Universität Rostock

Institut für Mathematik

VORKURS MATHEMATIK
TEIL: GEOMETRIE und LINEARE ALGEBRA

Dieter Neßelmann

24. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Diese Vorlesung dient der Auffrischung des Abiturstoffes in Mathematik für Studienanfänger der ingenieur- und naturwissenschaftlichen Fächer und der Heranführung an die universitäre Ausbildung in Mathematik. In fünf Vorlesungen werden die Gebiete

- Dreiecks- und Kreisgeometrie
- Lineare und quadratische Gleichungen, Gleichungen höheren Grades
- Lineare Gleichungssysteme, Matrizen
- Vektoren in der Ebene und im Raum, Skalar- und Vektorprodukt
- Geraden, Ebenen, Kegelschnitte

behandelt. Bis auf den Abschnitt „Kegelschnitte“ finden sich alle Gebiete im Schulunterricht wieder.

Wie im Schulunterricht wird hier ausschließlich euklidische Geometrie betrieben, d.h. es wird die Gültigkeit des Parallelenaxioms vorausgesetzt:

Parallelenaxiom

(P) Sei g eine Gerade und P ein Punkt (der Ebene oder des Raumes). Dann gibt es genau eine Gerade h, die durch P geht und parallel zu g ist.

1 Dreiecksgeometrie

1.1 Dreiecke

Winkelmessung - 1. Möglichkeit: Gradmaß

Der Vollkreis wird in 360 gleiche Teile unterteilt. Ein Teilstück, also der 360-igste Teil des Vollkreises, wird als $1°$ festgelegt. Dem x-ten Teil kommt dann das *Gradmaß* $\alpha = (\frac{360}{x})°$ zu.

Winkelmessung - 2. Möglichkeit: Bogenmaß

Eine der ältesten mathematischen Konstanten ist die Kreiszahl π. Ihr liegt die Erkenntnis zugrunde, dass das Verhältnis von Umfang zum Durchmesser für jeden Kreis dasselbe, also eine Konstante ist, was sich mit Hilfe des 1. Strahlensatzes leicht demonstrieren lässt. Diese Konstante heißt π.

Ist U der Umfang eines Kreises k und d sein Durchmesser ($r = \frac{d}{2}$ sein Radius), dann ist $\frac{U}{d} = konstant = \pi$

$$\Longrightarrow \quad U = \pi \cdot d = 2\pi \cdot r.$$

Für den Einheitskreis ($r = 1$) ist also der Umfang 2π. Dieses wird auch als *Bogenmaß* des Vollkreises gewählt: $b = 2\pi$. Dem x-ten Teil kommt dann das *Bogenmaß* $b = \frac{2\pi}{x}$ zu.

Die *Umrechnung* von Grad- in Bogenmaß und umgekehrt ergibt sich wie folgt:

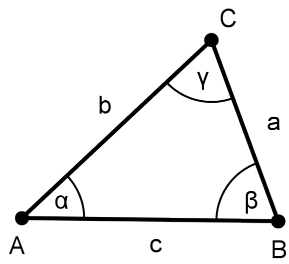
$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{1}{x} = \frac{b}{2\pi}, \quad \text{also} \quad b = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot b.$$

Dreiecke

Ein fundamentaler Begriff in der Dreiecksgeometrie ist die *Kongruenz von Dreiecken*, der im wesentlichen besagt, wann zwei Dreiecke als „gleich“ anzusehen sind, unabhängig von ihrer Lage in der Ebene oder im Raum.

Kongruenz von Dreiecken
Wir nennen zwei Dreiecke *kongruent*, wenn sowohl die Seiten als auch Winkel paarweise kongruent (gleich lang bzw. gleich groß) sind.

In der Regel benötigt man 3 Bestimmungsstücke, darunter eine Strecke, um genau ein Dreieck zeichnen zu können (bis auf die Lage in der Ebene oder im Raum). Welche Bestimmungsstücke ausreichend sind, geben die Kongruenzsätze für Dreiecke an.



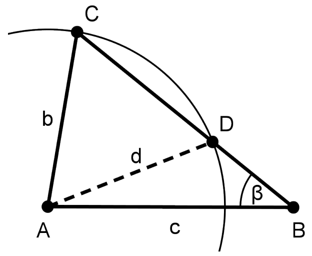
1. Kongruenzsatz (SWS)
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

2. Kongruenzsatz (WSW)
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

3. Kongruenzsatz (SSS)
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die drei Seiten paarweise kongruent sind.

4. Kongruenzsatz (SsW)
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel übereinstimmen.

Auf die Voraussetzung, dass der gegebene Winkel der <u>größeren</u> Seite gegenüber liegt, kann nicht verzichtet werden. In nebenstehender Skizze ist zu sehen, dass bei Vorgabe der Seiten b und c und des Winkels β, der der <u>kleineren</u> Seite b gegenüber liegt, zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke $\triangle(ABC)$ und $\triangle(ABD)$ konstruiert werden können ($b = d$).

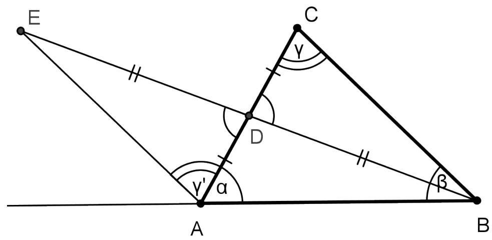


Außenwinkelsatz
Jeder Außenwinkel ist größer als jeder der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.

In der Skizze sind die Dreiecke $\triangle(ADE)$ und $\triangle(CDB)$ nach (SWS) kongruent und damit

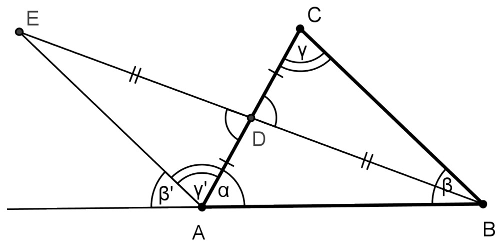
$$\gamma \cong \gamma' < Au\text{ß}enwinkel = \alpha',$$

wenn α' der Außenwinkel beim Punkt A ist.



Insbesondere sind wegen der kongruenten Wechselwinkel γ und γ' die Strecken AE und BC parallel und daher auch die Stufenwinkel β und β' kongruent, also

$$\alpha' = \beta' + \gamma' = \beta + \gamma.$$



Daher gilt in der euklidischen Geometrie der Außenwinkelsatz in seiner schärferen Fassung:

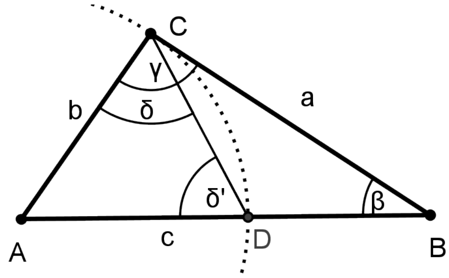
Außenwinkelsatz
Jeder Außenwinkel ist gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.

Als Folgerung aus dem Außenwinkelsatz erhält man:

In jedem Dreieck liegt die größere Seite dem größeren Winkel gegenüber und umgekehrt.

Im Dreieck $\triangle(ABC)$ sei $c > b$ und $D \in AB$ so gewählt, dass $AC \cong AD$. Dann ist das Dreieck $\triangle(CDA)$ gleichschenklig und daher $\delta \cong \delta'$. Nach dem Außenwinkelsatz ist

$$\beta < \delta' \cong \delta < \gamma.$$

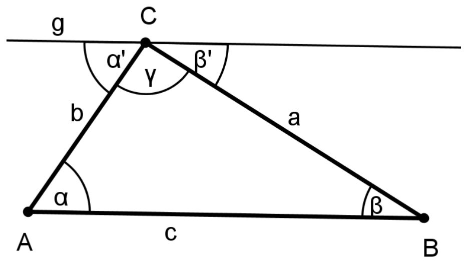


Ist umgekehrt $\beta < \gamma$ und wäre $b \geq c$, dann ist im Fall $b > c$ nach der bereits bewiesenen Richtung $\beta > \gamma$ und im Fall $b = c$ das Dreieck gleichschenklig, also $\beta = \gamma$. In beiden Fällen haben wir einen Widerspruch zu $\beta < \gamma$.

In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180° bzw. π.

Sei g parallel zur Strecke AB. Dann sind die Winkel α und α' sowie β und β' Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen und daher jeweils zueinander kongruent. Folglich ist

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ \; bzw. \; \pi.$$



Dreiecksungleichung

a) In jedem Dreieck mit den Seiten a, b, c gilt

$$a + b > c, \quad a + c > b \quad und \quad b + c > a. \qquad (A)$$

b) Ist umgekehrt für drei Strecken a, b, c die Bedingung (A)erfüllt, dann gibt es ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c.

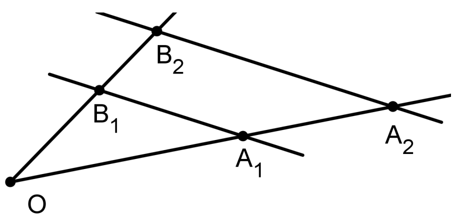
1.2 Strahlensätze

Die Strahlensätze gehören zum Fundament der euklidischen Geometrie und begründen die Ähnlichkeitslehre.

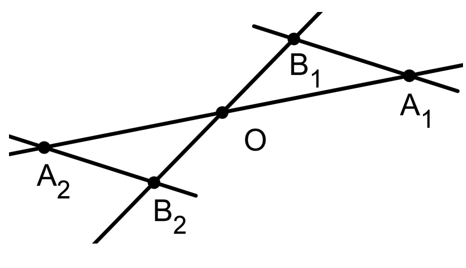
Wir bezeichnen im Folgenden Geraden durch zwei Punkte P und Q mit $g(P, Q)$ und die Länge einer Strecke AB mit $\ell(AB)$.

1. Strahlensatz
Schneiden sich zwei Geraden $g(A_1, A_2)$ und $g(B_1, B_2)$ im Punkt O und sind die Geraden $g(A_1, B_1)$ und $g(A_2, B_2)$ parallel, dann ist

$$\frac{\ell(OA_1)}{\ell(OA_2)} = \frac{\ell(OB_1)}{\ell(OB_2)} \quad \text{und} \quad \frac{\ell(OA_1)}{\ell(OB_1)} = \frac{\ell(OA_2)}{\ell(OB_2)} = \frac{\ell(A_1A_2)}{\ell(B_1B_2)}.$$



Fall 1

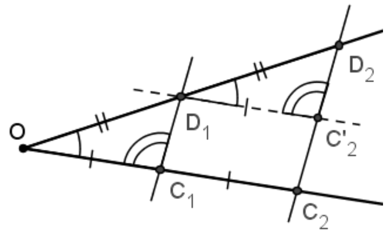


Fall 2

Ist umgekehrt die Bedingung $\frac{\ell(OA_1)}{\ell(OA_2)} = \frac{\ell(OB_1)}{\ell(OB_2)}$ erfüllt und liegen A_1 und A_2 sowie B_1 und B_2 jeweils entweder auf derselben Seite von O oder auf verschiedenen Seiten von O, dann sind die Geraden $g(A_1, A_2)$ und $g(B_1, B_2)$ parallel.

Beweisskizze

Vorbemerkung 1) Zunächst wird der einfachste Fall $n = 2$ wie in nebenstehender Skizze behandelt: Sei $g(C_2, D_2) \parallel g(C_1, D_1)$ und $AC_1 \cong C_1C_2$. Die Hilfsgerade $g(C_2', D_1)$ sei parallel zu $g(C_2, A)$, also $\square(C_1C_2C_2'D_1)$ ein Parallelogramm. Daher ist

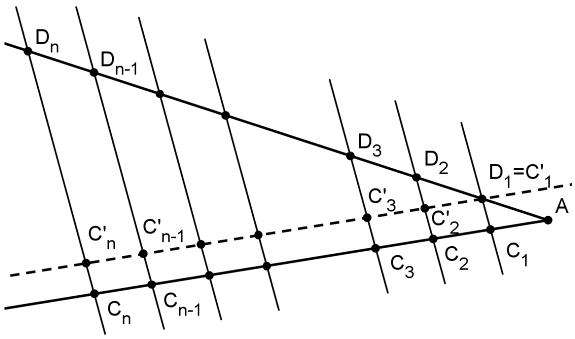


$$C_2'D_1 \cong C_2C_1 \cong C_1A$$

und nach dem Kongruenzsatz WSW $\triangle(AC_1D_1) \cong \triangle(D_1C_2'D_2)$. Hieraus folgt $AD_1 \cong D_1D_2$.

Vorbemerkung 2) Mit vollständiger Induktion zeigt man dann, wenn $g(C_i, D_i) \parallel g(C_1, D_1)$ für $i = 2, \ldots, n$ und $C_iC_{i+1} \cong AC_1$ für $i = 1, \ldots, n-1$, dann ist auch

$$D_iD_{i+1} \cong AD_1 \quad (i = 1, \ldots, n-1).$$



Hierzu ziehen wir eine Parallele zur Geraden $g(A, C_n)$ durch D_1 und erhalten die Parallelogramme $\square(C_iC_{i+1}C_{i+1}'C_i')$ $(i = 1, ..., n-1)$. In Parallelogrammen sind gegenüberliegende Seiten kongruent, also

$$C_i'C_{i+1}' \cong C_iC_{i+1} \cong AC_1 \ (i = 1, ..., n-1).$$

Da die Strahlen $\overrightarrow{D_1C_n'}$ und $\overrightarrow{D_1D_n}$ nur noch durch $n-1$ Parallele unterteilt werden, gilt nach Induktionsvoraussetzung

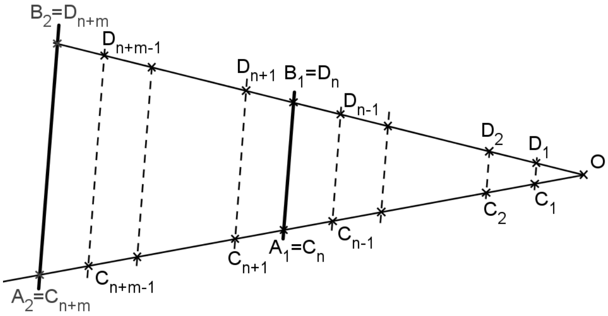
$$D_iD_{i+1} \cong D_1D_2 \ (i = 2, ..., n-1)$$

und wegen Vorbemerkung 1) auch $AD_1 \cong D_1D_2$, also $D_iD_{i+1} \cong AD_1$ für $i = 1, ..., n-1$.

Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich der Beweis des 1. Strahlensatzes wie folgt:

Fall 1: Das Streckenverhältnis $\frac{\ell(OA_1)}{\ell(OA_2)}$ ist eine rationale Zahl, etwa

$$\frac{\ell(OA_1)}{\ell(OA_2)} = \frac{n}{n+m} < 1, \ (m > 0).$$



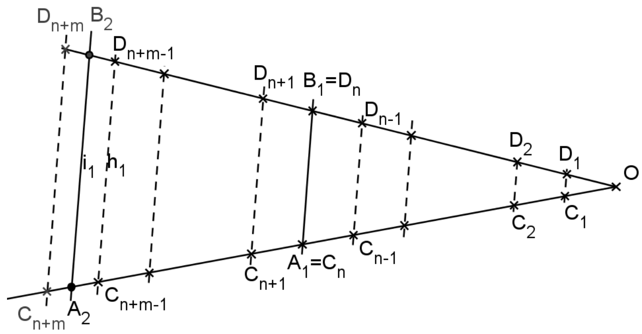
Dann können wir die Strecke OA_1 in n kongruente Teilstrecken der Länge $\ell(OC_1)$ und die Strecke OC_1 in m kongruente Teilstrecken ebenfalls der Länge $\ell(OC_1)$ teilen.

Aus der Vorbereitung 2) ergibt sich, dass die Strecken D_iD_{i+1} ($i = 1, ..., n+m$) ebenfalls zueinander kongruent von der Länge $\ell(OD_1)$ sind. Daher ist

$$\frac{\ell(OA_1)}{\ell(OA_2)} = \frac{n \cdot \ell(OC_1)}{(n+m)\cdot \ell(OC_1)} = \frac{n}{n+m} = \frac{n\cdot \ell(OD_1)}{(n+m)\cdot \ell(OD_1)} = \frac{\ell(OB_1)}{\ell(OB_2)}.$$

Fall 2 (inkommensurabler Fall): Das Streckenverhältnis $\frac{\ell(OA_1)}{\ell(OA_2)}$ ist keine rationale Zahl.

In diesem Fall benötigen wir zum Beweis des Strahlensatzes einen Grenzübergang, kommen also nicht mit unseren elementargeometrischen Hilfsmitteln aus. Für kein n gibt es ein m, so dass wir mit obiger Konstruktion auf A_2 treffen.



Ist nun n beliebig aber fest vorgegeben und OA_1 in n kongruente Strecken OC_1, C_iC_{i+1} der Länge $\ell(OC_1)$ ($i = 1, ..., n-1$) geteilt, dann ist $\ell(OA_1) = n \cdot \ell(OC_1)$ und entsprechend $\ell(OB_1) = n \cdot \ell(OD_1)$. m sei derart gewählt, dass

$$(n+m-1)\cdot \ell(OC_1) < \ell(OA_2) < (n+m)\cdot \ell(OC_1)$$

und entsprechend dann

$$(n+m-1)\cdot \ell(OD_1) < \ell(OB_2) < (n+m)\cdot \ell(OD_1).$$

Gleichheit kann wegen der Irrationalität von $\frac{\ell(OA_1)}{\ell(OA_2)}$ für kein n (und m) eintreten.

Nach Division durch $\ell(OA_1) = n \cdot \ell(OC_1)$ bzw. $\ell(OB_1) = n \cdot \ell(OD_1)$ erhält man

$$\frac{n+m-1}{n} = \frac{n+m}{n} - \frac{1}{n} = \frac{(n+m-1)\cdot \ell(OC_1)}{n\cdot \ell(OC_1)} < \frac{\ell(OA_2)}{\ell(OA_1)} < \frac{(n+m)\cdot \ell(OC_1)}{n\cdot \ell(OC_1)} = \frac{n+m}{n}$$

und

$$\frac{n+m-1}{n} = \frac{n+m}{n} - \frac{1}{n} = \frac{(n+m-1)\cdot \ell(OD_1)}{n\cdot \ell(OD_1)} < \frac{\ell(OB_2)}{\ell(OB_1)} < \frac{(n+m)\cdot \ell(OD_1)}{n\cdot \ell(OD_1)} = \frac{n+m}{n}.$$

Aus der Differenz beider ergibt sich

$$0 \le \left| \frac{\ell(OA_2)}{\ell(OA_1)} - \frac{\ell(OB_2)}{\ell(OB_1)} \right| < \frac{1}{n}.$$

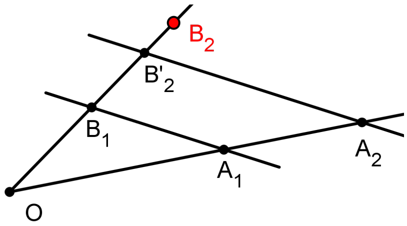
Da n beliebig groß und damit $\frac{1}{n}$ beliebig klein gewählt werden kann, bleibt nur die Möglichkeit

$$\left| \frac{\ell(OA_2)}{\ell(OA_1)} - \frac{\ell(OB_2)}{\ell(OB_1)} \right| = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\ell(OA_2)}{\ell(OA_1)} = \frac{\ell(OB_2)}{\ell(OB_1)}.$$

Beweis der Umkehrung: Angenommen, es gilt $\frac{\ell(OA_1)}{\ell(OA_2)} = \frac{\ell(OB_1)}{\ell(OB_2)}$, also

$$\ell(OB_2) = \frac{\ell(OA_2)}{\ell(OA_1)} \cdot \ell(OB_1).$$

Sei $B_2' \in \overrightarrow{OB_1}$ derart, dass $g(A_2, B_2') \parallel g(A_1, B_1)$. Dann ist nach dem 1. Strahlensatz $\frac{\ell(OA_1)}{\ell(OA_2)} = \frac{\ell(OB_1)}{\ell(OB_2')}$ und daher



$$\ell(OB_2') = \frac{\ell(OA_2)}{\ell(OA_1)} \cdot \ell(OB_1) = \ell(OB_2),$$

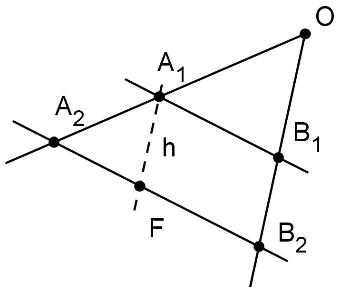
also $B_2' = B_2$.

2. Strahlensatz

Ist mit obigen Bezeichnungen $g(A_1, B_1) \parallel g(A_2, B_2)$, dann gilt $\dfrac{\ell(OA_1)}{\ell(OA_2)} = \dfrac{\ell(A_1B_1)}{\ell(A_2B_2)}$.

Die Umkehrung gilt nicht.

Zum Beweis sei h eine Parallele zu $g(B_1, B_2)$ durch A_1 und F der Schnittpunkt von h mit der Geraden $g(A_2, B_2)$. Dann gilt nach dem 1. Strahlensatz mit A_2 als Zentrum

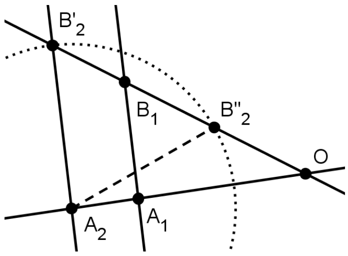


$$\frac{\ell(A_1O)}{\ell(A_2O)} = \frac{\ell(FB_2)}{\ell(A_2B_2)} = \frac{\ell(A_1B_1)}{\ell(A_2B_2)}.$$

Um zu sehen, dass die Umkehrung nicht gilt, nehmen wir an, dass zwei Strahlen $\overrightarrow{OA_1}$ und $\overrightarrow{OB_1}$ gegeben sind und $A_2 \in \overrightarrow{OA_1}$. Für einen Punkt $B_2 \in \overrightarrow{OB_1}$ soll gelten

$$\frac{\ell(OA_1)}{\ell(OA_2)} = \frac{\ell(A_1B_1)}{\ell(A_2B_2)}. \qquad (*)$$

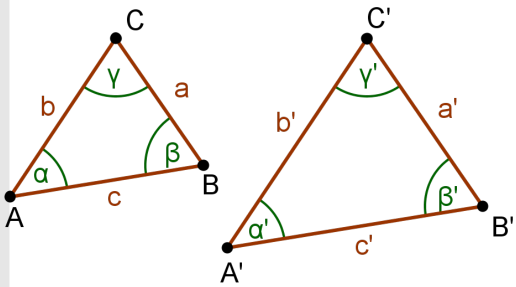
Wir schlagen um A_2 einen Kreisbogen mit dem Radius $\ell(A_2B_2)$. Dieser trifft die Gerade $g(O, B_1)$ in zwei Punkten B_2' und B_2''. Beide Punkte erfüllen die Bedingung $(*)$, jedoch kann nur für einen der Punkte B_2' oder B_2'' gelten: $g(A_2, B_2') \parallel g(A_1, B_1)$ oder $g(A_2, B_2'') \parallel g(A_1, B_1)$.



Ähnlichkeit von Dreiecken

Zwei Dreiecke Δ und Δ' heißen *ähnlich*, wenn

1. die Winkel paarweise kongruent sind: $\alpha \cong \alpha'$, $\beta \cong \beta'$, $\gamma \cong \gamma'$ und
2. die Streckenverhältnisse einander zugeordneter Seiten gleich sind: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.

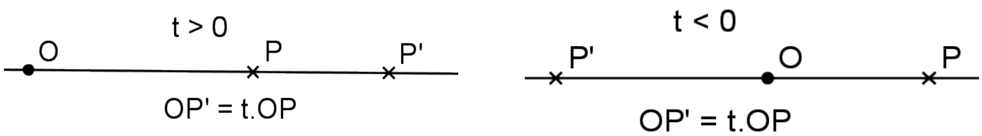


Entsprechend wie bei den Kongruenzsätzen reichen auch hier weniger Bedingungen für die Ähnlichkeit zweier Dreiecke aus:

Zwei Dreiecke Δ und Δ' sind *ähnlich*, wenn eine der beiden Bedingungen 1. oder 2. erfüllt ist oder wenn zwei Streckenverhältnisse gleich und die von diesen Strecken eingeschlossenen Winkel kongruent sind, z.B. $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ und $\alpha \cong \alpha'$.

Die wichtigste *Ähnlichkeitsabbildung* ist die *Zentralstreckung*, die hier kurz behandelt werden soll.

Zentralstreckung
Sei O ein fester Punkt der Ebene, $P \neq O$ ein beliebiger Punkt und $t \neq 0$ eine fest gewählte reelle Zahl. Eine *Zentralstreckung* oder *zentrische Streckung* ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die dem Punkt P den Bildpunkt $P' \in g(OP)$ zuordnet, so dass $OP' = t \cdot OP$. Ist $t > 0$, dann liegen P und P' auf derselben Seite von O, ist $t < 0$, dann liegen P und P' auf verschiedenen Seiten von O. O heißt das *Zentrum* der Zentralstreckung und t der *Streckungsfaktor*.

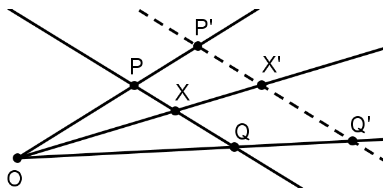


Für eine Zentralstreckung gilt:

a) Ist g eine Gerade, dann ist das Bild g' von g eine zu g parallele Gerade.

b) Ist $\alpha = \measuredangle(BAC)$ ein Winkel, dann ist das Bild $\alpha' = \measuredangle(B'A'C')$ ein zu α kongruenter Winkel.

c) Ist k ein Kreis vom Radius r, dann ist das Bild k' von k ebenfalls ein Kreis vom Radius $r' = |t| \cdot r$.



Beweis a) Sei $X \in g(PQ)$ $(P \neq Q)$ ein beliebiger Punkt der Geraden durch P und Q, die nicht durch O gehen soll, und X', P', Q' die Bildpunkte von X, P und Q. t $(t \neq 0)$ sei der Streckungsfaktor der Zentralprojektion und etwa $t > 0$. Dann ist

$$\ell(OX') = t \cdot \ell(OX), \quad \ell(OP') = t \cdot \ell(OP), \quad \ell(OQ') = t \cdot \ell(OQ)$$

und daher

$$\frac{\ell(OX')}{\ell(OX)} = \frac{\ell(OP')}{\ell(OP)} = \frac{\ell(OQ')}{\ell(OQ)} = t.$$

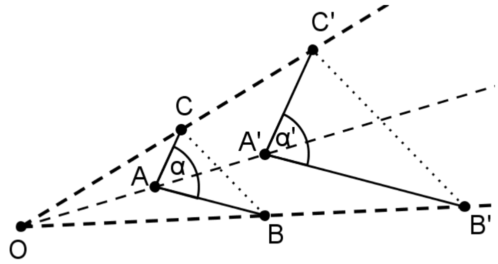
Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes sind die Geraden $g(P', X')$ und $g(P, X) = g(P, Q)$ sowie $g(Q', X')$ und $g(Q, X) = g(P, Q)$ parallel, also

$$g(P'X') = g(Q', X') = g(P', Q')$$

nach dem Parallelenaxiom **(P)**. Daher liegt X' auf der Geraden $g(P', Q')$ und dieses ist eine zu $g(P, Q)$ parallele Gerade.

b) Sei $\alpha = \measuredangle(BAC)$ und $\alpha' = \measuredangle(B'A'C')$ mit den Bildpunkten A', B', C' von A, B, C. Dann sind einander entsprechende Dreiecksseiten parallel und nach dem 2. Strahlensatz ist

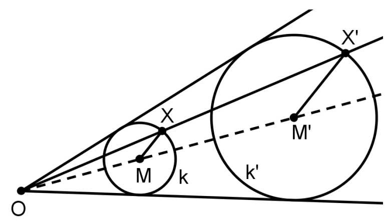
$$\frac{\ell(A'B')}{\ell(AB)} = \frac{\ell(A'C')}{\ell(AC)} = \frac{\ell(B'C')}{\ell(BC)} = t.$$



Daher sind die Dreiecke $\triangle(ABC)$ und $\triangle(A'B'C')$ ähnlich, was die Kongruenz der Winkel zur Folge hat.

c) Sei k ein Kreis vom Radius r, $X \in k$ beliebig und k' die Menge aller Bildpunkte von k. Ist M der Mittelpunkt von k und M' sein Bild, dann ist nach dem 2. Strahlensatz für alle $X \in k$:

$$\frac{1}{|t|} = \frac{\ell(OM)}{\ell(OM')} = \frac{\ell(MX)}{\ell(M'X')} = \frac{r}{\ell(M'X')}$$



und daher

$$M'X' = |t| \cdot MX = |t| \cdot r - \text{konstant.}$$

1.3 Flächeninhalt eines Dreiecks

Für die Festlegung eines Flächenmaßes benötigen wir ein „Referenzmaß“ und eine „Normierung“.

a) **Referenzmaß:** Dieses sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b $(a,\ b > 0)$.

b) **Normierung:** Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 habe die Fläche $F = 1 \cdot 1 = 1$.

Referenzmaß Rechteck

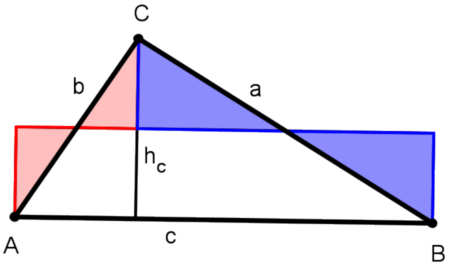
Der *Flächeninhalt* eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b wird definiert als

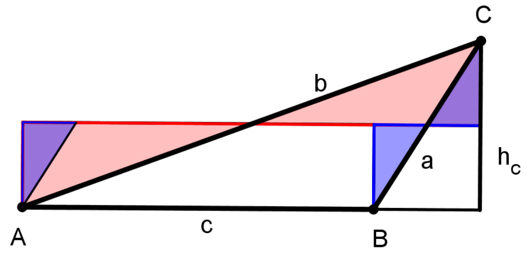
$$F(a, b) = a \cdot b.$$

Inhalt einer Dreiecksfläche

Der Inhalt einer Dreiecksfläche mit der Grundseite c und der Höhe h_c wird definiert durch

$$F_\Delta = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$





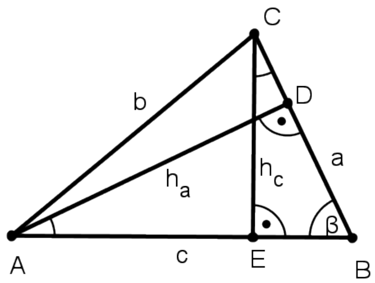
Es wird stillschweigend vorausgesetzt, dass kongruente Flächen den gleichen Flächeninhalt haben, was mit dieser Definition auch richtig ist. Durch Kongruenzüberlegungen ergibt sich nun, dass die Fläche des Dreiecks $\triangle(ABC)$ übereinstimmt mit der Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen c und $\frac{1}{2}h_c$. (In den Figuren sind gleichfarbige Dreiecke offenbar jeweils kongruent, wobei in der rechten Figur das obere blaue Dreieck kongruent zum unteren linken Dreieck ist.)

Es bleibt zu klären, ob diese Definition unabhängig von der gewählten Grundseite ist, d.h. ob in jedem Dreieck auch

$$c \cdot h_c = b \cdot h_b = a \cdot h_a.$$

Dieses ergibt sich jedoch aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle(ABD)$ und $\triangle(CBE)$ in nebenstehender Skizze: $\dfrac{h_a}{c} = \dfrac{h_c}{a}$ und genauso $\dfrac{h_a}{b} = \dfrac{h_b}{a}$

$$\Longrightarrow \quad h_a \cdot a = h_b \cdot b = h_c \cdot c.$$

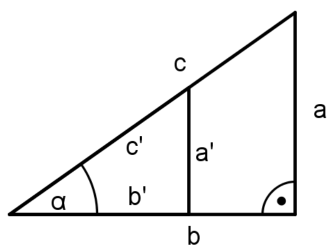


1.4 Winkelfunktionen: Sinus, Kosinus

Sinus, Kosinus

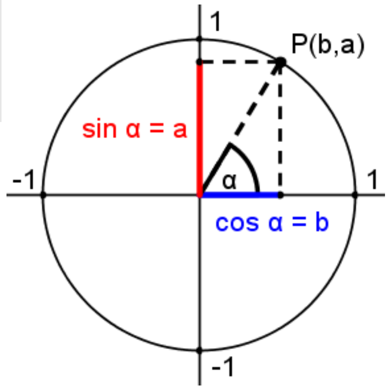
Wir betrachten rechtwinklige Dreiecke wie in nebenstehender Figur mit den Katheten $a,\ b$ und der Hypotenuse c bzw. den Katheten $a',\ b'$ und der Hypotenuse c'. Nach dem 2. Strahlensatz gilt

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \text{ und } \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}.$$



Daher sind für einen vorgegeben Winkel α die Verhältnisse $\frac{\mathit{Gegenkathete}}{\mathit{Hypotenuse}}$ bzw. $\frac{\mathit{Ankathete}}{\mathit{Hypotenuse}}$ konstant. Diese Verhältnisse sind die Winkelfunktionen *Sinus* und *Kosinus* des Winkels α:

$$\sin\,\alpha := \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \cos\,\alpha := \frac{b}{c} \quad (0 < \alpha < 90^\circ).$$



Für $\alpha = 0$ ($a = 0,\ b = c$) setzen wir $\sin\,\alpha := 0$ und $\cos\,\alpha := 1$ und für $\alpha = 90^\circ$ setzen wir $\sin\,\alpha := 1$ und $\cos\,\alpha := 0$. Wählen wir $c = 1$, dann liegt der Punkt P mit den Koordinaten $P = (b, a)$ auf dem Kreis mit dem Radius 1 (Einheitskreis) und es ist

$$\sin\,\alpha = a \quad \text{und} \quad \cos\,\alpha = b \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}).$$

Lassen wir P den gesamten Kreis durchlaufen und gehört zum Winkel α der Punkt P_α mit den Koordinaten $P_\alpha = (p_x(\alpha), p_y(\alpha))$, dann definieren wir

$$\sin\,\alpha := p_y(\alpha) \quad \text{und} \quad \cos\,\alpha := p_x(\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi).$$

Lassen wir den Winkel α ein weiteres Mal den Kreis durchlaufen, erhalten wir dieselben Werte von Sinus und Kosinus für Winkel α mit $2\pi \leq \alpha \leq 4\pi$ usw. Sinus und Kosinus sind daher *periodisch mit der Periode* 2π.

Wegen $a^2 + b^2 = c^2$ (Satz des Pythagoras) ist

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$$

Entsprechend wie oben ist das Verhältnis $\frac{Gegenkathete}{Ankathete}$ für einen vorgegebenen Winkel α konstant. Dieses Verhältnis nennen wir den *Tangens* des Winkels α:

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b}.$$

Es ist $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ für alle Winkel α, für die $\cos\alpha \neq 0$.

Mit dem Tangens wird insbesondere der Anstieg einer Geraden beschrieben (siehe Abschnitt 7).

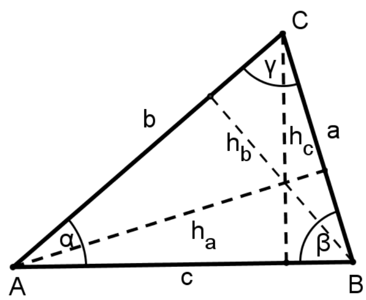
Sinussatz, Kosinussatz

Wir betrachten in einem Dreieck $\triangle(ABC)$ die Höhen $h_a,\ h_b,\ h_c$. Es gilt

$$\sin\beta = \frac{h_a}{c},\ \sin\gamma = \frac{h_a}{b} \implies h_a = c\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\gamma$$

$$\sin\gamma = \frac{h_b}{a},\ \sin\alpha = \frac{h_b}{c} \implies h_b = a\cdot\sin\gamma = c\cdot\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b},\ \sin\beta = \frac{h_c}{a} \implies h_c = a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha$$



Für den Flächeninhalt $F_\Delta = \frac{1}{2}a\cdot h_a = \frac{1}{2}b\cdot h_b = \frac{1}{2}c\cdot h_c$ des Dreiecks erhält man hieraus

$$F_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha.$$

Division aller Terme dieser Gleichungen durch $\frac{1}{2} a \cdot b \cdot c$ ergibt den

Sinussatz
Mit obigen Bezeichnungen gilt $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$.

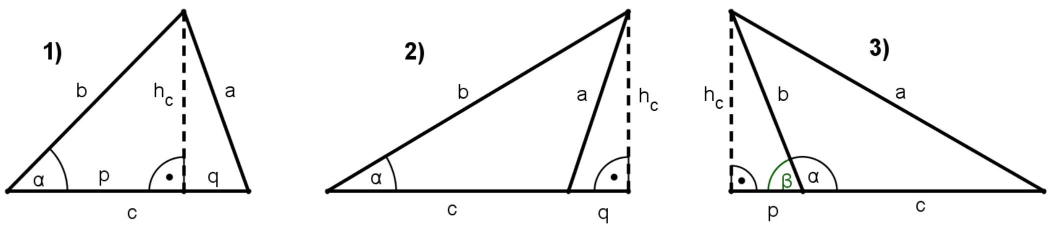
Unter Verwendung des Satzes des Pythagoras erhält man den bekannten Kosinussatz.

Kosinussatz
Sind a, b, c die drei Seiten eines Dreiecks und ist α der von den Seiten b und c eingeschlossene Winkel, dann gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha.$$

Zum Beweis unterscheiden wir drei Fälle:

1) Der Höhenfußpunkt der Höhe h_c liegt auf der Strecke c.
2) Der Höhenfußpunkt der Höhe h_c liegt rechts außerhalb der Strecke c.
3) Der Höhenfußpunkt der Höhe h_c liegt links außerhalb der Strecke c.



zu 1) Es gilt $p + q = c$ sowie nach dem Satz des Pythagoras

$$a^2 = q^2 + h_c^2 = (c-p)^2 + h_c^2 = c^2 - 2pc + \underbrace{p^2 + h_c^2}_{b^2} = b^2 + c^2 - 2pc.$$

Zusammen mit $\cos\alpha = \frac{p}{b}$, also $p = b \cdot \cos\alpha$ ergibt sich

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha.$$

zu 2) In diesem Fall ist $b^2 = (c+q)^2 + h_c^2 = c^2 + 2cq + \underbrace{q^2 + h_c^2}_{a^2}$ und daher

$$a^2 = b^2 - c^2 - 2cq = b^2 + c^2 - 2c(c+q).$$

Zusammen mit $\cos\alpha = \frac{c+q}{b}$, also $c + q = b \cdot \cos\alpha$ ergibt sich wieder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha.$$

zu 3) Es ist jetzt

$$a^2 = (c+p)^2 + h_c^2 = c^2 + 2pc + \underbrace{p^2 + h_c^2}_{b^2} = b^2 + c^2 + 2pc,$$

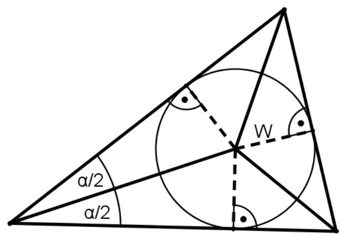
$\cos\alpha = -\cos\beta = -\frac{p}{b}$, also $p = -b \cdot \cos\alpha$ und daher wieder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha.$$

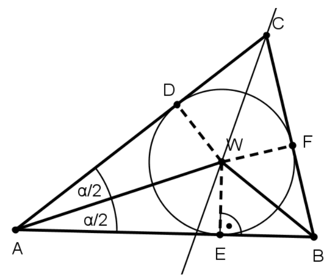
1.5 Transversalen im Dreieck

Unter den *Transversalen* eines Dreiecks verstehen wir *Winkelhalbierende*, *Mittelsenkrechte*, *Höhen* und *Seitenhalbierende* eines Dreiecks. Das Besondere dieser Linien im Dreieck ist, dass sie sich jeweils in einem Punkt schneiden. Dieses soll hier mit wenigen geometrischen Argumenten gezeigt werden.

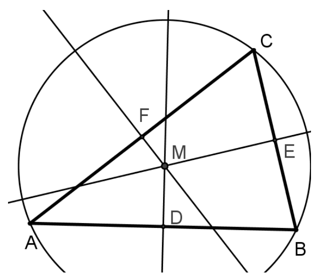
Winkelhalbierende
Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt W, dem Mittelpunkt des Inkreises.



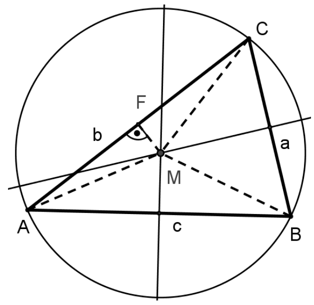
Wir betrachten zunächst zwei Winkelhalbierende, die sich im Punkt W schneiden, und fällen von W das Lot auf jede Dreiecksseite. Wir erhalten die Fußpunkte D, E und F. Aus den Kongruenzen $\triangle(AWD) \cong \triangle(AWE)$ und $\triangle(BWE) \cong \triangle(BWF)$ (da rechtwinklige Dreiecke) folgt $WD \cong WE \cong WF$, also $WD \cong WF$, und damit nach dem 4. Kongruenzsatz (SsW) die Kongruenz $\triangle(CWF) \cong \triangle(CWD)$. Also ist die Gerade $g(C,W)$ durch C und W die Winkelhalbierende bei C.

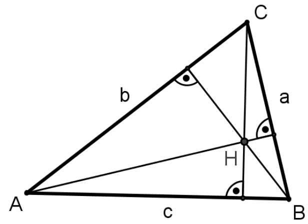


Mittelsenkrechte
Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt M, dem Mittelpunkt des Umkreises.

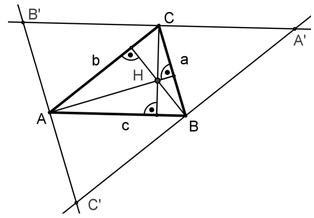


Wir betrachten die beiden Mittelsenkrechten der Seiten a und c, die sich im Punkt M schneiden. Aus den Kongruenzen $AM \cong BM$ und $BM \cong CM$ folgt $AM \cong CM$. Ist F der Fußpunkt des Lotes von M auf die Seite b, dann sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle(AMF)$ und $\triangle(CMF)$ nach dem 4. Kongruenzsatz (SsW)kongruent und daher das Lot von M auf die Seite b gleichzeitig Mittelsenkrechte von b, die somit auch durch den Punkt M geht.

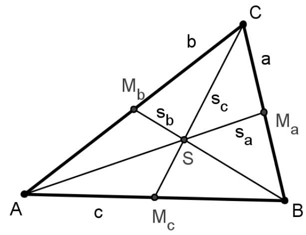




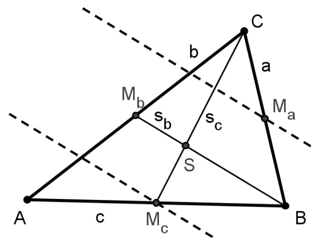
Höhen
Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt H.



Wir ziehen durch die Punkte A, B, C Parallele zu den Seiten a, b, c und erhalten ein Dreieck $\triangle(A'B'C')$, in dem die Höhen des Dreiecks $\triangle(ABC)$ Mittelsenkrechte sind. (Zum Beispiel sind die Vierecke $ACA'B$ und $ACBC'$ Parallelogramme und daher $A'B \cong CA \cong BC'$ usw.) Diese schneiden sich in einem Punkt.

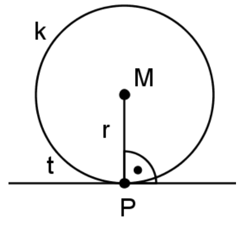


Seitenhalbierende
Die drei Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt S, dem Schwerpunkt des Dreiecks.
S teilt die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2:1.



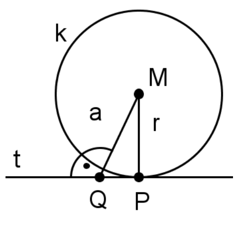
Wir ziehen durch die Seitenmitten M_a und M_c Parallele zur Seitenhalbierenden s_b. Aus dem 1. Strahlensatz ergibt sich, dass hierdurch die Strecke AC in vier kongruente Strecken geteilt wird, und daher ebenfalls nach dem 1. Strahlensatz die Seitenhalbierende s_b die Seitenhalbierende s_c im Verhältnis 2:1 teilt. Aus Symmetriegründen teilt auch die Seitenhalbierende s_a die Seitenhalbierende s_c im Verhältnis 2:1 und daher ebenfalls im Punkt S.

2 Kreisgeometrie



Der Radius r zum Berührpunkt P der Tangente t an den Kreis k in P steht senkrecht zur Tangente t.

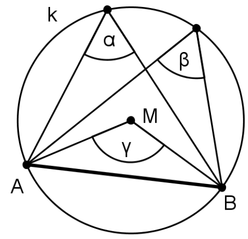
Jeder Punkt $X \neq P$ der Tangente liegt außerhalb des Kreises und damit ist $MX > MP$.



Falls $MP \not\perp t$, fällen wir das Lot von M auf die Tangente t und erhalten als Lotfußpunkt einen Punkt $Q \neq P$. Dann wäre aber im rechtwinkligen Dreieck $\triangle(MQP)$ die Strecke MQ Kathete und MP Hypotenuse im Widerspruch zu $MQ > MP$.

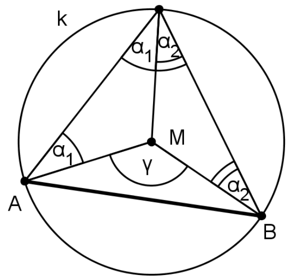
2.1 Peripheriewinkelsatz

a) Peripheriewinkelsatz, Zentri-Peripherie-Winkelsatz
Je zwei Peripheriewinkel über derselben Sehne AB des Kreises k sind zueinander kongruent: $\alpha \cong \beta$.
Der Zentriwinkel über einer Sehne AB eines Kreises ist doppelt so groß wie (jeder) Peripheriewinkel über AB: $\gamma = 2\alpha$.



Es ist

$$\gamma + (180^\circ - 2\alpha_1) + (180^\circ - 2\alpha_2) = 360^\circ$$

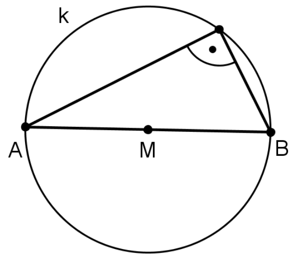


und daher

$$\gamma = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha \ (= 2\beta),$$

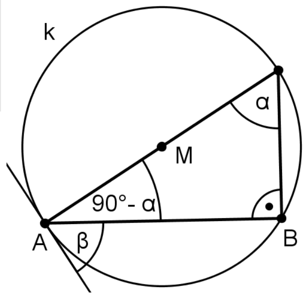
also auch $\alpha \cong \beta$.

b) Satz des Thales
Jeder Peripheriewinkel über einem Durchmesser ist ein rechter Winkel.



Der Zentriwinkel ist gestreckt, also $\alpha = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

c) Tangentenwinkelsatz
Der Tangentenwinkel β an einer Sehne AB eines Kreises k ist kongruent zum Peripheriewinkel α über der Sehne AB.



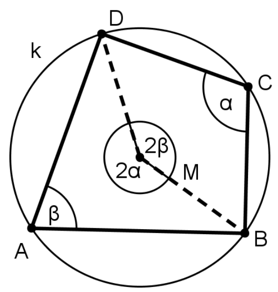
Wir wählen über der Sehne AB solch einen Peripheriewinkel, so dass ein Schenkel dieses Peripheriewinkels ein Durchmesser ist. Dann ist

$$\beta + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ, \quad \text{also} \quad \beta = \alpha.$$

2.2 Sekanten-Tangenten-Satz

a) Sehnenviereck
Ein konvexes Viereck $\square(ABCD)$, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen, heißt ein Sehnenviereck.

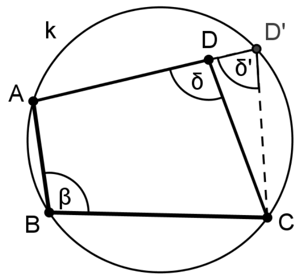
Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Winkelsumme je zweier gegenüber liegender Innenwinkel $180°$ (oder π) beträgt.



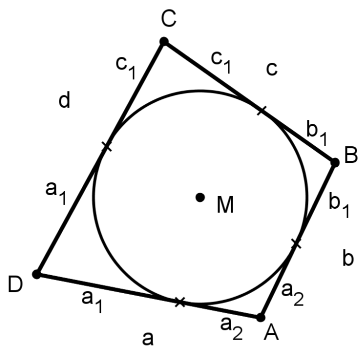
Dass in einem Sehnenviereck die Summe gegenüber liegender Innenwinkel $180°$ beträgt, ergibt sich unmittelbar aus dem Zentri-Peripherie-Winkelsatz.

Für die Umkehrung nehmen wir an, die Innenwinkelsumme gegenüber liegender Winkel betrage $180°$ und das konvexe Viereck wäre kein Sehnenviereck.

Dann liegen drei Punkte, etwa A, B, C auf einem Kreis k und der vierte Punkt D innerhalb von k (wäre D außerhalb von k, wählen wir als k den größeren Kreis durch die Punkte B, C, D und A wäre innerhalb von k). Da mit den Bezeichnungen in der Skizze sowohl $\beta + \delta = 180°$ nach Voraussetzung als auch $\beta + \delta' = 180°$, da $ABCD'$ ein Sehnenviereck ist, folgt $\delta = \delta'$ im Widerspruch zum Außenwinkelsatz (im Dreieck $\triangle(DCD')$ ist δ Außenwinkel und δ' nicht anliegender Innenwinkel).



b) Tangentenviereck
Ein konvexes Viereck $\square(ABCD)$, das einen Inkreis besitzt, heißt ein Tangentenviereck.

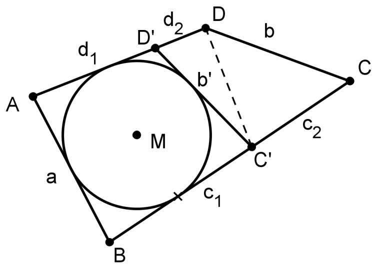


Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn die Summe je zweier gegenüber liegender Seiten gleich ist.

Es ist $a = a_1 + a_2,\ b = a_2 + b_1,\ c = b_1 + c_1,\ d = c_1 + a_1$ und daher

$$a + c = (a_1 + a_2) + (b_1 + c_1) = (a_2 + b_1) + (a_1 + c_1) = b + d.$$

Für die Umkehrung nehmen wir an, dass in einem konvexen Viereck $ABCD$ mit den Seiten a, b, c, d gilt $a + b = c + d$ und dieses Viereck kein Tangentenviereck wäre, etwa derart, dass drei Seiten Tangenten eines Kreises sind und die vierte Seite außerhalb dieses Kreises liegt. Dann ist mit nebenstehenden Bezeichnungen



$$a + b = c + d = (c_1 + c_2) + (d_1 + d_2) = (c_1 + d_1) + (c_2 + d_2)$$

und in dem Tangentenviereck $ABC'D'$

$$c_1 + d_1 = a + b',$$

also

$$a + b = a + b' + (c_2 + d_2).$$

Damit erhalten wir $b = b' + c_2 + d_2$ im Widerspruch zu $b < b' + c_2 + d_2$, was sich bei mehrfacher Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt.

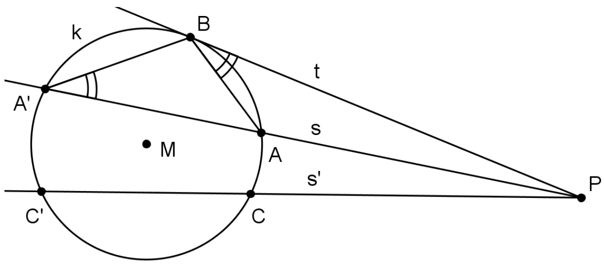
c) Sekanten-Tangenten-Satz
k sei ein Kreis, P ein Punkt außerhalb von k, s eine Sekante von k durch P, die k in zwei (verschiedenen) Punkten A und A' schneide. Sei t eine Tangente von k durch P, die k im Punkt B berührt. Dann gilt für die Strecken PA, PA' und PB die Beziehung

$$\ell(PA) \cdot \ell(PA') = \ell(PB)^2.$$

Ist s' eine weitere Sekante durch P, die den Kreis k in den Punkten C und C' schneidet, dann gilt entsprechend

$$\ell(PA) \cdot \ell(PA') = \ell(PB)^2 = \ell(PC) \cdot \ell(PC').$$

Aus der Kongruenz des Peripherie- und des Tangentenwinkels über der Sehne AB folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle(PA'B) \sim \triangle(PBA)$ und daher



$$\frac{\ell(PA)}{\ell(PB)} = \frac{\ell(PB)}{\ell(PA')} \quad \Longrightarrow \quad \ell(PA) \cdot \ell(PA') = \ell(PB)^2 = \ell(PC) \cdot \ell(PC').$$

3 Lineare und quadratische Gleichungen

3.1 Lineare Gleichungen

Unter einer *linearen Gleichung* versteht man eine Gleichung der Art

$$a \cdot x + b = 0 \quad \text{mit} \quad a,\ b - \text{Zahlen},\ a \neq 0,\ x - \text{Unbestimmte}.$$

Lösungen sind Zahlen x_0 mit $a \cdot x_0 + b = 0$. Ist $x_0 = -\frac{b}{a}$, dann ist

$$a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = (-b) + b = 0,$$

also eine Lösung. Weitere Lösungen gibt es nicht:

Wäre $x_1 \neq -\frac{b}{a}$ eine weitere Lösung, also $a \cdot x_1 + b = 0$, dann wäre $a(x_1 + \frac{b}{a}) = 0$. Wegen $a \neq 0$ müsste $x_1 + \frac{b}{a} = 0$, also $x_1 = -\frac{b}{a}$ sein.

Gleichungen in einer Unbestimmte treten häufig in *Proportionen* (Dreisatz) auf:

$$\begin{array}{lcl} a : b = c : x & \Longrightarrow & a \cdot x = b \cdot c \quad (a \neq 0) \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{b \cdot c}{a} \\ a : b = x : d & \Longrightarrow & a \cdot d = b \cdot x \quad (b \neq 0) \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{a \cdot d}{b}. \end{array}$$

Ein einfaches Beispiel: Wie viel Wasser (Lösungsmittel) muss man zu 2 ℓ einer 90 %-igen wässrigen Lösung hinzugeben, um eine 20 %-ige Lösung zu erhalten?

Analyse: In der ursprünglichen Lösung sind 200 $m\ell$ Wasser und 1800 $m\ell$ der Substanz enthalten. Wenn die neue Lösung nur 20 % der Substanz enthalten soll, und y die Gesamtmenge ist, gilt $y \cdot 0,2\, m\ell = 1800\, m\ell$. Für den Wasseranteil ergibt sich entsprechend $y \cdot 0,8\, m\ell = (x + 200)\, m\ell$, wenn x die Wassermenge ist, die hinzu zu geben ist. Damit also eine 20 %-ige Lösung entsteht, gilt für die Gesamtmenge y der neuen Lösung

$$y = 1800 \ : \ 0,2 = (x + 200) \ : \ 0,8$$

und damit

$$x + 200 = \frac{1800}{0,2} \cdot 0,8 = 7200,$$

also ist $x = 7000\, m\ell$ bzw. 7 ℓ Wasser sind dazu zu geben.

3.2 Quadratische Gleichungen

Unter einer *quadratischen Gleichung* versteht man eine Gleichung der Art

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \text{ mit } a,\ b,\ c - \text{(reelle) Zahlen},\ a \neq 0,\ x - \text{Unbestimmte}.$$

Lösungen sind Zahlen x_0 mit $a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c = 0$.

Wir bestimmen die Lösungen mit der Methode der *quadratischen Ergänzung*:

Wegen $a \neq 0$ können wir schreiben

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = x^2 + px + q = 0 \quad (p = \frac{b}{a},\ q = \frac{c}{a}).$$

Aus der binomischen Formel

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

ergibt sich für $A = x$ und $B = \frac{p}{2}$:

$$x^2 + px + q = \underbrace{x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{=(x+\frac{p}{2})^2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

bzw.

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ (andernfalls gibt es keine reellen Lösungen), dann ist

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

und wir erhalten die beiden Lösungen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

die auch zusammen fallen können. $D = \frac{p^2}{4} - q$ heißt die *Diskriminante* der quadratischen Gleichung.

Bemerkung: Ist $A \geq 0$, dann verstehen wir unter $\sqrt{A}$ die eindeutig bestimmte nicht-negative reelle Zahl B mit $B^2 = A$!

3.3 Satz von Vieta

Zerlegung in Linearfaktoren - Der Satz von Vieta

Sei $P(x) = x^2 + px + q$ ein *Polynom* vom Grad 2 und x_1, x_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, d.h. *Nullstellen* des Polynoms $P(x)$.

Polynomdivision liefert das Ergebnis (nachrechnen!)

$$(x^2 + px + q) : (x - x_1) = x + (p + x_1).$$

Es ist

$$p + x_1 = p + \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -x_2.$$

und daher

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2.$$

Das ist der

Satz von Vieta (1540 - 1603)
Ist $P(x) = x^2 + px + q$ ein *Polynom* vom Grad 2 und x_1, x_2 die *Nullstellen* des Polynoms $P(x)$, dann gilt

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad q = x_1 \cdot x_2.$$

Dieses funktioniert auch mit Polynomen höheren Grades: Ist $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ ein Polynom vom Grad 3 mit den Nullstellen $x_1,\ x_2,\ x_3$ (reell oder komplex bzw. „wenn diese existieren“), dann ist

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Vollständiges Ausmultiplizieren der rechten Seite und Zusammenfassen ergibt

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3,$$

also

$$p = -(x_1 + x_2 + x_3), \quad q = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), \quad r = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Für die Berechnung der Nullstellen von $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ $(n \geq 3)$ gibt es nur noch für $n = 3$ und $n = 4$ Lösungsformeln, für $n \geq 5$ gibt es keine Lösungsformeln. In diesen Fällen (und in der Regel schon für $n \geq 3$) werden Lösungen mit Methoden der Numerischen Mathematik ermittelt.

4 Lineare Gleichungssysteme

In der Praxis treten häufig Gleichungen mit mehreren Unbestimmten x, y, $z, \ldots$ auf. Der einfachste (und wichtigste) Fall ist der, wenn diese Unbestimmten nur in der 1. Potenz, also „linear“ auftreten. Wir sprechen dann von *linearen Gleichungen* oder, wenn mehrere Gleichungen gleichzeitig auftreten, von *Systemen linearer Gleichungen* oder *Linearen Gleichungssystemen*. Um Lösungen zu ermitteln, verwenden wir das Einsetzverfahren oder das Eliminationsverfahren von Gauß (Carl Friedrich Gauß 1777 - 1855).

4.1 Einsetzverfahren

Beispiel Zwei Gleichungen mit zwei Unbestimmten:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2, \quad a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2,\, c_1,\, c_2 - (reelle)\ Zahlen \end{aligned}$$

Lösungen sind alle Zahlenpaare $(x_0,\, y_0)$, für die gilt

$$\begin{aligned} a_1x_0 + b_1y_0 &= c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 &= c_2 \end{aligned}$$

Wir betrachten den Fall

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \quad \text{mit} \quad D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Dann ist $a_1 \neq 0$ oder $b_1 \neq 0$, etwa $a_1 \neq 0$. Die Bedeutung der Bedingung $D \neq 0$ wird sich gleich zeigen. Zur Lösung dieses Systems wird der Einfachheit halber das bekannte *Einsetzungsverfahren* gewählt:

$x = \frac{1}{a_1}(c_1 - b_1y)$ wird in die 2. Gleichung eingesetzt und man erhält

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1}(c_1 - b_1y) + b_2y &= c_2 \qquad | \cdot a_1 \\ \Longrightarrow \ (\underbrace{a_1b_2 - a_2b_1}_{=D\neq 0})y &= a_1c_2 - a_2c_1 \end{aligned}$$

und daher

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{(nachrechnen!)}.$$

Beispiel

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 3x - 2y &= 2 \quad \text{mit} \quad D = a_1b_2 - a_2b_1 = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 \neq 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2}(4-3y) \implies 3 \cdot \frac{1}{2}(4-3y) - 2y = -\frac{13}{2}y + 6 = 2;$$
$$\implies y = \frac{8}{13},\ x = \frac{14}{13}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{14}{13} + 3 \cdot \frac{8}{13} = \frac{52}{13} &= 4 \\ 3 \cdot \frac{14}{13} - 2 \cdot \frac{8}{13} = \frac{26}{13} &= 2 \end{aligned}$$

Lösungen müssen nicht immer existieren:

$$\begin{aligned} x + y = 1 &\Rightarrow x = 1 - y \\ x + y = 2 &\Rightarrow (1-y) + y = 2 \\ &\implies 1 = 2 \ - \ Widerspruch! \end{aligned}$$

Das System besitzt also keine Lösungen (man beachte: $D = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0!$).

Wenn Lösungen existieren, so müssen diese nicht eindeutig sein:

$$\begin{aligned} x + y = 1 &\Rightarrow x = 1 - y \\ 2x + 2y = 2 &\Rightarrow \underbrace{2(1-y) + y}_{=2} = 2 \\ &\implies \text{stets erfüllt!} \end{aligned}$$

Es bleibt eine Gleichung:

$$x = 1 - y \quad \implies \quad \forall\, y_0\ \exists\, x_0 :\ x_0 + y_0 = 1, \quad \text{nämlich} \quad x_0 = 1 - y_0.$$

(Es ist wiederum $D = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0!$)

4.2 Gauß-Elimination

Das Einsetzverfahren ist allerdings bei mehr als 2 oder 3 Gleichungen mit drei oder mehr Unbestimmten untauglich. Effektiver ist folgendes **Eliminationsverfahren (Gauß-Elimination)**, bei dem systematisch eine Unbestimmte nach der anderen eliminiert wird, soweit dieses möglich ist. Wir erläutern das Verfahren im Fall von 2 und 3 Gleichungen mit 2 bzw. 3 Unbestimmten. Das Verfahren funktioniert mit beliebig vielen Gleichungen und beliebig vielen Unbestimmten.

2 Gleichungen mit 2 Unbestimmten:

a_1x	$+$	b_1y	$=$	c_1	$(a_1 \neq 0)$
a_2x	$+$	b_2y	$=$	c_2	2. Gleichung - 1. Gleichung $\cdot\,(-\frac{a_2}{a_1})$
a_1x	$+$	b_1y	$=$	c_1	
		$(b_2 - \frac{a_2}{a_1}b_1)y$	$=$	$c_2 - \frac{a_2}{a_1}c_1$	$\cdot a_1$
a_1x	$+$	b_1y	$=$	c_1	
		$(a_1b_2 - a_2b_1)y$	$=$	$a_1c_2 - a_2c_1$	$(D = a_1b_2 - a_2b_1)$

Lösung, falls $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$:

$$y_0 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad x_0 = \frac{1}{a_1}(c_1 - b_1y) = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Wir erhalten natürlich das gleiche Ergebnis wie beim Einsetzverfahren.

3 Gleichungen mit 3 Unbestimmten:

$$\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\
a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\
a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \quad \text{und etwa} \quad a_1 \neq 0
\end{aligned}$$

Wir eliminieren x aus der 2. und 3. Gleichung, indem wir das $(-\frac{a_2}{a_1})$-fache der 1. Gleichung zur 2. Gleichung und das $(-\frac{a_3}{a_1})$-fache der 1. Gleichung zur 3. Gleichung addieren. Hierbei ändert sich weder das Lösungsverhalten des Systems noch die möglichen Lösungen. Als erstes Ergebnis erhalten wir das neue System:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\
 & & (b_2 - \frac{a_2}{a1}b_1)y & + & (c_2 - \frac{a_2}{a1}c_1)z & = & d_2 - \frac{a_2}{a1}d_1 \\
 & & (b_3 - \frac{a_3}{a1}b_1)y & + & (c_3 - \frac{a_3}{a1}c_1)z & = & d_3 - \frac{a_3}{a1}d_1
\end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\
 & & b_2'y & + & c_2'z & = & d_2' \\
 & & b_3'y & + & c_3'z & = & d_3'
\end{array}$$

Sei eine der Größen b_2', b_3', c_2', c_3' von Null verschieden, etwa $b_2' \neq 0$, dann wiederholen wir die Elimination jetzt von y in der 3. Gleichung und erhalten

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\
 & & b_2'y & + & c_2'z & = & d_2' \\
 & & & & c_3''z & = & d_3''
\end{array}$$

Ist nun $c_3'' \neq 0$, können wir die (nun eindeutig bestimmte) Lösung direkt ausrechnen:

$$z_0 = \frac{d_3''}{c_3''}, \quad y_0 = \frac{1}{b_2'}(d_2' - c_2' \cdot z_0), \quad x_0 = \frac{1}{a_1}(d_1 - b_1 \cdot y_0 - c_1 \cdot z_0).$$

Treffen die Voraussetzungen $b_2' \neq 0$ oder $c_3'' \neq 0$ nicht zu, sind die unterschiedlichen Fälle gesondert zu diskutieren, was in den anschließenden Beispielen erfolgt.

Beispiel 1 - es gibt genau eine Lösung

$$\begin{array}{ccccccc}
2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\
x & - & 2y & + & z & = & 0 \\
x & + & y & - & z & = & -1
\end{array}$$

oder 1. und 3. Gleichung vertauscht:

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & y & - & z & = & -1 & \\
x & - & 2y & + & z & = & 0 & \\
2x & + & 3y & - & z & = & 1 & \\
\hline
x & + & y & - & z & = & -1 & \\
 & & -3y & + & 2z & = & 1 & \text{(2. Gleichung - 1. Gleichung)} \\
 & & y & + & z & = & 3 & \text{(3. Gleichung - 2 $*$ 1. Gleichung)} \\
\hline
x & + & y & - & z & = & -1 & \\
 & & y & + & z & = & 3 & \text{(2. Gleichung und 3. Gleichung vertauscht)} \\
 & & & & 5z & = & 10 & \text{(3. Gleichung + 3 $*$ 2. Gleichung)} \\
\hline
\end{array}
$$

Lösung:

$$z_0 = \frac{10}{5} = 2, \quad y_0 = 3 - z_0 = 1, \quad x_0 = -1 - y_0 + z_0 = 0$$

Probe (sollte man stets ausführen):

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{1. Gleichung:} & 2 \cdot 0 & + & 3 \cdot 1 & - & 2 & = & 1 \\
\text{2. Gleichung:} & 0 & - & 2 \cdot 1 & + & 2 & = & 0 \\
\text{3. Gleichung:} & 0 & + & 1 & - & 2 & = & -1
\end{array}
$$

Beispiel 2 - es gibt unendlich viele Lösung ($c_3'' = d_3'' = 0$)

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & = & 0 & \\
x & + & 5y & - & 2z & = & 1 & \\
2x & + & 3y & - & z & = & 1 & \\
\hline
x & - & 2y & + & z & = & 0 & \\
 & & 7y & - & 3z & = & 1 & \text{(2. Gleichung - 1. Gleichung)} \\
 & & 7y & - & 3z & = & 1 & \text{(3. Gleichung - 2 $*$1. Gleichung)}
\end{array}
$$

Es bleiben 2 Gleichungen mit 3 Unbestimmten.

$\Longrightarrow \quad \forall\, z_0\ \exists\, y_0,\ x_0$,so dass (x_0, y_0, z_0) alle Gleichungen erfüllt:

$$y_0 = \frac{1}{7}(1 + 3z_0), \quad x_0 = \frac{2}{7}(1 + 3z_0) - z_0 = \frac{2}{7} - \frac{1}{7} z_0$$

Beispiel 3 - es gibt keine Lösung ($c_3'' = 0,\ d_3'' \neq 0$)

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & = & 1 & \\
x & + & 5y & - & 2z & = & 1 & \\
2x & + & 3y & - & z & = & 1 & \\
\hline
x & + & y & - & z & = & 1 & \\
 & & 7y & - & 3z & = & 0 & \text{(2. Gleichung - 1. Gleichung)} \\
 & & 7y & - & 3z & = & -1 & \text{(3. Gleichung - 2 $*$1. Gleichung)} \\
\hline
x & + & y & - & z & = & 1 & \\
 & & 7y & - & 3z & = & 0 & \\
 & & & & 0 & = & -1 & \text{(3. Gleichung - 2. Gleichung)} \\
 & & & & & & & \text{Widerspruch!}
\end{array}
$$

5 Matrizen

Matrizen sind zunächst nur ein Formalismus zur übersichtlicheren Darstellung, mit denen man aber auch rechnen kann, etwa um lineare Gleichungssysteme zu behandeln. Damit werden sie zu eigenständigen mathematischen Objekten.

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Wir fassen Koeffizienten, Unbestimmte und die rechte Seite in Schemata wie folgt zusammen:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Allgemein versteht man unter einer *Matrix* vom Typ (m, n) ein Schema aus m Zeilen und n Spalten wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{Typ}\, A = (m, n).$$

Matrizen vom selben Typ kann man addieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} & a_{13} + a'_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} & a_{23} + a'_{23} \\ a_{31} + a'_{31} & a_{32} + a'_{32} & a_{33} + a'_{33} \end{pmatrix}$$

Matrizen A und B kann man multiplizieren, wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist. Dieses ist die *Verkettungsbedingung*: Typ $A = (m, p)$, Typ $B = (p, n)$. Die Multiplikation wird nun so vorgenommen, dass die Zeilen von A „skalar" mit den Spalten von B multipliziert werden (siehe Skalarprodukt im Abschnitt 6). Das Element c_{ij} in $C = A \cdot B$ entsteht also als Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B, wie in folgendem Beispiel:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Ist Typ $A = (m, p)$, Typ $B = (p, n)$, dann ist die Ergebnismatrix vom Typ (m, n). Die Multiplikation ist nicht kommutativ. Selbst, wenn die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ existieren, müssen sie nicht übereinstimmen.

Das lineare Gleichungssystem aus Beispiel 1 kann nun folgendermaßen geschrieben werden:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A \cdot \vec{x} = \vec{d}.$$

Weitere Ausführungen erfolgen im Verlauf des Studiums.

6 Vektoren, Skalarprodukt, Vektorprodukt

6.1 Vektoren in der Ebene

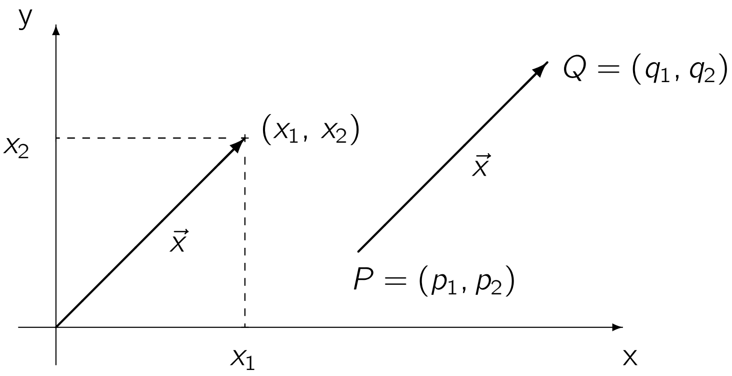
$\mathbb{R}$ sei die Menge der reellen Zahlen.

Mit $\mathbb{R}^2 = \{(x_1,\, x_2)$ bzw. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bezeichnen wir die *euklidische Ebene*.

Vektoren kennzeichnen wir mit einem Pfeil „$\rightarrow$“: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

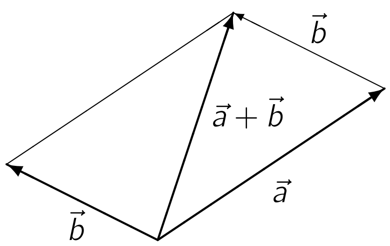
Geometrisch: Verschiebung eines Punktes P in eine vorgegebene Richtung um einen vorgegebenen Betrag in den Punkt Q:

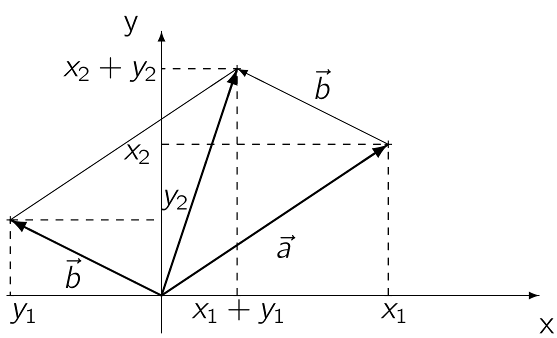
$$\vec{x} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}.$$



Rechnen mit Vektoren

1. *Gleichheit*: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad :\Longleftrightarrow \quad x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$
2. *Addition*: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

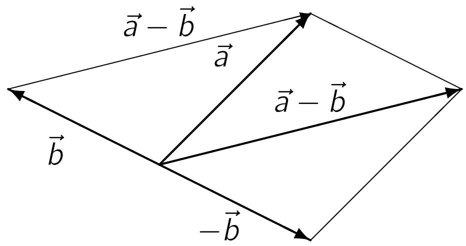




3. *Multiplikation mit einem Skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}$

Ist insbesondere $\lambda = -1$, erhält man

$-\vec{x} := \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$.



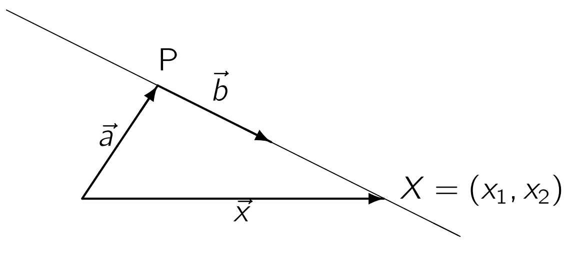
Hat ein Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ die Koordinaten $(p_1,\ p_2)$, dann heißt $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ auch *Ortsvektor* von P. Dieses entspricht der Verschiebung des Ursprungs in den Punkt P.

Ist $\vec{a}$ der Ortsvektor zu einem festen Punkt P und $\vec{x}$ zu einem beliebigen Punkt X, dann erhält man die *Parametergleichung* einer Geraden g in der Form

$$g:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{b} \neq \vec{0},$$

wobei $\vec{b}$ ein *Richtungsvektor* auf g ist. Als Punkt-Vektor-Beziehung ergibt sich

$$g:\ X = P + \lambda \cdot \vec{b}.$$



Aus dem bekannten Begriff der „schrägen" Geraden $y = m \cdot x + n$ erhält man:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ m \cdot x + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix},$$

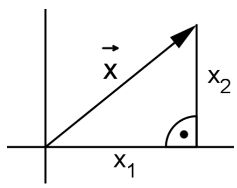
also $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ und $\lambda = x$.

Länge von Vektoren

Den Begriff der *Länge* von Vektoren $\vec{x}$ erhält man über den Satz des Pythagoras:

$$|\vec{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Es ist $\vec{x} = \vec{0}$ genau dann, wenn $|\vec{x}| = 0$.

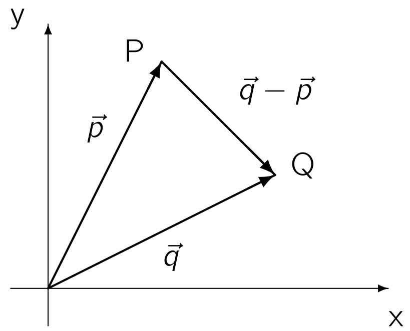


Abstand zweier Punkte

Sind P und Q zwei Punkte mit den Ortsvektoren $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, dann heißt

$$|PQ| = |\vec{q} - \vec{p}| = \left| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

der *Abstand* von P und Q.



Skalarprodukt

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, dann ist

$$\begin{aligned} |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 \\ &= a_1^2 - 2a_1 b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2 b_2 + b_2^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2a_1 b_1 - 2a_2 b_2 \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) \end{aligned}$$

und nach dem Kosinussatz ist

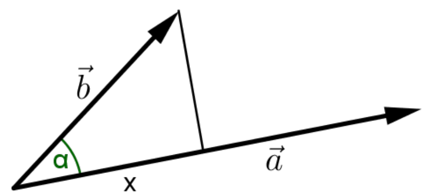
$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Ein Vergleich ergibt

$$\vec{a} * \vec{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Wir nennen den Ausdruck $\vec{a} * \vec{b}$ das *Skalarprodukt* oder das *innere Produkt* der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Ist einer der beiden Vektoren der Nullvektor, so verschwinden beide Seiten und die Gleichheit gilt ebenfalls.

Es ist $\cos \alpha = \dfrac{x}{|\vec{b}|}$, also $x = |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$.
x ist die Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$.



Es gilt für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c} \\ \vec{a} * (\lambda \cdot \vec{b}) &= (\lambda \cdot \vec{a}) * \vec{b} = \lambda(\vec{a} * \vec{b}) \\ \vec{a} * \vec{b} &= \vec{b} * \vec{a} \end{aligned}$$

Orthogonalität

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, dann ist nach dem Satz von Pythagoras $\vec{a}$ *orthogonal* zu $\vec{b}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} \;&\Leftrightarrow\; |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \\ &\Leftrightarrow\; (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \\ &\Leftrightarrow\; a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \end{aligned}$$

Daher sind Vektoren zueinander *orthogonal* genau dann, wenn das Skalarprodukt verschwindet, was sich auch direkt aus der Darstellung $\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ ergibt.

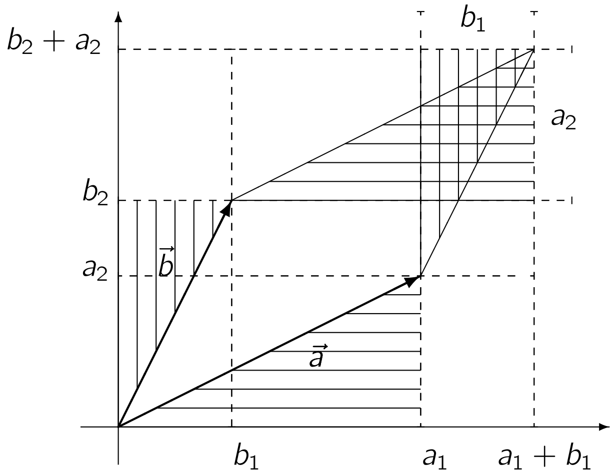
Determinante, Flächeninhalt

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, dann ist

$$F = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \gamma$$

der Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Aus nebenstehender Skizze ergibt sich, dass dieser Flächeninhalt gleich $a_1 b_2 - a_2 b_1$ ist. Den Ausdruck $a_1 b_2 - a_2 b_1$ schreiben wir als Schema

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \det(\vec{a}, \vec{b}) := a_1 b_2 - a_2 b_1$$



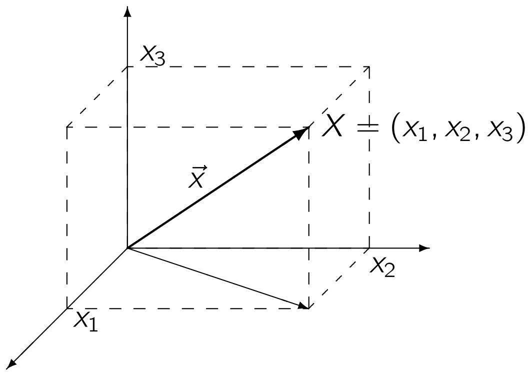
und bezeichnen ihn als *Determinante*. Vertauscht man die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. ändert sich das Vorzeichen der Determinante. Damit erhält der Flächeninhalt gleichzeitig ein Vorzeichen und hiermit eine *Orientierung*.

6.2 Vektoren im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$

Definition: Mit

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

bezeichnen wir den *3-dimensionalen euklidischen Raum.*
Anschaulich fügen wir eine Koordinate hinzu:

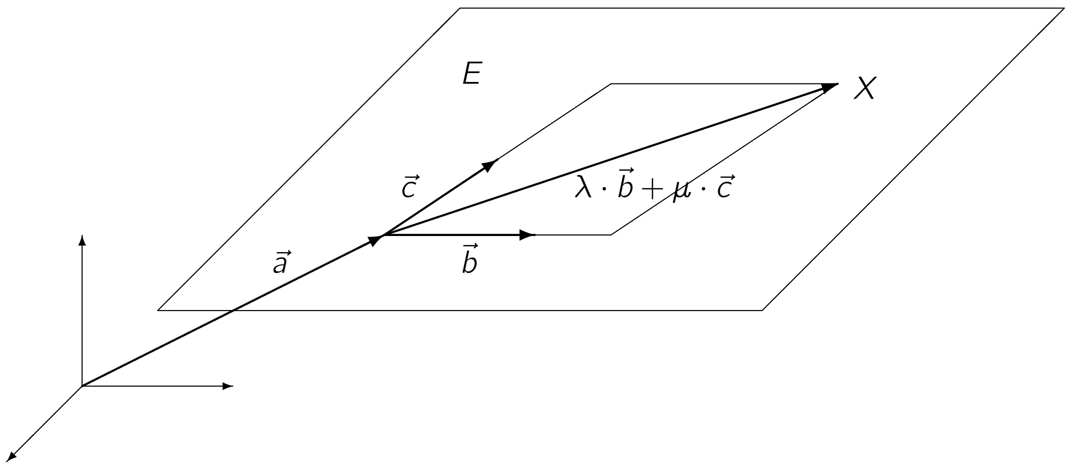


Der Punkt X und der Ortsvektor $\vec{x}$ haben dieselbe analytische Gestalt. Die Gerade im Raum hat vektoriell dieselbe Form wie in der Ebene:

$$g: \ \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \qquad \text{bzw.} \qquad X = P + \lambda \cdot \vec{b},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Für die Darstellung einer Ebene benötigen wir zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$, die nicht parallel sind (*linear unabhängig*):

$$E: \ \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}, \qquad \vec{b},\ \vec{c} \neq \vec{0},\ \text{nicht parallel.}$$



Das Skalarprodukt kann man wie im $\mathbb{R}^2$ definieren:

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \measuredangle(\vec{a},\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Determinante, Volumen und Orientierung werden im Raum komplizierter, aber gut handhabbar, und werden im Verlauf des weiteren Studiums behandelt.

6.3 Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Die Überlegungen über den $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ können für beliebig viele Koordinaten verallgemeinert werden: Sei $n \geqq 2$ ($n = 1$ ist nicht ausgeschlossen, aber trivial) und

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dann gilt:

Gleichheit: $\quad \vec{x} = \vec{y} \quad :\Longleftrightarrow \quad x_i = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$

Addition: $\quad \vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

Multiplikation: $\quad$ Sei $\lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lambda \cdot \vec{x} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ist dann

$$\vec{x} * \vec{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

und ebenfalls $\vec{x} * \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \measuredangle(\vec{x},\, \vec{y})$. Es gelten die Rechenregeln:

a) für alle $\vec{x},\, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist $\vec{x} * \vec{y} = \vec{y} * \vec{x}$ (*Symmetrie*)

b) für alle $\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und für alle $\lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\vec{x} * (\lambda \cdot \vec{y} + \mu \cdot \vec{z}) = \lambda \cdot (\vec{x} * \vec{y}) + \mu \cdot (\vec{x} * \vec{z}) \quad (\textit{Linearität}).$$

Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear unabhängig* genau dann,

wenn aus $\lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_s \vec{a}_s = \vec{0}$ folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$.

Vektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r \in \mathbb{R}^n$, die nicht linear unabhängig sind, heißen *linear abhängig*.

In diesem Fall gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}$, die nicht alle verschwinden, so dass

$$\mu_1 \vec{b}_1 + \cdots + \mu_r \vec{b}_r = \vec{0}.$$

Ist etwa $\mu_1 \neq 0$, dann ist

$$\vec{b}_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} \vec{b}_2 - \cdots - \frac{\mu_r}{\mu_1} \vec{b}_r.$$

$\vec{b}_1$ heißt *linear abhängig* von $\vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_r$.

$\vec{0}$ ist stets linear abhängig von jeder Menge von Vektoren!

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren sind daher linear unabhängig genau dann, wenn sie nicht parallel liegen;

drei vom Nullvektor verschiedene Vektoren sind linear unabhängig genau dann, wenn sie nicht in einer Ebene liegen.

Im Umkehrschluss sind drei (vom Nullvektor verschiedene) Vektoren in einer Ebene stets linear abhängig; im Raum sind vier Vektoren stets linear abhängig.

Beispiel: Sei

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Es gilt $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4 = \vec{0} \implies \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ sind linear abhängig und jeder Vektor $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ist linear abhängig von den übrigen drei.

2) $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ sind linear unabhängig: Ist etwa $\lambda_1 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_3 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_4 = \vec{0}$

$$\implies \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\implies \lambda_3 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

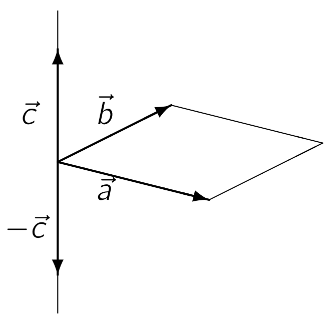
6.4 Vektorprodukt

Das *Vektorprodukt* oder auch *äußeres Produkt* ist eine Besonderheit des $\mathbb{R}^3$.

Definition: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien „linear unabhängige“ Vektoren des $\mathbb{R}^3$ ($\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, nicht parallel). Ein Vektor $\vec{c}$ heißt *Vektorprodukt* oder *äußeres Produkt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (Bezeichnung $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})| = |F(\vec{a}, \vec{b})|$
3. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein *Rechtssystem*, d.h. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind angeordnet wie Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand.

Für die Fälle, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind bzw. $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$, ist $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})| = 0$ und wir definieren $\vec{c} := \vec{0}$.



$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$-\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$

Wichtig ist, das Vektorprodukt ausrechnen zu können.

Sei
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$
Dann ist $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Bedingung 1. und 2. aus der Definition des Vektorproduktes rechnet man leicht nach (Übungsaufgabe); Bedingung 3. ist etwas umfänglicher.

Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind oder einer der Vektoren $= \vec{0}$ ist, wird $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ (oder $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$) und man erhält $\vec{c} = \vec{0}$ (nachrechnen!).

Eigenschaften des Vektorprodukts

Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren. Dann gilt:

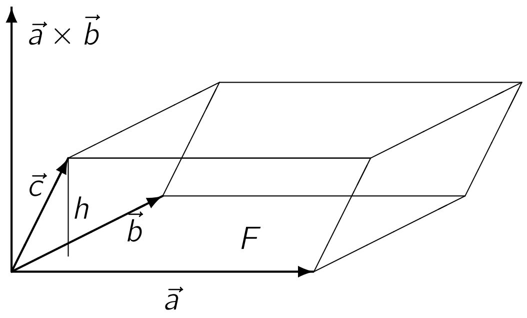
1. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$
2. $(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
   $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (Distributivgesetze)
4. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} * \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} * \vec{c}) \cdot \vec{a}$ (Graßmannscher Entwicklungssatz)
5. $(\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} * \vec{c})(\vec{b} * \vec{d}) - (\vec{a} * \vec{d})(\vec{b} * \vec{c})$ (Lagrangesche Identität)

In die Darstellung des Vektorproduktes als Vektor kann man jeweils die einzelnen Vektoren einsetzen und erhält die Bedingungen nach umfangreichen aber elementaren Rechnungen.

Bemerkung: Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ!

Beispiel: Sei
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Dann ist
$$\begin{aligned} (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \\ \vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) &= \vec{e}_1 \times \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

Entsprechend wie die Fläche eines Parallelogramms in der Ebene kann man das Volumen eines Parallelepipeds im $\mathbb{R}^3$ berechnen:



$|V| = |F| \cdot h,$
$h = |\vec{c}| \cdot \cos\alpha, \ \alpha = \measuredangle(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b})$
$|F| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ nach Definition
$\Rightarrow \ |V| = |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\alpha = |(\vec{a}\times\vec{b})*\vec{c}|$
$\qquad = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|,$
wie sich später zeigen wird.

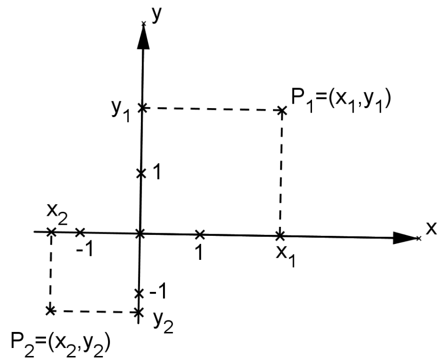
7 Gerade, Kreis, Ebene und Kugel

7.1 Koordinatensysteme

Wir betrachten Geraden und Ebenen aus analytischer Sicht und benötigen hierzu *Koordinatensysteme*. Vereinzelt haben wir hiervon schon Gebrauch gemacht.

Koordinatensysteme in der Ebene

a) rechtwinklige kartesische Koordinaten
(nach René Descartes 1596 - 1650)

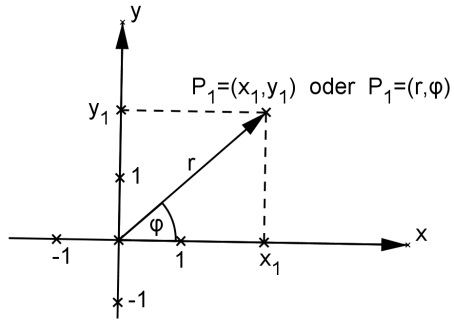


b) Polarkoordinaten

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

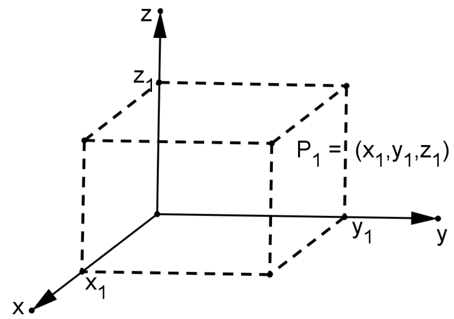
und daher

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$



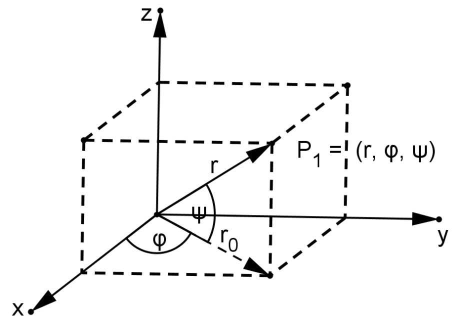
Koordinatensysteme im Raum

c) rechtwinklige kartesische Koordinaten



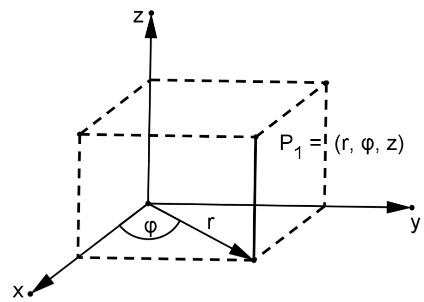
d) Kugelkoordinaten

$$
\begin{aligned}
r_0 &= r \cdot \cos\psi \\
x &= r_0 \cdot \cos\varphi = r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi \\
y &= r_0 \cdot \sin\varphi = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi \\
z &= r \cdot \sin\psi
\end{aligned}
$$



e) Zylinderkoordinaten

$$
\begin{aligned}
x &= r \cdot \cos\varphi \\
y &= r \cdot \sin\varphi \\
z &= z
\end{aligned}
$$



7.2 Geraden

Die *Gerade* ist der geometrische Ort aller Punkte $P = (x_0, y_0)$, die einer Bedingung $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c = 0$ mit $a^2 + b^2 \neq 0$ bzw. $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ genügen:

$$g = g(a, b, c) = \{P = (x_0, y_0) \,|\, a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c = 0,\ (a,\ b) \neq (0,\ 0)\}.$$

Die Gleichung lautet

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0, \quad (a,\ b) \neq (0,\ 0).$$

Zwei Gleichungen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ und $a' \cdot x + b' \cdot y + c' = 0$ stellen dieselbe Gerade dar genau dann, wenn es eine (reelle) Zahl $t \neq 0$ gibt, so dass

$$a' = t \cdot a, \quad b' = t \cdot b, \quad c' = t \cdot c$$

oder

$$a' \cdot x + b' \cdot y + c' = t \cdot (a \cdot x + b \cdot y + c) = 0.$$

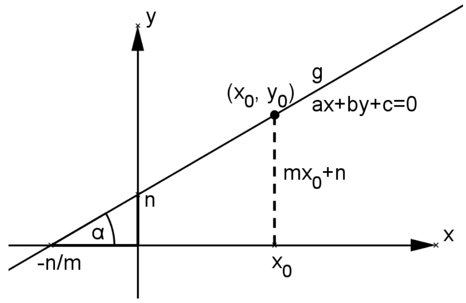
Geradengleichung

Die allgemeine Geradengleichung $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ soll nun genauer untersucht werden.

Fall $b \neq 0$

$$\Longrightarrow \; y = -\frac{1}{b}(a \cdot x + c) = m \cdot x + n$$

„schräge" Gerade



$m \neq 0$:

es gibt einen Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse und die Gerade fällt nicht mit der x-Achse zusammen.

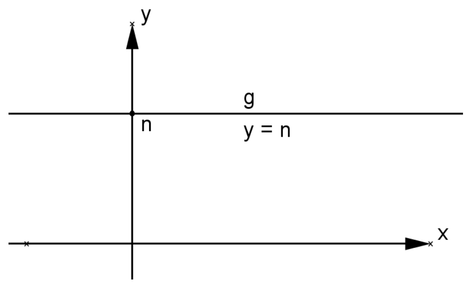
Schnittpunkte mit den Achsen:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; y = n; \quad y = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{n}{m}$$

Anstieg:

$$\tan\alpha = \frac{m \cdot x_0 + n}{x_0 + \frac{n}{m}} = m \cdot \frac{m \cdot x_0 + n}{m \cdot x_0 + n} = m$$

$m = 0$:
„waagerechte" Gerade $y = n = konst.$
(Anstieg $= 0$)

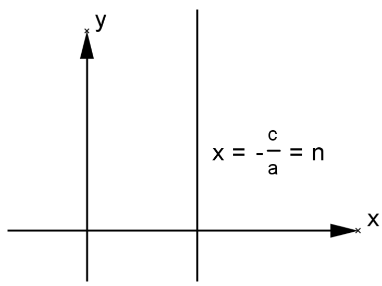


Fall $b = 0$

$$\Longrightarrow \; a \cdot x + c = 0 \; (a \neq 0)$$

$$x = -\frac{c}{a} = n$$

„senkrechte" Gerade, Anstieg „∞"



Anstieg m **und ein Punkt** $P = (x_1, y_1) \in g$ **gegeben:** $y = m \cdot x + n$

Die Geradengleichung ergibt sich wie folgt:

Da $P = (x_1, y_1) \in g$, ist $y_1 = m \cdot x_1 + n$ und daher $n = y_1 - m \cdot x_1$

$$\Longrightarrow \quad y = m \cdot x + (y_1 - m \cdot x_1) \quad \text{oder} \quad y = m \cdot (x - x_1) + y_1.$$

2-Punkte-Gleichung

Seien $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in g$, $P_1 \neq P_2$, gegeben. In der Gleichung für $g: ax + by + c = 0$ sind die Koeffizienten a, b, c so zu bestimmen, dass gilt:

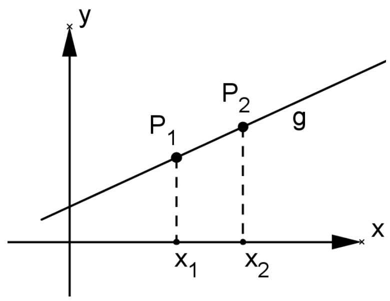
$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad \text{und} \quad ax_2 + by_2 + c = 0.$$

$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; g$ ist „schräge" Gerade mit der Gleichung

$$y = m \cdot x + n,$$

daher

$$\begin{array}{rcl} y_1 &=& m \cdot x_1 + n \\ y_2 &=& m \cdot x_2 + n \\ \hline y_2 - y_1 &=& m \cdot (x_2 - x_1) \end{array}$$



$$\Longrightarrow \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad n = y_1 - m \cdot x_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Einsetzen in $y = m \cdot x + n$ ergibt

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1 \quad \text{oder} \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; g$ ist „senkrechte" Gerade mit der Gleichung $\boxed{x = x_1.}$

Achsenabschnittsgleichung (schräge Gerade)

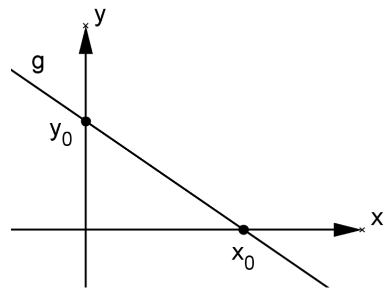
Sei $g: \; ax + by + c = 0$ mit $a \neq 0, \; b \neq 0, \; (0, 0) \notin g \; (\Rightarrow \; c \neq 0)$.

$P_1 = (x_0, 0)$ und $P_2 = (0, y_0)$ seien die Schnittpunkte von g mit den Koordinatenachsen. Dann gilt

$$-\frac{a}{c} \cdot x - \frac{b}{c} \cdot y = 1$$

Die Punkte $P_1 = (x_0, 0)$ und $P_2 = (0, y_0)$ eingesetzt ergibt

$$-\frac{a}{c} \cdot x_0 = 1 \;\Rightarrow\; -\frac{a}{c} = \frac{1}{x_0}; \quad -\frac{b}{c} \cdot y_0 = 1 \;\Rightarrow\; -\frac{b}{c} = \frac{1}{y_0}$$



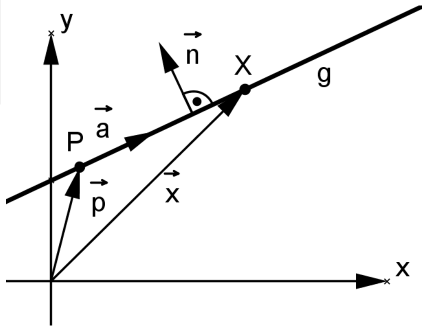
und daher $\boxed{\dfrac{x}{x_0} + \dfrac{y}{y_0} = 1.}$

7.3 Hessesche Normalform, Abstand

Parameterdarstellung und Hessesche Normalform

Sei $g: \; ax + by + c = 0$ eine Gerade, $P \in g$ ein fester Punkt und $\vec{a}$ ein „Richtungsvektor" derart, dass für einen beliebigen Punkt $X \in g$ der Vektor von P nach X ein Vielfaches von $\vec{a}$ ist, etwa $\overrightarrow{PX} = t \cdot \vec{a}$. Ist $\vec{x}$ der Ortsvektor zum Punkt $X \in g$ und $\vec{p}$ der Ortsvektor zum Punkt P, dann gilt

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a} \quad \text{oder} \quad X = P + t \cdot \vec{a}$$



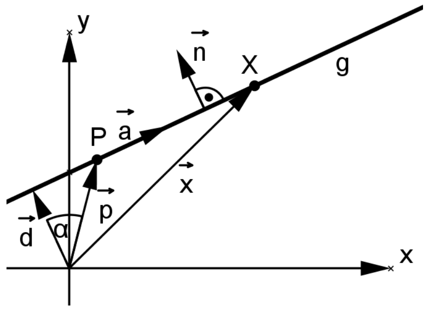
$\vec{n} \perp \vec{a}$ sei ein Normalenvektor von g (der Länge 1), d.h. $\vec{n}$ steht senkrecht zur Geraden g. Dann ist wegen $\vec{n} * \vec{a} = 0$ und $\vec{a} = \frac{1}{t} \cdot (\vec{x} - \vec{p})$ für $t \neq 0$, d.h. $X \neq P$, auch

$$(\vec{x} - \vec{p}) * \vec{n} = 0.$$

(Für $t = 0$ ist $\vec{x} = \vec{p}$, also $\vec{x} - \vec{p} = \vec{0}$ und daher ebenfalls $(\vec{x} - \vec{p}) * \vec{n} = 0$.)

In Koordinatenschreibweise ergibt sich mit $\vec{x} = (x, y)$, $P = (x_0, y_0)$, $\vec{n} = (n_x, n_y)$

$$(x - x_0, y - y_0)(n_x, n_y) = x \cdot n_x + y \cdot n_y - (x_0 \cdot n_x + y_0 \cdot n_y) = 0,$$



wobei $x_0 \cdot n_x + y_0 \cdot n_y = \vec{p} \cdot \vec{n} = const.$
Geht die Gerade g nicht durch den Nullpunkt, dann wählen wir die Richtung des Normalenvektors $\vec{n}$ derart, dass er nicht auf die Seite von g zeigt, auf der der Nullpunkt liegt, wie in der Skizze zu sehen. (Geht die Gerade durch $(0, 0)$, ist die Richtung von $\vec{n}$ unerheblich!) Wegen $|\vec{n}| = 1$ ist dann

$$\vec{d} = |\vec{d}| \cdot \vec{n} \quad \text{und} \quad \cos\measuredangle(\vec{p}, \vec{n}) = \cos\measuredangle(\vec{p}, \vec{d}) = \cos\alpha = \frac{|\vec{d}|}{|\vec{p}|} \geq 0.$$

Daher erhalten wir für den Abstand d des Ursprungs von der Geraden:

$$d = |\vec{d}| = |\vec{p}| \cdot \cos\alpha = |\vec{p}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\alpha = \vec{p} * \vec{n} = x_0 \cdot n_x + y_0 \cdot n_y \geq 0.$$

Beachtet man, dass wegen $|\vec{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = 1$ genau ein Winkel φ mit $0 \leq \varphi < 360°$ existiert (oder auch $-180° \leq \varphi < 180°$), für den gilt

$$\cos\varphi = n_x \quad \text{und} \quad \sin\varphi = n_y,$$

dann erhalten wir die

Hessesche Normalform der Geradengleichung

$$\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y - d = 0$$

mit $\quad 0 \leq \varphi < 360° \quad$ bzw. $-180° \leq \varphi < 180° \quad$ und $\quad d \geq 0$.

d ist der Abstand des Nullpunktes von der Geraden. Um anzudeuten, dass der Normalenvektor die Länge 1 hat, schreibt man statt $\vec{n}$ häufig $\vec{n}_0$.

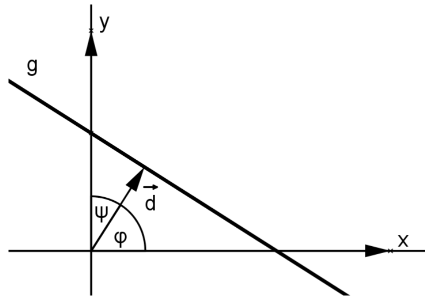
Formal erhält man die Hessesche Normalform wie folgt: Sei $g : ax + by + c = 0$ die gegebene Gerade und o.B.d.A. $c \leq 0$ (andernfalls multiplizieren wir die Gleichung mit -1) und $d^* := -c$:

$$ax + by - d^* = 0 \quad (d^* \geq 0) \quad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot y - \frac{d^*}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \quad \text{mit} \quad \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$$

Wie oben gibt es genau einen Winkel φ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$, so dass

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



Setzen wir $d = \frac{d^*}{\sqrt{a^2+b^2}}$, so ergibt sich die Hessesche Normalform zu

$$\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y - d = 0, \quad d \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

In Hinblick auf den Normalenvektor einer Ebene setzen wir $\sin\varphi = \cos\psi$ ($\psi = 90^\circ - \varphi$) und daher für die Koordinaten des Normalenvektors der Länge 1

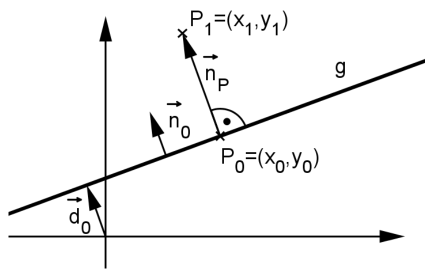
$$\vec{n} = (n_x,\ n_y) = (\cos\varphi,\ \cos\psi).$$

$\cos\varphi$ und $\cos\psi$ nennt man die *Richtungskosinus* des Vektors $\vec{n}$.

Abstand Punkt - Gerade

Sei $g:\ \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y - d_0 = 0$ die Hessesche Normalform einer beliebigen Geraden und $P_1 = (x_1,\ y_1)$ ein beliebiger Punkt der Ebene. Dann ergibt sich der Abstand $d(P_1, g)$ von P_1 zu g zu

$$d(P_1, g) = \cos\varphi \cdot x_1 + \sin\varphi \cdot y_1 - d_0.$$



$d(P_1, g)$ kann positiv oder negativ sein, je nachdem ob P_1 und $(0, 0)$ auf verschiedenen oder derselben Seite von g liegen bzw. $\vec{n}_0$ und $\vec{n}_P$ auf dieselbe oder verschiedene Seiten von g zeigen, falls $(0, 0) \in g$.

Hierzu sei $\vec{n}_0 = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)$, $P_0 = (x_0, y_0)$ der Lotfußpunkt des Lotes von P_1 auf g und $\vec{n}_P = P_1 - P_0 = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0)$. Dann ist $\measuredangle(\vec{n}_0, \vec{n}_P) = 0^\circ$ oder 180°.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad d(P_1, g) &= \vec{n}_P * \vec{n}_0 = |\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_0| \cdot \cos\measuredangle(\vec{n}_P, \vec{n}_0) = \pm|\vec{n}_P| \\
&= (x_1 - x_0)\cos\varphi + (y_1 - y_0)\sin\varphi \\
&= x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - (\underbrace{x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi}_{=d_0}) \\
&= x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - d_0.
\end{aligned}$$

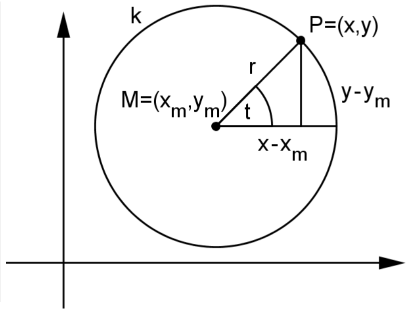
Abstand Gerade - Gerade

Der Abstand $d(g_1, g_2)$ zweier Geraden g_1 und g_2 ist 0, wenn die Geraden nicht parallel sind. Sind g_1 und g_2 parallel und etwa $P_1 \in g_1$ ein Punkt von g_1 und $P_2 \in g_2$ ein Punkt von g_2, dann ist $d(g_1, g_2) := d(P_1, g_2) = d(P_2, g_1)$, da beide Ausdrücke denselben Zahlenwert ergeben.

7.4 Der Kreis

Der Kreis ist der geometrische Ort aller der Punkte $P = (x, y)$, die zu einem festen Punkt $M = (x_m, y_m)$, dem Mittelpunkt, einen konstanten Abstand $r > 0$ haben. Die Gleichung lautet

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2.$$



Es ist

$$d(P, M) = r = const. = \sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2} > 0$$
$$\iff \quad (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2.$$

Um festzustellen, wann eine Gleichung der Art

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \qquad (*)$$

einen Kreis liefert, multiplizieren wir die Kreisgleichung $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$ aus und erhalten

$$x^2 + y^2 - 2x_m x - 2y_m y + x_m^2 - y_m^2 - r^2 = 0.$$

$(*)$ liefert also einen Kreis mit dem Mittelpunkt (x_m, y_m), wenn

$$a = -x_m, \quad b = -y_m, \quad \text{und daher} \quad a^2 + b^2 - c = r^2 > 0,$$

d.h. es muss $c < a^2 + b^2$ sein, damit sich ein (reeller) Kreis ergibt.

Parameterdarstellung

Aus obiger Skizze ist abzulesen

$$\cos t = \frac{x - x_m}{r}, \quad \sin t = \frac{y - y_m}{r}.$$

Daher ergibt sich eine Parameterdarstellung zu

$$x = x_m + r \cdot \cos t, \quad y = y_m + r \cdot \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

In Polarkoordinaten (r, φ) (r ist jetzt variabel) hat der Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius r_0 die einfache Gleichung $\quad r = r_0 = konst.$

Tangente an einen Kreis

Da die Tangente orthogonal zum Radius im Berührpunkt steht, erhält man einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Tangente im Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ durch

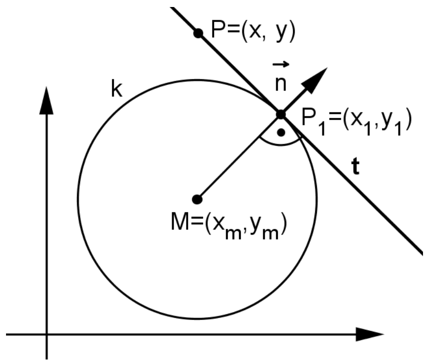
$$\vec{n} = (x_1 - x_m, y_1 - y_m).$$

Ein Punkt $P = (x, y)$ liegt auf der Tangente genau dann, wenn der Vektor $\vec{a} = (x - x_1, y - y_1)$ orthogonal zu $\vec{n}$ ist, d.h.

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = (x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_m, y_1 - y_m) = 0.$$

Ausrechnen ergibt die Tangentengleichung

$$(x - x_1)(x_1 - x_m) + (y - y_1)(y_1 - y_m) = 0.$$



Durch elementare Umrechnungen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0 &= (x-x_1)(x_1-x_m)+(y-y_1)(y_1-y_m)\\
&= x(x_1-x_m)+y(y_1-y_m)-x_1(x_1-x_m)-y_1(y_1-y_m)\\
&= x(x_1-x_m)+y(y_1-y_m)-(\underbrace{(x_1-x_m)^2+(y_1-y_m)^2}_{=r^2})-x_m(x_1-x_m)-y_m(y_1-y_m)\\
&= (x-x_m)(x_1-x_m)+(y-y_m)(y_1-y_m)-r^2
\end{aligned}$$

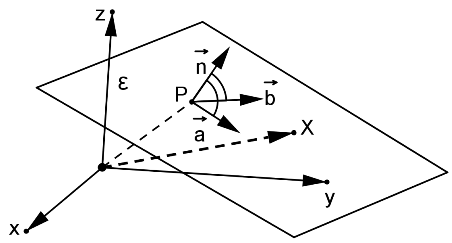
also die Gleichung der Tangente im Punkt $P_1 = (x_1,\, y_1)$ zu

$$(x-x_m)(x_1-x_m)+(y-y_m)(y_1-y_m)=r^2.$$

Für die Mittelpunktslage $(x_m,\, y_m) = (0, 0)$ erhält man die einfache Gleichung

$$xx_1 + yy_1 = r^2.$$

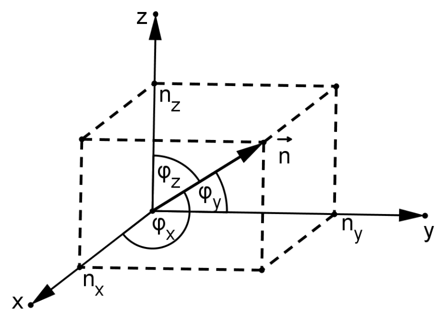
7.5 Ebene, Kugel



Die Ergebnisse für Gerade und Kreis kann man direkt auf Ebene und Kugel übertragen. Die allgemeine Ebenengleichung ist

$$\varepsilon: \; ax + by + cz + e = 0$$

mit $(a,\, b,\, c) \neq (0,\, 0,\, 0)$.



Wir wählen als Normalenvektor $\vec{n}$ einen Vektor der Länge 1, der so gerichtet ist, dass er nicht auf die Seite von ε zeigt, auf der der Nullpunkt liegt. Dann hat $\vec{n}$ die Koordinaten

$$\vec{n} = (n_x,\, n_y,\, n_z) = (\cos\varphi_x,\, \cos\varphi_y,\, \cos\varphi_z)$$

und wir erhalten die

Hessesche Normalform der Ebenengleichung

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z - d = 0 \; (d \geq 0)$$

bzw.

$$\cos\varphi_x \cdot x + \cos\varphi_y \cdot y + \cos\varphi_z \cdot z - d = 0 \; (d \geq 0)$$

d ist der Abstand des Koordinatenursprungs zur Ebene ε.

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängige Vektoren in einer Ebene ε, dann lässt sich ein beliebiger Ortsvektor $\vec{x}$ zu einem Punkt $X \in \varepsilon$ darstellen in der Form

$$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

oder auch

$$X = P + r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Dieses ist eine *Parameterdarstellung* der Ebenengleichung.

Wegen $\vec{a} \perp \vec{n}$ und $\vec{b} \perp \vec{n}$ ist auch $\overrightarrow{XP} \perp \vec{n}$ und daher

$$(X - P) \cdot \vec{n} = 0.$$

Setzen wir für $X = (x, y, z)$, $P = (p_x, p_y, p_z)$ und $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ Koordinaten ein, ergibt sich wieder die Hessesche Normalform:

$$(x-p_x, y-p_y, z-p_z)\cdot(n_x, n_y, n_z) = n_x\cdot x+n_y\cdot y+n_z\cdot z-(\underbrace{n_x \cdot p_x + n_y \cdot p_y + n_z \cdot p_z}_{=d}) = 0,$$

also

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z - d = 0.$$

Die Kugel ist der geometrische Ort aller der Punkte $P = (x, y, z)$ (im 3-dimensionalen Raum), die zu einem festen Punkt $M = (x_m, y_m, z_m)$, dem Mittelpunkt, einen konstanten Abstand $r > 0$ haben. Die Gleichung lautet

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2 = r^2.$$

Es ist

$$|X - M| = r = const. = \sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2} > 0$$
$$\iff \quad (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2 = r^2.$$

Eine besonders einfache Gestalt nimmt die Gleichung für die Kugel in Kugelkoordinaten (r, φ, ψ) (r jetzt variabel) an, wenn der Mittelpunkt der Kugel auch der Ursprung und der Radius r_0 ist. Dann ist die Gleichung einfach

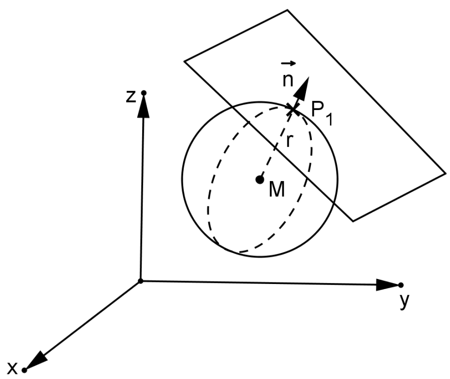
$$r = r_0 = konst.$$

(wie beim Kreis in Polarkoordinaten).

Tangentialebene

Die Tangentialebene im Punkt $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ist eine Ebene durch P_1 mit dem Normalenvektor

$$\vec{n} = P_1 - M = (x_1 - x_m, y_1 - y_m, z_1 - z_m).$$



Ein Punkt $P = (x, y, z)$ liegt auf der Tangentialebene genau dann, wenn der Vektor $\vec{a} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ orthogonal zu $\vec{n}$ ist, also

$$(x - x_1)(x_1 - x_m) + (y - y_1)(y_1 - y_m) + (z - z_1)(z_1 - z_m) = 0.$$

Durch elementares Umformen ergibt sich wie beim Kreis die allgemeine Form der Tangentialebene

$$(x - x_m)(x_1 - x_m) + (y - y_m)(y_1 - y_m) + (z - z_m)(z_1 - z_m) = r^2.$$

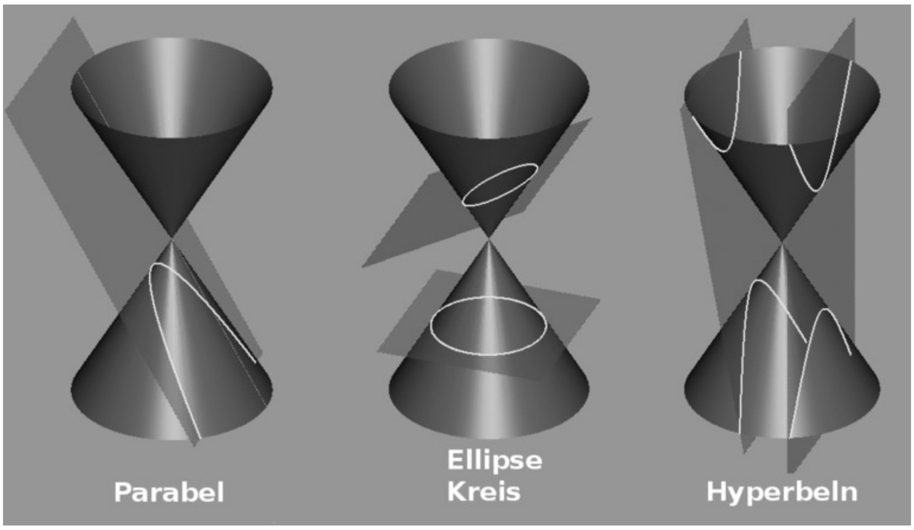
Für $M = O = (0, 0, 0)$-Koordinatenursprung erhält man die bekannte Gleichung für die Tangentialebene

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + z \cdot z_1 = r^2.$$

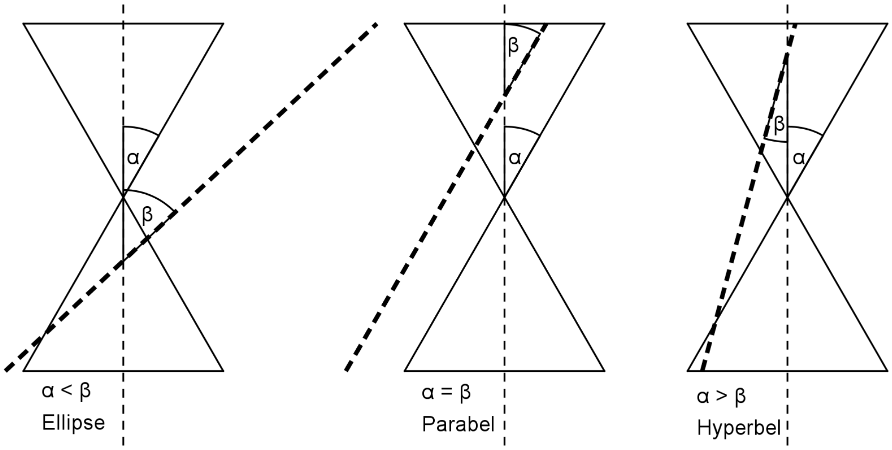
8 Kegelschnitte

8.1 Ellipse, Hyperbel, Parabel

Kegelschnitte entstehen als Schnittkurve, wenn ein gerader Kreiskegel $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ mit einer Ebene $ax + by + cz + d = 0$, die nicht durch die Kegelspitze geht, geschnitten wird.



In Abhängigkeit vom Winkel, den die Ebene mit der Kegelachse einschließt, entstehen eine Ellipse, Parabel oder eine Hyperbel, wie der schematischen Darstellung zu entnehmen ist.



Geht die Schnittebene durch die Kegelspitze, entstehen zwei sich schneidende Geraden, wenn $\alpha > \beta$ oder eine Doppelgerade, wenn $\alpha = \beta$. Wenn $\alpha < \beta$, ist die Kegelspitze der einzige Schnittpunkt.

Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln, Geradenpaare und Doppelgeraden sind Kurven vom Grad 2, d.h. Kurven, deren Punkte einer quadratischen Gleichung in zwei Unbestimmten x und y genügen:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \text{und} \quad (a,\, b,\, c) \neq (0,\, 0,\, 0).$$

Man kann zeigen, dass es außer diesen Kurven keine weiteren Kurven vom Grad 2 gibt.

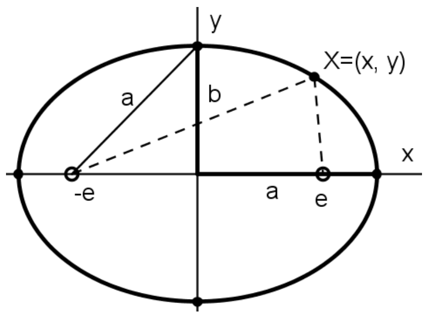
Wir wollen jetzt die Kegelschnitte als *geometrische Örter* definieren und Gleichungen hierfür herleiten.

Die *Ellipse* ist der geometrische Ort aller der Punkte der Ebene, für die die Summe der Abstände zu zwei festen Punkten, den Brennpunkten, konstant gleich $2a$ ist.

Die Gleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Die Schnittpunkte der Ellipse mit den Koordinatenachsen sind die *Scheitelpunkte* und die Strecken vom *Mittelpunkt* zu den Scheitelpunkten die *Halbachsen* der Ellipse. Ihre Länge ist a bzw. b. Ist $a > b > 0$ (liegende Ellipse), und sind $F_1 = (-e,\, 0)$ und $F_2 = (e,\, 0)$ die *Brennpunkte* der Ellipse, dann ist



$$e^2 + b^2 = a^2, \quad \text{also} \quad e^2 = a^2 - b^2.$$

Die *Hyperbel* ist der geometrische Ort aller der Punkte der Ebene, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu zwei festen Punkten, den Brennpunkten, konstant gleich 2a ist.

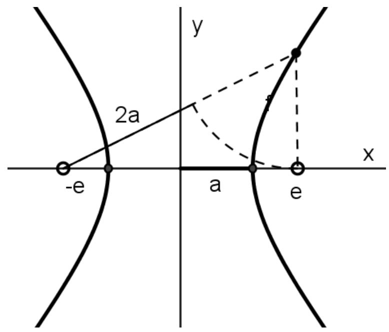
Die Gleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Die Schnittpunkte der Hyperbel mit der x-Achse sind die *Scheitelpunkte* $(\pm a, 0)$.
Legen wir b bei Vorgabe von e und a durch

$$b^2 = e^2 - a^2\ (b > 0) \quad \text{bzw.} \quad e^2 = a^2 + b^2$$

fest, dann ergibt sich obige Gleichung für die Hyperbel.



Der Quotient $p = \frac{b^2}{a}$ heißt *Parameter* des Kegelschnitts, e die *lineare Exzentrizität* und $\varepsilon = \frac{e}{a}$ die *numerische Exzentrizität*. Die numerische Exzentrizität gibt Auskunft darüber, was für ein Kegelschnitt vorliegt:

$$\begin{aligned} 0 \le \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} &< 1 && \text{Ellipse} \quad (\varepsilon = 0 \text{ bzw. } a = b:\ \text{Kreis}) \\ \varepsilon &= 1 && \text{Parabel (siehe unten)} \\ \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} &> 1 && \text{Hyperbel} \end{aligned}$$

Es gilt

$$a - \varepsilon \cdot e = a - \frac{e}{a}e = \frac{a^2 - e^2}{a} = \pm\frac{b^2}{a} = \pm p,$$

wobei das obere Vorzeichen (+) für die Ellipse und das untere Vorzeichen (-) für die Hyperbel zutrifft.

Die Ordinaten in den Brennpunkten ($x = \pm e$) berechnet sich für Ellipse und Hyperbel wie folgt:

$$\frac{y^2}{b^2} = \pm\left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right) = \pm\left(\frac{a^2 - e^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{und daher} \quad y = \pm\frac{b^2}{a} = \pm p.$$

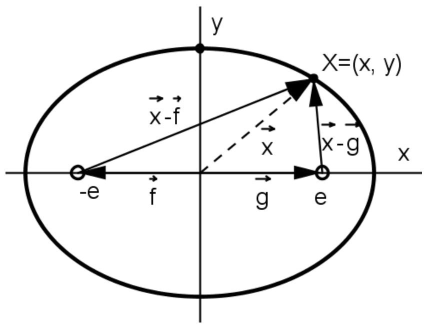
Wir leiten nun aus der Definition die Gleichung für die Ellipse und für die Hyperbel her.

Seien $\vec{f} = (-e,\ 0)$ und $\vec{g} = (e,\ 0)$ die Ortsvektoren zu den beiden Brennpunkten und $\vec{x} = (x,\ y)$ der Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt $X = (x,\ y)$ der Ellipse bzw. Hyperbel.

Dann gilt für die Ellipse

$$|\vec{x} - \vec{f}| + |\vec{x} - \vec{g}| = 2a.$$

Durch Nachrechnen überprüft man die Gleichwertigkeit folgender Gleichungen:



$$|\vec{x} - \vec{f}| + |\vec{x} - \vec{g}| = \sqrt{(x + e)^2 + y^2} + \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a$$

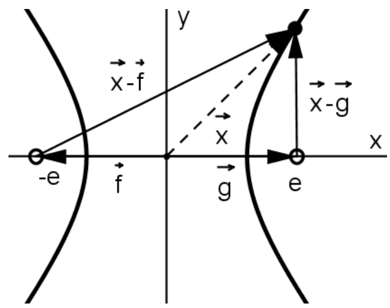
$$
\begin{array}{ll}
 & \iff \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+e)^2+y^2} \\
\text{(quadrieren)} & \iff (x-e)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+e)^2+y^2} + (x+e)^2+y^2 \\
\text{(ausrechnen)} & \iff -4ex = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+e)^2+y^2} \\
 & \iff a^2+ex = a\sqrt{(x+e)^2+y^2} \\
\text{(noch einmal quadrieren)} & \iff a^4+2a^2ex+e^2x^2 = a^2e^2+2a^2ex+(x^2+y^2)a^2 \\
\text{(wieder ausrechnen)} & \iff x^2(a^2-e^2)+y^2a^2 = a^2(a^2-e^2) = a^2b^2 \\
\multicolumn{2}{l}{(a^2-e^2=b^2 \text{ einsetzen und durch } a^2b^2 \text{ teilen})} \\
 & \iff \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1
\end{array}
$$

Für die Hyperbel gilt

$$\Big||\vec{x}-\vec{f}| - |\vec{x}-\vec{g}|\Big| = 2a;$$

rechter Ast: $|\vec{x}-\vec{f}| - |\vec{x}-\vec{g}| = 2a$,

linker Ast: $-|\vec{x}-\vec{f}| + |\vec{x}-\vec{g}| = 2a$.



Die zu beweisende Gleichung ergibt sich jetzt aus

$$\Big||\vec{x}-\vec{f}| - |\vec{x}-\vec{g}|\Big| = \left|\sqrt{(x+e)^2+y^2} - \sqrt{(x-e)^2+y^2}\right| = 2a.$$

Durch analoge Umformungen wie bei der Ellipse, wobei man der Einfachheit halber den rechten und linken Ast gesondert nachrechnen sollte, und unter Beachtung, dass jetzt $a^2-e^2=-b^2$ gilt, erhält man die Gleichung für die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hyperbeln besitzen *Asymptoten*. Eine Gerade $y = m \cdot x + n$ ist eine „schräge" Asymptote für eine Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$, wenn $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ und $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - m \cdot x)$.

Asymptoten der Hyperbel Die Hyperbel hat zwei Asymptoten: $\quad y = \pm\dfrac{b}{a}x$,

denn für die Hyperbel ist $y = f(x) = \pm b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$, $|x| \geq a$, und daher

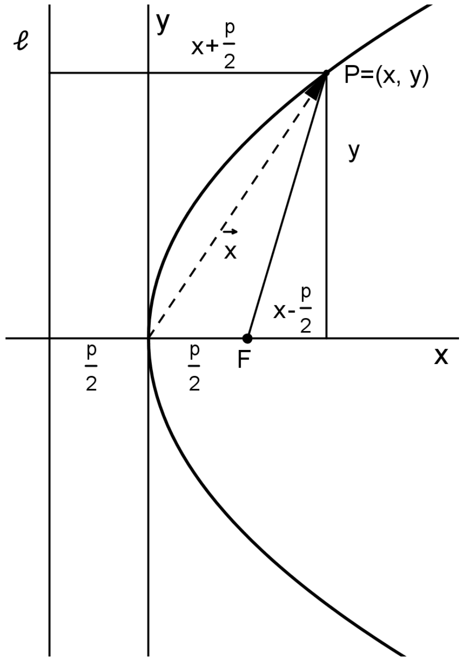
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\pm b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}{x} = \pm b \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}} \quad \Longrightarrow \quad m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\frac{b}{a}.$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) \mp \frac{b}{a}x \right) = \pm\frac{b}{a} \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2-a^2} - x) = 0,$$

wie sich später herausstellen wird.

Die *Parabel* ist der geometrische Ort aller der Punkte, die zu einer festen Geraden ℓ, der *Leitlinie*, und einem festen Punkt F, dem Brennpunkt, den selben Abstand haben.

Die Gleichung lautet $y^2 = 2px$.



Liegt der Scheitel im Ursprung, erhält man als Gleichung

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Daher ist

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$y^2 + x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

und somit

$$y^2 = 2\,p\,x, \qquad \ell: \; x = -p/2.$$

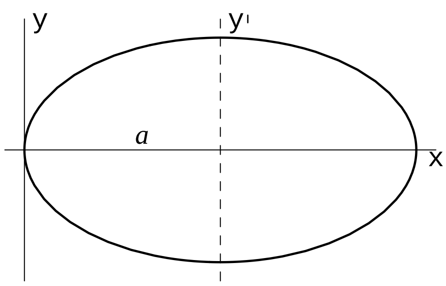
8.2 Scheitelgleichungen

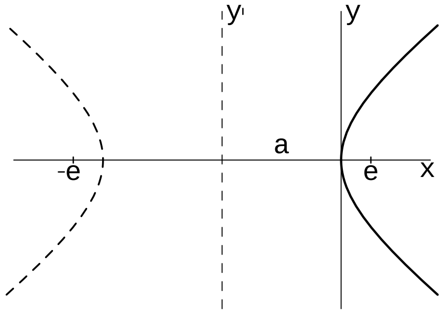
Für die übrigen Kegelschnitte können wir ähnliche Scheitelgleichungen angeben wie für die Parabel.

Scheitelgleichung der Ellipse

Wir nehmen folgende Verschiebung vor: $x = x' + a$, $y = y'$ bzw. $x' = x - a$, $y' = y$. Damit ergibt sich

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2.$$





Wegen

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{e^2}{a^2} = \varepsilon^2 \quad \text{oder} \quad -\frac{b^2}{a^2} = \varepsilon^2 - 1 \quad \text{und} \quad p = \frac{b^2}{a}$$

ist

$$y^2 = 2\,p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2, \qquad 0 \leqq \varepsilon < 1.$$

Scheitelgleichung der Hyperbel

Entsprechend wie für die Ellipse erhalten wir

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}\,x^2.$$

Es ist jetzt

$$\frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{e^2}{a^2} = \varepsilon^2 \quad \text{oder} \quad \frac{b^2}{a^2} = \varepsilon^2 - 1$$

und daher wie für die Ellipse

$$y^2 = 2\,p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2 \quad \text{mit} \quad \varepsilon > 1.$$

Für $\varepsilon = 1$ ergibt sich wieder die Gleichung der Parabel.

Wir haben also für alle Kegelschnitte dieselbe Scheitelgleichung:

$$y^2 = 2\,p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2 \qquad \begin{cases} 0 \leqq \varepsilon < 1 & \text{Ellipse} \\ \varepsilon = 1 & \text{Parabel} \\ \varepsilon > 1 & \text{Hyperbel} \end{cases}$$

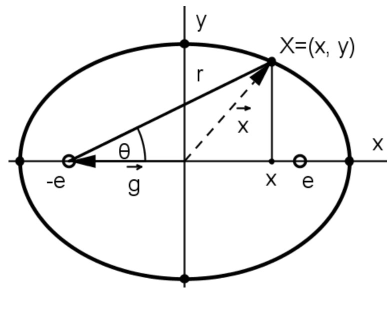
8.3 Polarkoordinaten für Kegelschnitte

Eine weitere einheitliche Darstellung der Kegelschnitte ergibt sich durch die Einführung von Polarkoordinaten $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$.

Ellipse

Legen wir den Ursprung der Polarkoordinaten etwa in den linken Brennpunkt der Ellipse, ergibt sich mit obigen Bezeichnungen (bei Mittelpunktslage im x-y-Koordinatensystem)

$$r^2 = |\vec{x} - \vec{g}|^2 = (x+e)^2 + y^2$$



und

$$\cos\theta = \frac{x+e}{r} \quad \text{bzw.} \quad x = r \cdot \cos\theta - e.$$

Aus der Herleitung der Ellipsengleichung kennen wir die Beziehung

$$r = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \frac{e}{a}\,x + a = \varepsilon\,x + a,$$

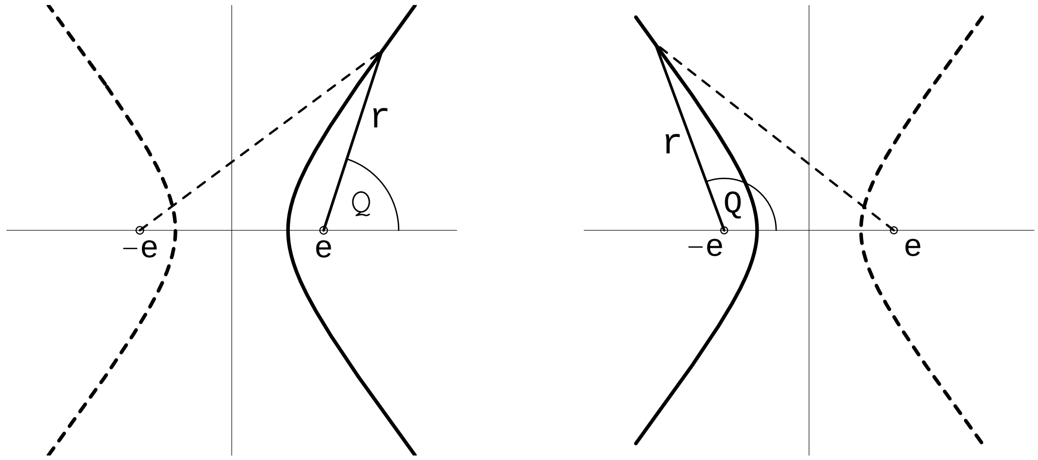
$$\Longrightarrow \; r = \varepsilon\,x + a = \varepsilon\,(r \cdot \cos\theta - e) + a = \varepsilon\,r \cdot \cos\theta - e \cdot \varepsilon + a = \varepsilon\,r \cdot \cos\theta + p.$$

Hieraus folgt die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten

$$r \cdot (1 - \varepsilon \cdot \cos\theta) = p \quad \text{oder} \quad r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos\theta},$$

da $1 - \varepsilon \cdot \cos\theta > 0$ für alle Winkel θ.

Bei der Hyperbel besitzen der linke und der rechte Ast unterschiedliche Darstellungen durch Polarkoordinaten.



(Q steht für den Winkel θ)

Mit $r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$ und $|r_1 - r_2| = 2a$ ergibt sich

1. rechter Ast ($r_1 > r_2,\ r = r_2$):

$$r_1 - r_2 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$(x+e)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a \underbrace{\sqrt{(x-e)^2 + y^2}}_{=r} + (x-e)^2 + y^2$$

und hieraus

$$\frac{e}{a} \cdot x - a = \varepsilon \cdot x - a = r \quad (\varepsilon = \frac{e}{a} > 1).$$

Aus $\cos\theta = \frac{x-e}{r}$, also $x = r \cdot \cos\theta + e$ folgt

$$r = r \cdot \varepsilon \cdot \cos\theta + \varepsilon \cdot e - a = r \cdot \varepsilon \cdot \cos\theta + p, \quad \text{also} \quad r(1 - \varepsilon \cdot \cos\theta) = p$$

Für θ sind nur solche Werte zulässig, für die $1 - \varepsilon \cdot \cos\theta > 0$. Dann ergibt sich die Darstellung in Polarkoordinaten zu

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos\theta}.$$

2. linker Ast ($r_1 < r_2,\ r = r_1$): Es ist $\cos\theta = \frac{x+e}{r}$, also $x = r \cdot \cos\theta - e$, und

$$r_2 - r_1 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} - \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

$$(x-e)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a \underbrace{\sqrt{(x+e)^2 + y^2}}_{=r} + (x+e)^2 + y^2$$

und somit

$$r = -\frac{e}{a} \cdot x - a = -\varepsilon \cdot (r \cdot \cos\theta - e) - a = -\varepsilon \cdot r \cdot \cos\theta + \underbrace{\varepsilon \cdot e - a}_{=p},$$

also

$$r(1+\varepsilon \cdot \cos\theta) = p \quad \text{und daher} \quad r = \frac{p}{1+\varepsilon \cdot \cos\theta} \quad \text{für} \quad \theta \quad \text{mit} \quad 1+\varepsilon \cdot \cos\theta > 0.$$

Zusammenfassend erhält man

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon \cdot \cos\,\theta} \qquad \begin{cases} 0 \leqq \varepsilon < 1 & \text{Ellipse} \\ \varepsilon = 1 & \text{Parabel} \\ \varepsilon > 1 & \text{Hyperbel (rechterAst)} \end{cases}$$

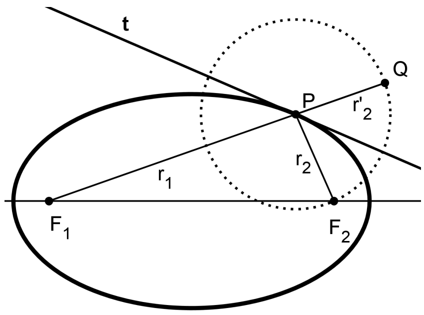
bzw.

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon \cdot \cos\theta}; \quad \varepsilon > 1 \qquad \text{Hyperbel (linkerAst).}$$

8.4 Tangenten der Kegelschnitte

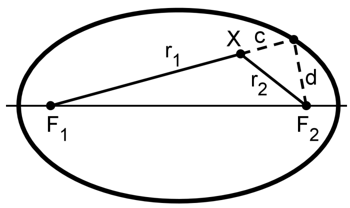
Abschließend werden die Gleichungen der Tangenten an Kegelschnitte und die Konstruktion der Tangenten behandelt.

Tangente der Ellipse
Wir verlängern die Strecke $r_1 = F_1P$ um die Strecke $r_2 = F_2P$ ($r_1 + r_2 = 2a$) und erhalten den Punkt Q.
Die Tangente ist dann die Winkelhalbierende t des Winkels $\measuredangle(F_2PQ)$.



Begründung: Ein Punkt X liegt nach Definition genau dann auf der Ellipse, wenn die Summe der Abstände r_1^X und r_2^X zu den Brennpunkten gleich $2a$ ist.

Man überlegt sich, dass X im Innern der Ellipse liegt genau dann, wenn $r_1^X + r_2^X < 2a$ und außerhalb der Ellipse genau dann, wenn $r_1^X + r_2^X > 2a$, wenn wir mit r_1^X den Abstand des Punktes X zum Brennpunkt F_1 und r_2^X den Abstand von X zum Brennpunkt F_2 bezeichnen.



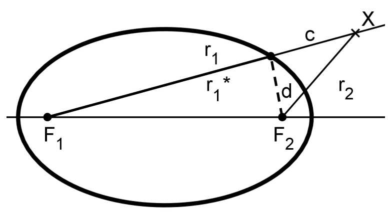
Denn nach der Dreiecksungleichung gilt in nebenstehender Skizze

$$r_2 < c + d \quad \text{und daher} \quad r_1 + r_2 < (r_1 + c) + d = 2a.$$

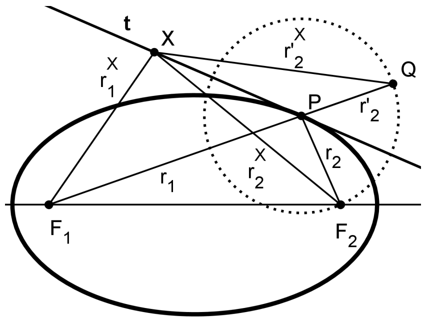
Liegt X außerhalb der Ellipse, dann ist $d < r_2 + c$ und daher

$$r_1 + r_2 = r_1^* + (c + r_2) > r_1^* + d = 2a.$$

Entsprechend zeigt man die vergleichbaren Aussagen für die Hyperbel und Parabel.



t ist also Tangente, wenn für alle Punkte $X \in t$ mit $X \neq P$ gilt $r_1^X + r_2^X > 2a$.
Die Gerade t ist die Winkelhalbierende des Winkels $\measuredangle(F_2PQ)$. Daher ist $r_2^X = r_2'^X$ für alle Punkte $X \in t$.
Nach der Dreiecksungleichung ist daher für alle Punkte $X \in t$, die von P verschieden sind,



$$r_1^X + r_2^X = r_1^X + r_2'^X > r_1 + r_2' = 2a.$$

Also liegen alle Punkte $X \neq P$ außerhalb der Ellipse und damit ist t eine Tangente.

Gleichung der Tangente

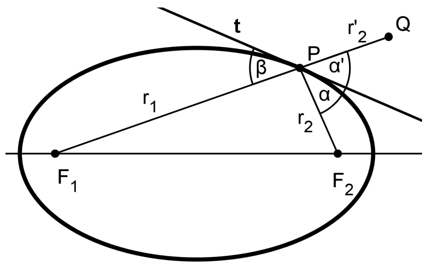
Ist $P = (x_1, y_1)$ ein fester Punkt der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und $X = (x, y)$ ein beliebiger Punkt der Ebene, dann liegt X auf der Tangente, wenn gilt

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1.$$

Auf die Herleitung dieser Gleichung wird hier verzichtet. Man beachte aber die Ähnlichkeit zur Gleichung der Tangente an einen Kreis mit $a = b = r$.

Die Flüstergalerie

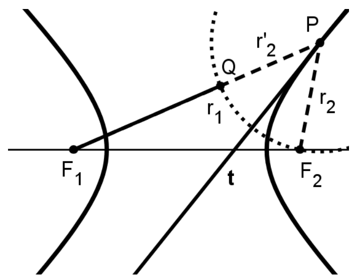
Nach Konstruktion der Tangente ist $\alpha \cong \alpha'$ und $\alpha' \cong \beta$, also $\alpha \cong \beta$, d.h. ein Strahl, der von einem Brennpunkt ausgeht, wird so reflektiert, dass der reflektierte Strahl durch den anderen Brennpunkt geht (Einfallwinkel = Ausfallwinkel).



Stehen also zwei Besucher eines elliptischen Gebäudes in den beiden Brennpunkten, können sie sich leise verständigen ohne dass andere Besucher dieses hören. Dieses ist das Prinzip einer „Flüstergalerie“.

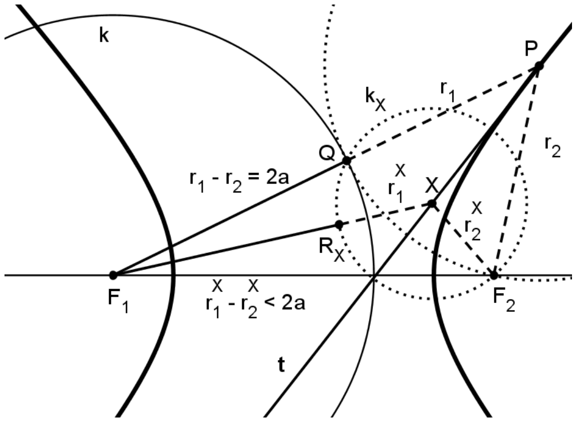
Tangente der Hyperbel

Wir verkürzen die Strecke $r_1 = F_1P$ um die Strecke $r_2 = F_2P$ ($r_1 - r_2 = 2a$) und erhalten den Punkt Q. Die Tangente ist dann die Winkelhalbierende t des Winkels $\measuredangle(F_2PQ)$.



Begründung: Ein Punkt X liegt nach Definition genau dann auf der Hyperbel, wenn der Betrag der Differenz der Abstände r_1^X und r_2^X zu den Brennpunkten gleich $2a$ ist. Man überlegt sich wie bei der Ellipse, dass X „zwischen“ den Hyperbelästen liegt genau dann, wenn $|r_1^X - r_2^X| < 2a$ und „jenseits“ der Hyperbeläste liegt genau dann, wenn $|r_1^X - r_2^X| > 2a$.
t ist also Tangente im Punkt P, wenn für alle Punkte $X \in t$ mit $X \neq P$ gilt

$$|r_1^X - r_2^X| < 2a.$$



Wir betrachten die Kreise k (um F_1 und durch Q)und k_X (um X und durch F_2), die sich für alle Punkte $X \in t$ im Punkt Q schneiden.
Da nun die Strecke F_1X auf einem Radius sowohl von k als auch k_X liegt, sind die Tangenten in den Schnittpunkten mit den Kreisen parallel und damit R_X ein innerer Punkt des Kreises k. Folglich ist $F_1R_X < F_1Q$.
Damit ist für alle $X \neq P$

$$|r_1^X - r_2^X| = |F_1R_X| < |F_1Q| = |r_1 - r_2| = 2a.$$

Für $X = P$ gilt die Gleichheit.

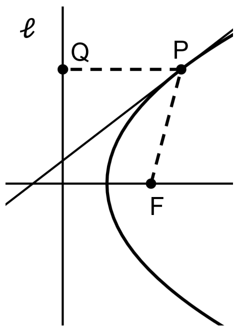
Gleichung der Tangente

Ist $P = (x_1, y_1)$ ein fester Punkt der Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und $X = (x, y)$ ein beliebiger Punkt der Ebene, dann liegt X auf der Tangente, wenn gilt

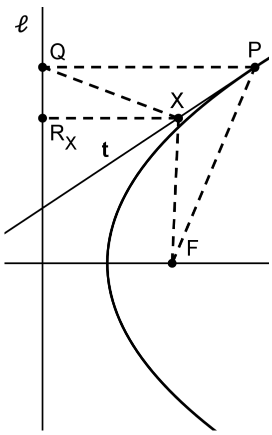
$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1.$$

Auf die Herleitung dieser Gleichung wird hier ebenfalls verzichtet.

Tangente der Parabel
Wir fällen das Lot von P auf die Leitlinie ℓ und erhalten Q als Lotfußpunkt. Die Tangente ist dann die Winkelhalbierende t des Winkels $\measuredangle(FPQ)$.



Begründung: Ein Punkt X liegt nach Definition genau dann auf der Parabel, wenn der Abstand $|XR_X|$ von X zum Lotfußpunkt R_X gleich dem Abstand $|XF|$ zum Brennpunkt F ist.



Man überlegt sich auch hier, dass X „innerhalb“ der Parabel liegt genau dann, wenn $|XF| < |XR_X|$ und „außerhalb“ der Parabel liegt genau dann, wenn $|XF| > |XR_X|$ (es ist $|XF| = |XQ| > |XR_X|$).
t ist also Tangente im Punkt P, wenn für alle Punkte $X \in t$ mit $X \neq P$ gilt $|XF| > |XR_X|$, wenn R_X der Lotfußpunkt des Lotes von X auf ℓ ist. Da t Winkelhalbierende ist, gilt $XQ = XF$ für alle $X \in t$ und daher

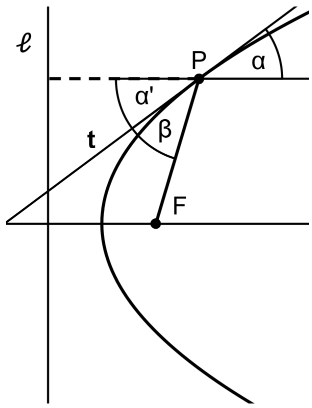
$$|XR_X| < |XQ| = |XF|.$$

Gleichung der Tangente

Ist $P = (x_1, y_1)$ ein fester Punkt der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ und $X = (x, y)$ ein beliebiger Punkt der Ebene, dann liegt X auf der Tangente, wenn gilt

$$y \cdot y_1 = p(x + x_1).$$

Der Parabolspiegel
Ein Parabolspiegel entsteht, wenn wir eine Parabel um ihre Achse rotieren lassen. Bekanntlich wird dann ein Strahl, der parallel zur Achse eines solchen Spiegels einfällt, so reflektiert, dass er durch den Brennpunkt geht. Dieses Phänomen folgt unmittelbar aus der Tangentenkonstruktion. Es ist



$$\alpha \cong \alpha' \quad \text{und} \quad \alpha' \cong \beta, \quad \text{also} \quad \alpha \cong \beta,$$

d.h. es ist der Einfallwinkel gleich dem Ausfallwinkel.

Literatur

[1] van de Craats, Jan; Bosch, Rob; Grundwissen Mathematik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

[2] Kemnitz, Arnfried; Mathematik zum Studienbeginn, Vieweg + Teubner Verlag 2010 (9. Auflage)

[3] Schäfer, Wolfgang; Georgi, Kurt; Trippler, Gisela; Mathematik-Vorkurs, Teubner Verlag Stuttgart 1999 (4. Auflage)

[4] Walz, Guido; Zeilfelder, Frank; Rießinger, Thomas; Brückenkurs Mathematik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007 (2. Auflage)

[5] GeoGebra - Dynamische Geometriesoftware; Markus Hohenwarter www.geogebra.org