher Zahlen

- Aspekte ergeben sich z. T. aus Zahlaspekten
- Handlungsaspekte:
 - *Addieren* heißt: Hinzufügen, Zusammenlegen, Vermehren, Verlängern, Wachsen, Zunehmen, Zuzählen, Gewinnen, Gesamtzahl bestimmen, Ergänzen, Einsteigen
 - *Subtrahieren* heißt: Wegnehmen, Abtrennen, Vermindern, Verkürzen, Schrumpfen, Abnehmen, Zurückzählen, Verlieren, Rest bestimmen, Verringern, Aussteigen
- Addieren und Subtrahieren kann dargestellt werden durch
 - a) Abtragen von Strecken
 - b) Bewegen auf dem Zahlenstrahl
 - c) Pfeile (Operatordarstellung)
- Summe bzw. Differenz heißen sowohl die Aufgabe als auch das Ergebnis
- Formaler Aspekt: Subtraktion ist die Umkehrung der Addition



c) Multiplizieren und Dividieren natürlicher Zahlen

- Inhaltliche Aspekte des Multiplizierens: Multiplizieren ist:
 1. Verkürzen des mehrfachen Addierens
 2. Zusammenfassen gleichartigen Mengen
 3. Vervielfachen (Vergrößern, Vermehren)
 4. Bildung von Paaren aus zwei Mengen
 5. Abzählen rechteckiger Anordnungen
- Inhaltliche Aspekte des Dividierens: Dividieren ist:
 1. Verkürzen des mehrfachen Subtrahierens
 2. Aufteilen einer Menge von Elementen in gleichmächtige Teilmengen vorgegebener Größe, ges.: Anzahl der Teilmengen
 3. gleichmäßiges Verteilen von Elementen auf eine vorgegebene Anzahl von Teilmengen, ges.: Anzahl der Elemente pro Teilmenge
 4. Halbieren, Dritteln, Vierteln (Verkleinern, Vermindern)
- Produkt bzw. Quotient heißen sowohl die Aufgabe als auch das Ergebnis



d) Gemeiner Bruch

- für Schüler nur BRUCH, oft wenig Bezüge zum Wort ZAHL
- Inhaltliche Aspekte des Bruchbegriffs
 1. Brüche beschreiben Teile eines Ganzen.
 2. Brüche beschreiben Teiler mehrerer Ganzer.
 3. Brüche beschreiben Teile einer Anzahl.

4. Brüche treten als Zahlenwerte bei Größenangaben auf.
5. Mit Brüchen kann man Bruchteile einer Größe berechnen.

– Formale Aspekte

1. Ein Bruch besteht aus Zähler, Bruchstrich und Nenner.
2. Eine Bruch ist ein Ergebnis einer Divisionsaufgabe.
3. Ein Bruch ist ein Operator.



e) Negative Zahl

– Inhaltliche Aspekte

1. Negative Zahlen geben die Lage unterhalb des Nullpunktes einer Skala an.
2. Negative Zahlen geben Abweichungen von einem Bezugswert an.
3. Negative Zahlen geben einen Unterschied an.
4. Negative Zahlen bezeichnen etwas Fehlendes.
5. Negative Größen gibt es in Wirklichkeit nicht.
6. Das Minuszeichen bei einer Größenangabe kann eine Orientierung (Richtungssinn) der Größe angeben.



– Formale Aspekte

1. Negative Zahlen entstehen durch Spiegelung der gebrochenen Zahlen auf der am Nullpunkt des Zahlenstrahls.
2. Sie haben den gleichen Abstand von der Null wie die entgegengesetzte Zahl.

6.4.2 Grundbegriffe der Algebra

a) Variable/Parameter:

– *Formale Aspekte:*

Eine Variable ist ein Buchstabe oder eine Zusammensetzung aus Buchstaben, Ziffern oder Zeichen. Nicht jeder Buchstabe ist eine Variable.

– *Inhaltliche Aspekte:*

1. **Verwendungsaspekt:**

Variable werden verwendet für

- a) bekannte Zahlen oder Größen,
- b) unbekannte aber feste Zahlen,
- c) beliebige Zahlen oder Größen.

2. **Bezeichnungsaspekt:**

Variable dienen zur Bezeichnung von Zahlen und Größen.

Es gibt Konventionen für Bezeichnungen.

3. **Einsetzungsaspekt:**

Für Variable können Zahlen, Größen oder Terme eingesetzt werden.

Variable sind Platzhalter oder Namen leerer Fächer.

4. **Rechenaspekt:**

Mit Variablen kann man wie mit Zahlen rechnen.

5. **Veränderungsaspekt:**

Eine Variable kann sich ändern.

b) Term:

- Formale Aspekte
 - Ein Term ist ein Ausdruck, der als Seite einer Gleichung vorkommen kann.
 - Ein Term ist ein Zahl, eine Variable oder eine Zusammensetzung aus Zahlen, Variablen und bestimmten anderen mathematischen Zeichen
 - Ein Term hat einen Variablengrundbereich, für den er definiert ist.
- Inhaltliche Aspekte des Termbegriffs:
 1. Terme mit Variablen werden verwendet:
 - a) für verschiedene Rechenausdrücke mit gleicher Struktur
 - b) für verschiedene Sachverhalte mit gleicher Struktur
 - c) zur Beschreibung von Eigenschaften von Zahlen
 2. Ein Term kann sowohl als eine Aufforderung zum Handeln als auch als ein Ergebnis aufgefasst werden.
 3. Es gibt Konventionen bei der Schreibweise von Termen.



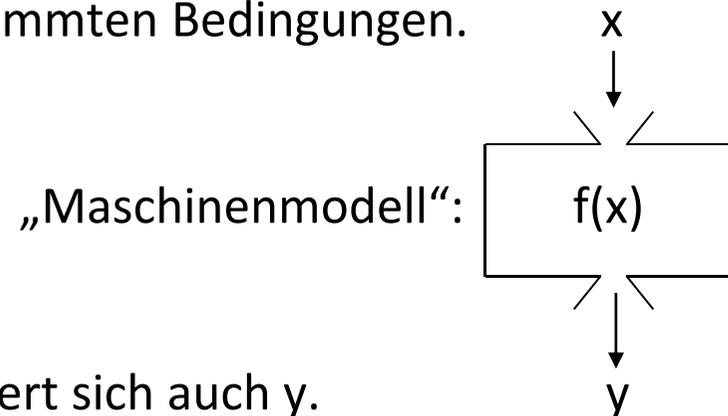
c) Gleichung:

- Formaler Aspekt: Zeichenkette aus zwei Termen mit Gleichheitszeichen
- Inhaltliche Aspekte:
 1. Die beiden Seiten der Gleichung haben verschiedenen Bedeutungen. Das Gleichheitszeichen ist gerichtet. Man kann die Seiten nicht vertauschen.
 2. Die beiden Seiten können auch gleichberechtigt sein und vertauscht werden.
 3. Eine Gleichung kann als Waage veranschaulicht werden. Was auf beiden Seiten steht, ist gleich.



6.4.3 Funktionsbegriff

- formaler (mengen-theoretischer) Aspekt:
Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung von Elementen einer Menge X zu Elementen einer Menge Y .
- Inhaltliche Aspekte
 1. **Modellaspekt:**
Mit Funktionen können reale Zusammenhänge und Abhängigkeiten zwischen Größen beschrieben werden.
 2. **Kausaler Aspekt:**
Mit einer Funktion f kann die Abhängigkeit einer Größe Y von einer Größe X bzw. der Zusammenhang zwischen zwei Größen beschrieben werden. Die Größe Y ist eine Funktion der Größe X .
Die Abhängigkeit gilt nur unter bestimmten Bedingungen.
 3. **Algorithmischer Aspekt:**
 $f(x)$ ist eine Vorschrift, mit der aus einem Eingabewert x ein Ausgabewert y entsteht.
 4. **Dynamischer Aspekt:**
Bei einer Veränderung von x verändert sich auch y .
 5. **Darstellungsaspekt:**
Eine Funktion kann verbal, durch eine Tabelle, ein Pfeildiagramm, einen Graphen oder eine Gleichung mit zwei Variablen dargestellt werden.



6.4.4 Grundbegriffe der Stochastik

6.4.4.1 Zufälliger Vorgang - Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen

a) Beispiele

Zufällige Vorgänge treten in vielen Bereichen auf.

			
Vorgang	ein Schüler springt	Werfen eines Würfels	Wachstum einer Getreideähre
Merkmal	Zensur für die Weite	Augenzahl	Länge
mögliche Ergebnisse	Zensuren 1 bis 6	1, 2, 3, 4, 5, 6	Längen zwischen 5 cm und 15 cm
Bedingungen	z.B. Technik, Sprungkraft, Windrichtung	z.B. Wurftechnik, Unterlage, Würfel	z.B. Bodengüte, Erbanlagen, Wetter
möglicher Zufallsversuch	Alle Schüler einer Klasse springen.	Es werden 600 Würfe untersucht.	Alle Ähren eines Feldes werden untersucht.

b) Aspekte:

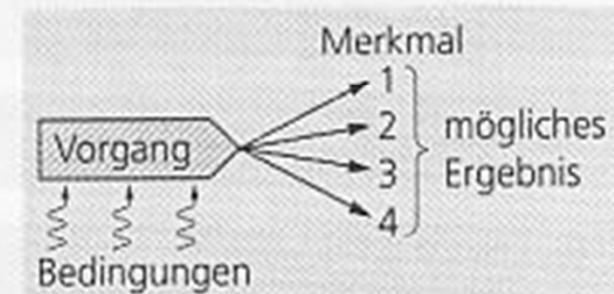
- (1) Betrachtung eines einzelnen zeitlich ablaufenden Vorgangs in der Natur, der Gesellschaft oder dem Denken in der Vergangenheit, der Gegenwart oder der Zukunft
- (2) Frage nach dem betrachteten Merkmal
- (3) Frage nach den möglichen Ergebnissen bezüglich des Merkmals
- (4) Betrachtung der Bedingungen eines einzelnen Vorgangs
- (5) Unterscheidung von allgemeine Bedingungen (Einflussfaktoren) und ihren Ausprägungen bei Ablauf des Vorgangs
- (6) Betrachtung einer bestimmten Anzahl von nacheinander oder gleichzeitig ablaufenden Vorgängen und ihren Bedingungen
- (7) Gruppierung von Vorgängen auf der Grundlage der Analyse der Bedingungen
- (8) Unterscheidung von Vorgang und Experiment zur Untersuchung des Vorgangs

b) Verbale und ikonische Darstellung:

Vorgänge mit verschiedenen möglichen **Ergebnissen** heißen **zufällige Vorgänge**. Die tatsächlich eintretenden Ergebnisse sind immer von bestimmten Bedingungen abhängig. Das Ergebnis eines zufälligen Vorgangs kann nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden.

Zur Untersuchung zufälliger Erscheinungen beantworte folgende Fragen:

- Welcher Vorgang läuft ab?
- Welches Merkmal interessiert mich?
- Welche Ergebnisse können auftreten?
- Welche Bedingungen beeinflussen den Vorgang?



Die Planung und Durchführung einer bestimmten Anzahl von Wiederholungen eines zufälligen Vorgangs wird als **Zufallsversuch (Zufallsexperiment)** bezeichnet.

c) Konsequenzen für die Gesamtheit von Gedanken zum Zufallsbegriff

- *Zufallsbegriff in der Umgangssprache:*
 - ein sehr selten auftretendes Ereignis: „großes Glück“, „großes Pech“
 - ein unerwartetes Ereignis: „zufällig begegnet“, durch Zufall gewonnen

- eins von mehreren gleichmöglichen Ereignissen: Würfeln
- was man beeinflussen kann, ist nicht zufällig: Die Zensur war kein Zufall.

(2) Zufallsbegriff in der Wissenschaft

- Zufallsexperiment: Experiment mit ungewissem Ausgang, das beliebig oft wiederholbar ist
- zufälliges Ereignis: Aussage über Ergebnis eines Zufallsexperimentes
- Zufallsstichprobe, zufällige Auswahl: Gleichwahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit der Ergebnisse, „echte“ Zufallszahlenfolge, „blindes“ Ziehen aus einer Urne
- Ausdruck fehlender Kenntnisse: die Gesamtheit der Ursachen des Ereignisses ist nicht bekannt, der Zufall verschwindet bei vollständiger Information
- Zufall als Korrelat zur Notwendigkeit: Der Zufall ist der Schnittpunkt zweier Notwendigkeiten

(3) Neuer Aspekt:

- Zufall als Eigenschaft eines Vorgangs
- zufällig: mehrere mögliche Ergebnisse bezüglich eines Merkmals

6.4.4.2 Wahrscheinlichkeit

– *Formale Aspekte*

1. Die Wahrscheinlichkeit ist ein Grundbegriff der Stochastik, der axiomatisch festgelegt wird.
2. Mit Wahrscheinlichkeiten kann man nach bestimmten Regeln rechnen.

– *Inhaltliche Aspekte*

1. **Komparativer Aspekt**

- a) Ein Ergebnis kann wahrscheinlicher sein als ein anderes.
- b) Ergebnisse zufälliger Vorgänge können mehr oder weniger wahrscheinlich sein.



2. **Objektiver Aspekt (Objektive Wahrscheinlichkeiten)**

- a) Wahrscheinlichkeiten geben den Grad der Möglichkeit des Eintretens von Ergebnissen zufälliger Vorgänge in der Natur oder der Gesellschaft an.
- b) Die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse hängt von Bedingungen des Vorgangs ab.
- c) Die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse wird durch das Denken des Subjektes, das den Vorgang untersucht, nicht beeinflusst, d.h. sie existiert unabhängig („objektiv“) vom erkennenden Subjekt, das sie nur möglichst genau bestimmen kann.

3. Subjektiver Aspekt (Subjektive Wahrscheinlichkeiten)

- a) Wahrscheinlichkeiten geben den Grad der Sicherheit der Ergebnisse von Denkvorgängen einer Person an, die als Aussagen (Hypothesen) über einen eingetretenen aber unbekanntem Zustand geäußert werden.
- b) Die Wahrscheinlichkeit der geäußerten Aussagen hängt von den Kenntnissen der Person und den ihr bekannten Informationen über den Zustand ab.
- c) Die Wahrscheinlichkeit kann sich bei weiteren Informationen, die die Person erhält, ändern.

4. Interpretationsaspekte

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann interpretiert werden als

- a) Chancenverhältnis für das Eintreten oder Nichteintreten
- b) Grad der Erwartung des Ereignisses vor einmaligen Ablauf des Vorgangs bzw. Bewertung des Eingetretenen nach dem Ablauf
- c) Vorhersage der Häufigkeit bei mehrmaligem Ablauf des Vorgangs (Häufigkeitsinterpretation)
- d) Grad der Sicherheit einer Hypothese (Aussage über einen unbekanntem Zustand der Welt)