

1. Durch die Keplersche Gleichung $x + y + \sin y = 0$ ist in der Ebene eine Kurve als Graph von $y = f(x)$ implizit gegeben. Man bestimme die Gleichung der Tangente an diese Kurve in ihrer Nullstelle.
2. Prüfen Sie, ob die Gleichung $F(x, y) = xe^x + ye^y + xy = 0$ eine Auflösung durch den Nullpunkt $(x, y) = (0, 0)$ besitzt. Man gebe das Taylorpolynom 2. Grades für die implizit gegebene Funktion an.
3. Die durch $F(x, y) = y^3 - xy^2 + x^3 - 1 = 0$ implizit definierte Funktion $f(x)$ ist auf relative Extrema zu untersuchen.
4. Man bestimme die Lage und die Art der aller relativen Extremwerte der Funktion $z = f(x, y)$ und gebe die zugehörigen Funktionswerte an.
 - a) $z = x^2(2 - y) - y^3 + 3y^2 + 9y$
 - b) $z = (x^3 - 3x)(y + 3) + y(y + 6)$
5. Ist die Funktion $f(x, y) = 2x - y - x^2 + 2xy - y^2$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ konvex oder konkav?

6. Für welche Werte der Konstante a ist die Funktion

$$f(x, y) = -6x^2 + (2a + 4)xy - y^2 + 4ay$$

mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ konvex/konkav?

7. Gesucht sind die Extremwerte von

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}.$$

8. Die Summe $S = x + y + z$ der Kantenlänge x, y, z eines Quaders sei gegeben. Wie lang sind diese Kanten zu wählen, damit der Oberflächeninhalt des betrachteten Quaders maximal wird?

9. Mittels der Methode der Lagrange-Multiplikatoren ermittle man die x, y -Koordinaten der möglichen Extrema von $z = 3x^2 + y$ unter der Nebenbedingung $4x^2 + 9y^2 = 36$.
10. Von den folgenden Parameterintegralen ist die erste Ableitung nach dem Parameter (für a) bis c)) in integralfreier Gestalt anzugeben:

$$\text{a) } h(t) = \int_{r=1}^{t^2} \frac{1}{t+r} dr, \quad (t > 0), \quad \text{b) } g(y) = \int_{t=1}^{y^2} \frac{dt}{3t^2}, \quad (y > 1),$$

$$\text{c) } G(t) = \int_{x=1}^2 \frac{\sinh(2t-tx)}{x-2} dx.$$

Minöl Ü2, Aufgabe 20.1, 20.2 S. 21

11. Die folgenden Gebiete D des \mathbb{R}^2 mit kartesischem Koordinatensystem sind durch eine Skizze und auf alle möglichen Arten als Normalbereich darzustellen.
- a) D wird durch die Geraden $y = 0$, $x = 5$ und $3y = x + 2$ begrenzt.
- b) D wird durch die Kurven $x = \frac{y^2}{4}$ und $y = 2x - 12$ begrenzt.
- c) D ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$.

12. Man berechne die folgenden Integrale:

$$\text{a) } \int \int_D (xy^2 + x^2) dx dy, \text{ wobei } D \text{ durch } x = y^2 \text{ und } y = x^2 \text{ begrenzt wird.}$$

$$\text{b) } \int \int_D (xy^2) dx dy, \text{ wobei } D \text{ durch } x + y + 1 = 0 \text{ und } x + y^2 = 1 \text{ begrenzt wird.}$$

13. Man skizziere den Integrationsbereich und vertausche die Integrationsreihenfolge ($f(x, y)$ sei stetig):

$$\text{a) } \int_0^4 \int_y^{10-y} f(x, y) dx dy, \quad \text{b) } \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy dx, \quad \text{c) } \int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx dy.$$

Minöl Ü2, Aufgabe 20.9, S. 23