Rostock. Math. Kolloq. **47**, 31–48 (1994)

Subject Classification (AMS)
**62F12,60J30**

Friedrich Liese; Andreas Wienke

# Asymptotische Normalitt von Maximum – Likelihood – Schtzern in inhomogenen Wienerprozessen[1]

## 1 Einleitung

Ein stochastischer Prozess $W(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ heit inhomogener Wienerproze, falls er im Nullpunkt startet ($W(0) = 0$), seine Realisierungen stetige Funktionen sind und er unabhngige und normalverteilte Zuwchse besitzt. Solche Prozesse beschreiben z.B. die Abnutzung technischer Systeme. Man geht hierbei von der Vorstellung aus, da die Abnutzung $W(t) - W(s)$ im Zeitraum $[s,t]$ unabhngig von der Vergangenheit ist und die Abnutzung zum Zeitpunkt $t$ sich als Summe aus der Abnutzung $W(s)$ zum Zeitpunkt $s$ und der in der Zeit von $s$ bis $t$ erfolgten Abnutzung darstellt. Das wahrscheinlichkeitstheoretische Verhalten eines inhomogenen Wienerprozesses $W(t)$ wird vollstndig durch die Erwartungswertfunktion $m(t) = EW(t)$ und die Varianzfunktion $b(t) = V(W(t))$ beschrieben. Bei der Modellierung des Abnutzungsverhaltens von Systemen geht man jetzt davon aus, da die Funktionen $m(t,\vartheta)$ und $b(t,\vartheta)$ bis auf einen endlichdimensionalen Parameter $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ bekannt sind, der geschtzt werden soll. Sei $P_\vartheta$ $(\vartheta \in \Theta)$ die Verteilung von $W$ im Raum der stetigen Funktionen auf $[0,T]$. Hngt die Varianzfunktion $b(t,\vartheta)$ von $\vartheta$ ab, so sind fr verschiedene Parameter $\vartheta_1, \vartheta_2$ die Verteilungen $P_{\vartheta_1}$ und $P_{\vartheta_2}$ gegenseitig singulr (siehe Jacod, Shiryaev [2], Kap. IV §4c). Eine sinnvolle Likelihoodtheorie ist also nicht mglich. Man vergrbert deshalb das Modell und betrachtet nur Beobachtungen an diskreten Zeitpunkten $0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \cdots < t_{k_n,n} = T$, wobei die Anzahl $k_n$ gegen Unendlich strebt. Die Voraussetzung, da nur Beobachtungen an diskreten Zeitpunkten vorliegen, ist auch vom praktischen Standpunkt realistischer. Zustzlich hat man in vielen Fllen wiederholte unabhngige Beobachtungen vorliegen. Wir gehen deshalb davon aus, da $m_n$ unabhngig identisch verteilte Wienerprozesse $W_1, \ldots, W_{m_n}$ zu den Zeitpunkten $t_{i,n}$ beobachtet werden. Aus diesen $k_n m_n$ Daten soll $\vartheta \in \Theta$ geschtzt werden. Allgemeine Kriterien fr die Konsistenz von Maximum – Likelihood –

[1]Ausgearbeitete und erweiterte Fassung eines Vortrages, gehalten auf dem Bremen – Rostocker Statistik – Seminar, Rostock, 5. - 7. Mrz 1992

Schtzern (MLS) $\widehat{\vartheta_n}$ in diesem Modell einschlielich Geschwindigkeitsabschtzungen wurden in Liese, Wienke [3] abgeleitet.

In der vorliegenden Arbeit wird die Verteilung von $\sqrt{N_n}(\widehat{\vartheta_n} - \vartheta_0)$ fr $n \to \infty$ untersucht, wobei $N_n \to \infty$ gilt. Hierbei bezeichnet $\vartheta_0$ den unbekannten wahren Parametervektor. Ist die Varianzfunktion $b$ von $\vartheta$ unabhngig und hngt nur die Erwartungswertfunktion $m$ von $\vartheta$ ab, so ist $N_n = m_n$ zu whlen und in Theorem 2 wird gezeigt, da unter gewissen schwachen Regularittsvoraussetzungen an $b, m$ und die Beobachtungszeitpunkte $t_{i,n}$ die Verteilung von $\sqrt{m_n}(\widehat{\vartheta_n} - \vartheta_0)$ schwach gegen eine $k$–dimensionale Normalverteilung mit dem Erwartungswertvektor Null strebt, wobei in die Kovarianzmatrix dieser Normalverteilung Ableitungen der Funktion $m(t, \vartheta)$ nach den Komponenten von $\vartheta$ eingehen. Von der Folge der Beobachtungszeitpunkte $t_{i,n}$ wird hierbei nur vorausgesetzt, da $\mathrm{Max}_{1 \le i \le k_n} |t_{i,n} - t_{i-1,n}| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ gilt. Die auftretende Kovarianzmatrix hngt auch nicht von der speziell gewhlten Folge $t_{i,n}$ ab.

Qualitativ anders ist die Situation, wenn die Varianzfunktion $b$ von $\vartheta$ abhngt. Dann gilt $N_n = k_n\, m_n$. Man hat also eine wesentlich grere Konvergenzgeschwindigkeit, und es ist hier auch mglich, da die Anzahl der wiederholten Beobachtungen nicht gegen Unendlich strebt. Es ist sogar $m_n = 1$ zugelassen, wobei die Schtzungen auf einer wachsenden Zahl von Beobachtungen einer Realisierung an diskreten Zeitpunkten basieren. Theorem 1 besagt, da die Verteilung von $\sqrt{k_n m_n}(\widehat{\vartheta_n} - \vartheta_0)$ gegen eine $k$–dimensionale Normalverteilung mit dem Erwartungswertvektor Null konvergiert. In die zugehrige Kovarianzmatrix gehen Ableitungen von $b(t, \vartheta)$ nach den Komponenten von $\vartheta$ ein. Die Erwartungswertfunktion $m$ geht nicht in die Kovarianzmatrix ein.

Im Gegensatz zur Situation in Theorem 2 geht die spezielle Form der Beobachtungszeitpunkte $t_{i,n}$ $(1 \le i \le k_n,\ n = 1, 2, \dots)$ ein. Sei $\mu_n = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \delta_{t_{i,n}}$ das zum Versuchsplan $\{t_{i,n}\}$ gehrige empirische Ma und es gelte $\mu_n \Longrightarrow \mu$ im Sinne der schwachen Konvergenz. In die Kovarianzmatrix der Grenzverteilung in Theorem 1 geht dann das Ma $\mu$ ein.

## 2 Modellvoraussetzungen und Resultate

Ein stochastischer Proze $W(t)$ $(0 \le t \le T)$ heit inhomogener Wienerproze mit der Erwartungswertfunktion $m(t)$ und der Varianzfunktion $b(t)$, falls $W$ ein stetiger Gauproze mit unabhngigen Zuwchsen ist, so da $W(0) = 0$ gilt und die Zuwchse $W(t) - W(s)$ fr $0 \le s < t \le T$ eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert $m(t) - m(s)$ und der Varianz $b(t) - b(s)$ besitzen. $m$ ist dann notwendigerweise eine stetige Funktion mit $m(0) = 0$ und $b$ eine stetige nichtfallende Funktion mit $b(0) = 0$. Wir nehmen jetzt an, da die Erwartungswertfunktion und die Varianzfunktion nur bis auf einen endlichdimensionalen Parameter $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ bekannt sind. $\vartheta$ soll durch Messungen zu den diskreten Zeitpunkten $0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \cdots < t_{k_n,n} = T$ geschtzt werden.

In vielen Fllen liegen zustzlich unabhngige Beobachtungen $W_1, \dots, W_{m_n}$ des Prozesses $W$ vor. Wegen $W_j(0) = 0$ knnen wir statt mit den Werten $W_j(t_{i,n})$ gleichberechtigt mit den Differenzen $W_j(t_{i,n}) - W_j(t_{i-1,n})$ arbeiten, um den Parameter $\vartheta$ zu schtzen. Der bergang zu den stochastisch leichter handhabbaren Differenzen ergibt keinen Informationsverlust.

Sei $N(\mu, \sigma^2)$ die Normalverteilung auf den Borelmengen des $\mathbb{R}^1$ mit dem Erwartungswert $\mu$ und der Varianz $\sigma^2$. $\mathcal{B}^m$ ist die $\sigma$–Algebra der Borelmengen des $\mathbb{R}^m$. Wir bezeichnen mit $P_\vartheta^n$ das folgende Produktma:

$$P_\vartheta^n = \prod_{j=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{k_n} N(m(t_{i,n}, \vartheta) - m(t_{i-1,n}, \vartheta), b(t_{i,n}, \vartheta) - b(t_{i-1,n}, \vartheta)). \tag{1}$$

Dabei kennzeichnet $P_\vartheta^n$ die Verteilung der $m_n$ identisch verteilten Vektoren der Zuwchse $W_j(t_{1,n}),\ W_j(t_{2,n}) - W_j(t_{1,n}), \dots, W_j(t_{k_n,n}) - W_j(t_{k_n-1,n})$, die jeweils die $k_n$ dimensionale Normalverteilung

$$\prod_{i=1}^{k_n} N(m(t_{i,n}, \vartheta) - m(t_{i-1,n}, \vartheta), b(t_{i,n}, \vartheta) - b(t_{i-1,n}, \vartheta))$$

als Verteilung besitzen. Insgesamt wird das geschilderte Schtzproblem beschrieben als Schtzproblem fr die Folge der statistischen Experimente $E_n$ mit

$$E_n = (\mathbb{R}^{k_n m_n}, \mathcal{B}^{k_n m_n}, P_\vartheta^n,\ \vartheta \in \Theta). \tag{2}$$

Die Mezeitpunkte $t_{i,n}$ sollen schwachen Regularittsvoraussetzungen gengen. Es sei

(V1) $\quad t_{0,n} = 0,\ t_{k_n,n} = T,\ \operatorname*{Max}_{1 \le i \le k_n} (t_{i,n} - t_{i-1,n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$

Um das asymptotische Verhalten der Folge der Versuchsplne $\{t_{i,n}, 0 \le i \le k_n\}$ beschreiben zu knnen, ordnen wir ihnen empirische Mae zu. Es sei

$$\mu_n = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \delta_{t_{i,n}},$$

wobei $\delta_x$ das $\delta$–Ma im Punkt $x$ bezeichnet. Wir setzen voraus, da

(V2) $\quad \mu_n \Longrightarrow \mu,\ n \to \infty,$

gilt, wobei $\Longrightarrow$ das Symbol fr die schwache Konvergenz von Verteilungen auf $[0, T]$ bezeichnet. Von der Varianzfunktion $b(t, \vartheta)$ setzen wir voraus, da sie folgender Bedingung gengt:

(V3) $\quad t \longmapsto b(t, \vartheta)$ ist stetig differenzierbar in $[0, T]$ fr alle $\vartheta \in \Theta$ und es gilt $\dot{b}(t, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial t} b(t, \vartheta) > 0$ fr alle $0 \le t \le T$ und alle $\vartheta \in \Theta$.

Die Voraussetzung $\dot{b}(t,\vartheta) > 0$ erzwingt insbesondere, da die Differenzen $W_j(t_{i,n}) - W_j(t_{i-1,n})$ stets positive Varianzen besitzen und die Normalverteilung

$$N(m(t_{i,n},\vartheta) - m(t_{i-1,n},\vartheta), b(t_{i,n},\vartheta) - b(t_{i-1,n},\vartheta))$$

nicht zu einer $\delta$–Verteilung entartet. Insbesondere sind deshalb die $P^n_\vartheta$ aus (1) durch das $k_n m_n$–dimensionale Lebesquesche Ma $\lambda$ dominiert. Fr eine Funktion $f(t,\vartheta)$ werden durch $\dot{f}(t,\vartheta)$ die Ableitung nach $t$ und durch $f_u, f_{u,v}, \ldots$ $(u,v = 1,\ldots,k)$ die Ableitungen nach den Komponenten des Vektors $(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_k)$ bezeichnet. Insbesondere ist z.B.

$$\dot{f}_{u,v} = \frac{\partial^3}{\partial t\, \partial\vartheta_u\, \partial\vartheta_v} f.$$

$\Theta^0$ sei das Innere von $\Theta$ und $\Theta^c$ der Abschlu der Menge $\Theta$. Ist $f$ eine auf $[0,T] \times \Theta$ definierte reelle Funktion, so sagen wir, da sie der Bedingung (V4) gengt, falls gilt:

(V4) $t \longmapsto f(t,\vartheta)$ ist differenzierbar nach $t$ $\forall \vartheta \in \Theta$. $\dot{f}$ ist in $\Theta^0$ zweimal stetig differenzierbar nach allen Komponenten von $\vartheta = (\vartheta_1,\ldots,\vartheta_k)$ und $(t,\vartheta) \longmapsto \dot{f}_{u,v}(t,\vartheta)$ ist stetig in $[0,T] \times \Theta^0$ fr alle $1 \leq u,v \leq k$.

$\sum(\vartheta)$ sei die $k \times k$ Matrix mit den Elementen

$$\sigma_{u,v}(\vartheta) = \frac{1}{2} \int\limits_{[0,T]} \frac{\dot{b}_u(t,\vartheta)\dot{b}_v(t,\vartheta)}{(\dot{b}(t,\vartheta))^2} \mu(dt).$$

Eine Folge mebarer Abbildungen $\widehat{\vartheta_n} : \mathbb{R}^{k_n m_n} \longrightarrow \Theta^c$ heit konsistente Schtzfolge, falls

$$P^n_\vartheta \left( \|\widehat{\vartheta_n} - \vartheta\| > \varepsilon \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3}$$

fr alle $\varepsilon > 0$ gilt. Ist $X$ ein auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $E_n$ definierter zuflliger Vektor, so bezeichnet $\mathcal{L}_\vartheta(X) = P^n_\vartheta \circ X^{-1}$ die Verteilung von $X$.

**Theorem 1** *Die Funktionen $m$ und $b$ mgen der Voraussetzung* (V4) *gengen, $b$ erflle zustzlich* (V3). *Fr die Folge der Versuchsplne $\{t_{i,n}, 0 \leq i \leq k_n\}$ gelte* (V1) *und* (V2). *$\widehat{\vartheta_n}$ sei eine konsistente Folge von ML – Schtzern bez. der Folge $E_n$ aus* (2). *$\vartheta_0$ sei innerer Punkt von $\Theta$ und $\sum(\vartheta_0)$ sei regulr ($Det(\sum(\vartheta_0)) \neq 0$). Dann gilt*

$$\mathcal{L}_{\vartheta_0}\left( \sqrt{k_n m_n} \left( \widehat{\vartheta_n} - \vartheta_0 \right) \right) \Longrightarrow N\left(0, \sum\nolimits^{-1}(\vartheta_0)\right),$$

*wobei $N\left(0, \sum^{-1}(\vartheta_0)\right)$ die $k$–dimensionale Normalverteilung mit dem Erwartungswertvektor* ***0*** *und der Kovarianzmatrix $\sum^{-1}(\vartheta_0)$ ist.*

Theorem 1 lt die Mglichkeit zu, da alle $m_n$ gleich 1 sind, also keine wiederholten Beobachtungen vorliegen.

In diesem Falle wird die Folge der Maximum – Likelihood – Schtzer aus einer Realisierung des Prozesses $W(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ ermittelt, wobei die Beobachtungen an einer wachsenden Zahl von Zeitpunkten im Intervall $[0, T]$ vorgenommen werden. Die Existenz von konsistenten Schtzern ergibt sich aus der Tatsache, da die Verteilungen $P_\vartheta$, $P_\eta$ des Prozesses $W$ im Raum der stetigen Funktionen fr unterschiedliche Parameterwerte $\vartheta, \eta$ gegenseitig singulr sind. Hieraus folgt, da unter den Voraussetzungen (V1) und (V2) die Verteilungen $\{P_\vartheta^n\}$ und $\{P_\eta^n\}$ vollstndig trennbar sind in dem Sinne, da $A_n \in \mathcal{B}^{k_n m_n}$ existieren mit $P_\vartheta^n(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, $P_\eta^n(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, falls $\vartheta \neq \eta$.
Obwohl man konsistente Schtzungen bereits aus einer kontinuierlichen Realisierung erhlt, erhhen zustzliche unabhngige Wiederholungen des Prozesses die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge von Schtzern. Dies drckt sich im Faktor $\sqrt{m_n}$ im obigen Grenzwertsatz aus.

Ist die Varianzfunktion $b(t, \vartheta)$ von $\vartheta$ unabhngig, hngt also $P_\vartheta^n$ nur ber $m(t, \vartheta)$ von $\vartheta$ ab, so ist Theorem 1 wegen $\mathrm{Det}(\sum(\vartheta_0)) = 0$ nicht anwendbar. Ist $b(t, \vartheta)$ von $\vartheta$ unabhngig, so existieren konsistente Schtzer fr $\vartheta$ nur, falls $m_n \to \infty$ gilt, weil die zugehrigen Verteilungen $P_\vartheta$, $P_\eta$ nicht singulr sind. Damit lassen sich die Folgen $\{P_\vartheta^n\}$, $\{P_\eta^n\}$ nur dann vollstndig trennen, wenn $m_n \to \infty$ gilt.

Wir bezeichnen durch $\widetilde{\sum}(\vartheta_0)$ die $k \times k$ Matrix mit den Elementen

$$\widetilde{\sigma_{uv}}(\vartheta_0) = \int_0^T \frac{\dot{m}_u(t, \vartheta_0)\dot{m}_v(t, \vartheta_0)}{\dot{b}(t)}\,dt.$$

**Theorem 2** *Die Varianzfunktion $b(t)$ des inhomogenen Wienerprozesses $W$ sei unabhngig von $\vartheta$ und in $[0, T]$ stetig differenzierbar. Es gelte $\dot{b}(t) > 0$ $(0 \leq t \leq T)$. Zustzlich genge $\dot{m}_{u,v}(t, \vartheta)$ einer Hlderbedingung bezglich $\vartheta$ in einer Umgebung $U(\vartheta_0)$ von $\vartheta_0$ mit einer von $t$ unabhngigen Hlderkonstanten $c$ fr alle $u, v$:*

$$|\dot{m}_{u,v}(t, \vartheta_1) - \dot{m}_{u,v}(t, \vartheta_2)| \leq c\,||\vartheta_1 - \vartheta_2||^\alpha, \quad \alpha > 0,\ \forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in U(\vartheta_0).$$

*Es seien die Voraussetzungen* (V1) *und* (V2) *erfllt. $\vartheta_0$ sei ein innerer Punkt von $\Theta$ und es gelte* $\mathrm{Det}\left(\widetilde{\sum}(\vartheta_0)\right) \neq 0$ *sowie $m_n \longrightarrow \infty$. Dann gilt fr jede konsistente Folge $\widehat{\vartheta_n}$ von Maximum – Likelihood – Schtzern*

$$\mathcal{L}_{\vartheta_0}\left(\sqrt{m_n}\left(\widehat{\vartheta_n} - \vartheta_0\right)\right) \Longrightarrow N\left(0, \widetilde{\sum}^{-1}(\vartheta_0)\right).$$

## 3 Beweise

Als Vorbereitung auf die eigentlichen Beweise von Theorem 1 und Theorem 2 leiten wir zunchst einige technische Lemmata ab. Zur Abschtzung von Stetigkeitsmodulen bentigen wir ein Ergebnis aus Ibragimov, Hasminskij [1]. Vom dort angegebenen Satz 19 im Anhang 1 brauchen wir lediglich einen Spezialfall, den wir im folgenden Lemma formulieren.

**Lemma 1** *$K \subseteq \mathbb{R}^k$ sei eine abgeschlossene und beschrnkte Menge und $\xi(\vartheta)$ $(\vartheta \in K)$ ein zuflliger Proze mit stetigen Realisierungen. Es mge Zahlen $m \geq r > k$ und $H$ derart geben, da*

$$E|\xi(\vartheta)|^m \leq H \tag{4}$$

$$E|\xi(\vartheta_1) - \xi(\vartheta_2)|^m \leq ||\vartheta_1 - \vartheta_2||^r \tag{5}$$

*fr alle $\vartheta_i \in K, i = 1, 2$, gilt. Dann existiert eine Konstante $B_0$ (die nur von $m, r, k$ und dem Durchmesser von $K$ abhngt) derart, da*

$$E \sup_{||\vartheta_1 - \vartheta_2|| \leq h} |\xi(\vartheta_1) - \xi(\vartheta_2)| \leq B_0 H^m h^{\frac{r-k}{m}}.$$

**Lemma 2** *$f$ und $g$ seien stetige Funktionen in $[0, T]$. Die Folge $\{t_{i,n},\ 0 \leq i \leq k_n\}$ genge den Voraussetzungen* (V1) *und* (V2). *Dann gilt fr beliebige $\overset{*}{s}_{i,n}$, $\overset{*}{t}_{i,n} \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$*

$$\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} f(\overset{*}{s}_{i,n})\, g(\overset{*}{t}_{i,n}) \to \int_{[0,T]} f(t)\, g(t)\, \mu(dt).$$

**Beweis:** Die Beziehung

$$\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} f(t_{i,n})\, g(t_{i,n}) = \int_{[0,T]} f(t)\, g(t)\, \mu_n(dt) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_{[0,T]} f(t)\, g(t)\, \mu(dt) \tag{6}$$

folgt aus der schwachen Konvergenz $\mu_n \Longrightarrow \mu$. Die gleichmige Stetigkeit von $f$ und $g$ auf $[0, T]$ ergibt wegen (V1)

$$\operatorname*{Max}_{1 \leq i \leq k_n} \left| f(t_{i,n})\, g(t_{i,n}) - f(\overset{*}{s}_{i,n})\, g(\overset{*}{t}_{i,n}) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

woraus wegen (6) die Behauptung folgt. ■

Bei festem $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k) \in \Theta$ setzen wir

$$\begin{aligned} \triangle m(t_{i,n}, \vartheta) &= m(t_{i,n}, \vartheta) - m(t_{i-1,n}, \vartheta) \\ \triangle b(t_{i,n}, \vartheta) &= b(t_{i,n}, \vartheta) - b(t_{i-1,n}, \vartheta) \\ \triangle m_u(t_{i,n}, \vartheta) &= m_u(t_{i,n}, \vartheta) - m_u(t_{i-1,n}, \vartheta). \end{aligned}$$

Die Gren $\triangle b_u(t_{i,n}, \vartheta)$, $\triangle m_{u,v}(t_{i,n}, \vartheta)$ und $\triangle b_{u,v}(t_{i,n}, \vartheta)$ sind dann sinngem definiert.

**Lemma 3** *Die Funktionen $m$ und $b$ mgen* (V4) *erfllen. Fr $b$ gelte* (V3). *Weiterhin seien* (V1) *und* (V2) *erfllt. Dann gilt fr $\vartheta_0 \in \Theta^0$*

$$\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}\frac{\triangle b_u(t_{i,n},\vartheta_0)\,\triangle b_v(t_{i,n},\vartheta_0)}{2\,(\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0))^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}\int\limits_{[0,T]}\frac{\dot b_u(t,\vartheta_0)\,\dot b_v(t,\vartheta_0)}{\dot b^2(t,\vartheta_0)}\,\mu(dt)$$

*und*

$$\frac{\triangle m_u(t_{i,n},\vartheta_0)\,\triangle m_v(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

**Beweis:** Wir setzen

$$f(t)=\frac{\dot b_u(t,\vartheta_0)}{\dot b(t,\vartheta_0)},\ \ g(t)=\frac{\dot b_v(t,\vartheta_0)}{\dot b(t,\vartheta_0)}\ .$$

Nach Voraussetzung sind $f$ und $g$ stetige Funktionen in $[0,T]$. Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt mit gewissen $\overset{*}{s}_{i,n},\overset{*}{t}_{i,n}\in[t_{i-1,n},t_{i,n}]$

$$\sum_{i=1}^{k_n}\frac{\triangle b_u(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)}\,\frac{\triangle b_v(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)}=\sum_{i=1}^{k_n}f(\overset{*}{s}_{i,n})\,g(\overset{*}{t}_{i,n}).$$

Die Anwendung von Lemma 2 ergibt

$$\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}\frac{\triangle b_u(t_{i,n},\vartheta_0)\,\triangle b_v(t_{i,n},\vartheta_0)}{2\,(\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0))^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}\int\limits_{[0,T]}\frac{\dot b_n(t,\vartheta_0)\,\dot b_v(t,\vartheta_0)}{\dot b^2(t,\vartheta_0)}\,\mu(dt).$$

Es sei

$$c=\sup_{0\le t\le T}|\dot m(t,\vartheta_0)|\quad\text{und}\quad d=\sup_{0\le t\le T}\left|\frac{1}{\dot b(t,\vartheta_0)}\right|.$$

Nach Voraussetzung gilt $c<\infty$ und $d<\infty$. Damit haben wir

$$\left|\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}\frac{\triangle m_u(t_{i,n},\vartheta_0)\,\triangle m_v(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)}\right|\le\frac{c^2}{d}\max_{1\le i\le k_n}|t_{i,n}-t_{i-1,n}|\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\tag{7}$$

und dies ergibt die Behauptung. ■

**Lemma 4** *Die Funktionen $b$ und $m$ mgen die Voraussetzungen in Theorem* 2 *erfllen. Weiterhin gelte* (V1). *Dann folgt mit $\triangle b(t_{i,n}):=b(t_{i,n})-b(t_{i-1,n})$*

$$\sum_{i=1}^{k_n}\frac{\triangle m_u(t_{i,n},\vartheta_0)\,\triangle m_v(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n})}\to\int\limits_0^T\frac{\dot m_u(t,\vartheta_0)\,\dot m_v(t,\vartheta_0)}{\dot b(t)}\,dt.$$

**Beweis:** Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt mit gewissen $\overset{*}{s}_{i,n},\ \overset{*}{t}_{i,n} \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$

$$\sum_{i=1}^{k_n} \frac{\triangle m_u(t_{i,n},\vartheta_0)\,\triangle m_v(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n})} = \sum_{i=1}^{k_n} \frac{\dot m_u(\overset{*}{s}_{i,n},\vartheta_0)\,\dot m_v(\overset{*}{t}_{i,n},\vartheta_0)}{\dot b(\overset{*}{s}_{i,n})}\,(t_{i,n} - t_{i-1,n}).$$

Die gleichmige Stetigkeit von $t \longmapsto \dot m_v(t,\vartheta_0)$ ergibt

$$\operatorname*{Max}_{1\le i\le k_n} \left|\dot m_v(\overset{*}{s}_{i,n},\vartheta_0) - \dot m_v(\overset{*}{t}_{i,n},\vartheta_0)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Damit erhalten wir die Behauptung aus der Riemannintegrierbarkeit von

$$t \longmapsto \frac{\dot m_u(t,\vartheta_0)\,\dot m_v(t,\vartheta_0)}{\dot b(t)}. \qquad \blacksquare$$

**Lemma 5** $Y_{i,j,n}$ $(1 \le i \le k_n,\ 1 \le j \le m_n,\ n = 1,2,\dots)$ *seien unabhngige standardnormalverteilte Zufallsvariable.* $c_{i,n},\ d_{i,n}$ $(1 \le i \le k_n,\ n = 1,2,\dots)$ *seien reelle Zahlen mit*

$$D = \sup_{i,n} \Big(|c_{i,n}| + |d_{i,n}|\Big) < \infty \tag{8}$$

*und der Eigenschaft, da*

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} (2c_{i,n}^2 + d_{i,n}^2) \tag{9}$$

*existiert und* $\sigma^2 > 0$ *erfllt ist. Dann gilt*

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{k_n m_n}} \sum_{j=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{k_n} \Big(\Big(Y_{i,j,n}^2 - 1\Big)\, c_{i,n} + Y_{i,j,n}\, d_{i,n}\Big)\right) \Longrightarrow N(0,\sigma^2)\ .$$

**Beweis:** Es bezeichne $B_n^2$ die Varianz von $\sum\limits_{j=1}^{m_n} \sum\limits_{i=1}^{k_n} \Big(Y_{i,j,n}^2 - 1\Big)\, c_{i,n} + Y_{i,j,n}\, d_{i,n}$. Eine einfache Rechnung zeigt

$$B_n^2 = m_n \sum_{i=1}^{k_n} (2c_{i,n}^2 + d_{i,n}^2)\ .$$

Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes fr das Serienschema ist nur noch die Ljapunowsche Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^3} \sum_{j=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{k_n} E\left|(Y_{i,j,n}^2 - 1)c_{i,n} + Y_{i,j,n}\, d_{i,n}\right|^3 = 0 \tag{10}$$

nachzuweisen. Aus $\mathcal{L}(Y_{i,j,n}) = N(0,1)$ und (8) erhlt man

$$\sup_{i,n} E\left|(Y_{i,j,n}^2 - 1)c_{i,n} + Y_{i,j,n}\, d_{i,n}\right|^3 < \infty\ .$$

Wegen (9) gilt fr alle hinreichend groen $n$

$$B_n^3 \geq \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}} (m_n k_n)^{\frac{3}{2}} \ .$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt wegen $k_n \longrightarrow \infty$ die Bedingung (10) und damit die Behauptung. ■

**Lemma 6** *Die Zufallsvariablen $Y_{i,j,n}$ seien wie in Lemma 5 gewhlt. $\mathcal{S}_{i,n}$ ($1 \leq i \leq k_n$, $n = 1, 2, \ldots$) seien reelle Zahlen mit $R = \sup\limits_{i,n} |\mathcal{S}_{i,n}| < \infty$. Dann gilt*

$$E\left(\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}\left(Y_{i,j,n}^2 - 1\right)\mathcal{S}_{i,n}\right)^2 \leq \frac{2R^2}{k_n} \ .$$

**Beweis:** Das Lemma folgt aus der Unabhngigkeit der $Y_{i,j,n}$ und $E\,Y_{i,j,n}^2 = 1$, $E\,Y_{i,j,n}^4 = 3$. ■

Wir untersuchen jetzt den Logarithmus der Likelihoodfunktion im Experiment $E_n$, das in (2) erklrt wurde. Sei $L_n(\vartheta) = \ln \frac{d P_\vartheta^n}{d \lambda}$, wobei $\lambda$ das $k_n m_n$–dimensionale Lebesquesche Ma ist. Dann gilt

$$L_n(x_{1,1}, \ldots, x_{k_n, m_n}, \vartheta) = \sum_{j=1}^{m_n} L_{j,n}(x_{1,j}, \ldots, x_{k_n,j}, \vartheta) \tag{11}$$

mit

$$L_{j,n}(x_{1,j}, \ldots, x_{k_n,j}, \vartheta) = -\frac{k_n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k_n}\Big[\ln(\triangle b(t_{i,n}, \vartheta)) + \frac{(x_{i,j} - \triangle m(t_{i,n}, \vartheta))^2}{\triangle b(t_{i,n}, \vartheta)}\Big]. \tag{12}$$

Wir bezeichnen mit $X_{i,j} : \mathbb{R}^{k_n m_n} \to \mathbb{R}^1$ ($1 \leq i \leq k_n$, $j = 1 \ldots m_n$) die Projektionen auf die Koordinaten. Fassen wir sie als Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\mathbb{R}^{k_n m_n}, \mathcal{B}^{k_n m_n}, P_{\vartheta_0}^n\right)$ auf, so sind sie unabhngige Zufallsvariable mit

$$\mathcal{L}_{\vartheta_0}(X_{i,j}) = N\left(\triangle m(t_{i,n}, \vartheta_0), \triangle b(t_{i,n}, \vartheta_0)\right).$$

Deshalb ist bei festem $n$ die Gre $L_n(\vartheta)$ eine Summe aus den unabhngigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $L_{j,n}(\vartheta)$.

Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen, die sich auf das Ma $P_{\vartheta_0}^n$ beziehen, werden durch $E_{\vartheta_0}, V_{\vartheta_0}, \mathrm{cov}_{\vartheta_0}$ bezeichnet. Wir berechnen die Ableitungen der Log – Likelihoodfunktion nach den Komponenten von $\vartheta$. Mit der Bezeichnung

$$L_{n,u}(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial\,\vartheta_u} L_n(\vartheta)$$

gilt

$$L_{n,u}(\vartheta) = \sum_{j=1}^{m_n} L_{j,n,u}(\vartheta) \tag{13}$$

$$L_{n,u,v}(\vartheta) = \sum_{j=1}^{m_n} L_{j,n,u,v}(\vartheta), \tag{14}$$

wobei

$$\begin{aligned} L_{j,n,u}(\vartheta) &= \sum_{i=1}^{k_n} \Big[ \frac{(X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n}, \vartheta))^2}{2(\triangle b(t_{i,n}, \vartheta))^2} \triangle b_u(t_{i,n}, \vartheta) \\ &- \frac{\triangle b_u(t_{i,n}, \vartheta)}{2\triangle b(t_{i,n}, \vartheta)} + \frac{X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n}, \vartheta)}{\triangle b(t_{i,n}, \vartheta)} \triangle m_u(t_{i,n}, \vartheta) \Big] \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} Y_{i,j,u}(\vartheta) \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} L_{j,n,u,v}(\vartheta) = &\sum_{i=1}^{k_n} \frac{(X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n}, \vartheta))^2}{\triangle b(t_{i,n}, \vartheta)} \left[ \frac{\triangle b_{u,v}(t_{i,n}, \vartheta)}{2\triangle b(t_{i,n}, \vartheta)} - \frac{\triangle b_u(t_{i,n}, \vartheta)\, \triangle b_v(t_{i,n}, \vartheta)}{(\triangle b(t_{i,n}, \vartheta))^2} \right] \\ &+ \sum_{i=1}^{k_n} \frac{X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n}, \vartheta)}{(\triangle b(t_{i,n}, \vartheta))^{1/2}} \Bigg[ \frac{\triangle m_{u,v}(t_{i,n}, \vartheta)}{(\triangle b(t_{i,n}, \vartheta))^{1/2}} - \frac{\triangle m_v(t_{i,n}, \vartheta)\, \triangle b_u(t_{i,n}, \vartheta)}{(\triangle b(t_{i,n}, \vartheta))^{3/2}} \\ &\qquad - \frac{\triangle m_u(t_{i,n}, \vartheta)\, \triangle b_v(t_{i,n}, \vartheta)}{(\triangle b(t_{i,n}, \vartheta))^{3/2}} \Bigg] \\ &- \sum_{i=1}^{k_n} \left[ \frac{\triangle m_u(t_{i,n}, \vartheta)\, \triangle m_v(t_{i,n}, \vartheta)}{\triangle b(t_{i,n}, \vartheta)} + \frac{\triangle b_{u,v}(t_{i,n}, \vartheta)}{2\triangle b(t_{i,n}, \vartheta)} - \frac{\triangle b_u(t_{i,n}, \vartheta)\, \triangle b_v(t_{i,n}, \vartheta)}{2(\triangle b(t_{i,n}, \vartheta))^2} \right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Wir untersuchen die Momente von $L_{j,n,u}(\vartheta)$. Offensichtlich gilt $E_{\vartheta_0}\, L_{j,n,u}(\vartheta_0) = 0$. Aus der Unabhngigkeit von $X_{i,j_1}$ und $X_{i,j_2}$ fr $j_1 \neq j_2$ und

$$\mathcal{L}_{\vartheta_0}\left( \frac{X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n}, \vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n}, \vartheta_0))^{1/2}} \right) = N(0,1)$$

ergibt sich

$$\operatorname{cov}_{\vartheta_0}(L_{j,n,u}(\vartheta_0), L_{j,n,v}(\vartheta_0)) = \sum_{i=1}^{k_n} \operatorname{cov}_{\vartheta_0}(Y_{i,j,u}(\vartheta_0), Y_{i,j,v}(\vartheta_0)), \tag{17}$$

wobei

$$\operatorname{cov}_{\vartheta_0}(Y_{i,j,u}(\vartheta_0), Y_{i,j,v}(\vartheta_0)) = \frac{\triangle b_u(t_{i,n}, \vartheta_0)\, \triangle b_v(t_{i,n}, \vartheta_0)}{2(\triangle b(t_{i,n}, \vartheta_0))^2} + \frac{\triangle m_u(t_{i,n}, \vartheta_0)\, \triangle m_v(t_{i,n}, \vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n}, \vartheta_0)}. \tag{18}$$

Wir untersuchen jetzt den Stetigkeitsmodul der zweiten Ableitung der Log – Likelihoodfunktion. Dabei sei $K_\gamma$ die abgeschlossene Kugel im $\mathbb{R}^k$ mit dem Radius $\gamma$ und dem Mittelpunkt $\vartheta_0$.

**Lemma 7** *Die Funktionen $m$ und $b$ mgen den Voraussetzungen* (V3) *und* (V4) *gengen. $\vartheta_0 \in \Theta$ sei ein innerer Punkt. Dann gilt fr alle $1 \le u, v \le k$*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} \sup_n E_{\vartheta_0} \sup_{\vartheta\in K_\gamma} \frac{1}{k_n m_n} |L_{n,u,v}(\vartheta) - L_{n,u,v}(\vartheta_0)| = 0.$$

**Beweis:** Die abgeschlossene und beschrnkte Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$G = \{(t,h):\ 0 \le t \le T,\ 0 \le h \le T,\ 0 \le t+h \le T\}.$$

$\gamma_0$ sei so klein, da $K_{\gamma_0} \subset \Theta^0$ gilt. Fr $(t,h,\vartheta) \in G \times K_{\gamma_0}$ setzen wir

$$\Phi(t,h,\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{b_u(t+h,\vartheta) - b_u(t,\vartheta)}{b(t+h,\vartheta) - b(t,\vartheta)} & h \neq 0, \\ \dfrac{\dot{b}_u(t,\vartheta)}{\dot{b}(t,\vartheta)} & h = 0. \end{cases}$$

Aufgrund der Voraussetzungen (V3) und (V4) ist $\Phi(t,h,\vartheta)$ eine stetige Funktion auf der kompakten Menge $G \times K_{\gamma_0}$. Damit ist die Folge der Funktionen

$$\vartheta \to \frac{b_u(t_{i,n},\vartheta) - b_u(t_{i-1,n},\vartheta)}{b(t_{i,n},\vartheta) - b(t_{i-1,n},\vartheta)}$$

auf $K_{\gamma_0}$ gleichmig beschrnkt und gleichgradig stetig. Analog zeigt man, da die weiteren in der Darstellung (16) von $L_{j,n,u,v}(\vartheta)$ auftretenden Funktionenfolgen, bei denen gewisse Potenzen von $\triangle b(t_{i,n},\vartheta)$ im Nenner stehen, ebenfalls die Eigenschaften besitzen, gleichmig beschrnkt und gleichgradig stetig zu sein. Damit erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned} L_{j,n,u,v} &= \sum_{i=1}^{k_n} \frac{(X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n},\vartheta))^2}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta)} \varphi_{i,n}(\vartheta) \\ &+ \sum_{i=1}^{k_n} \frac{X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n},\vartheta)}{(\triangle b(t_{i,n},\vartheta))^{1/2}} \psi_{i,n}(\vartheta) + \sum_{i=1}^{k_n} \rho_{i,n}(\vartheta) = L_n^{(1)}(\vartheta) + L_n^{(2)}(\vartheta) + L_n^{(3)}(\vartheta) \end{aligned} \tag{19}$$

mit auf $K_{\gamma_0}$ gleichgradig stetigen Familien von Funktionen $\varphi_{i,n}(\vartheta)$, $\psi_{i,n}(\vartheta)$ und $\rho_{i,n}(\vartheta)$. Es gilt

$$\begin{aligned} &\left|L_n^{(1)}(\vartheta) - L_n^{(1)}(\vartheta_0)\right| \\ &\le \sum_{i=1}^{k_n} \left| \frac{(X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n},\vartheta))^2}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta)} - \frac{(X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n},\vartheta_0))^2}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)} \right| |\varphi_{i,n}(\vartheta)| \\ &+ \sum_{i=1}^{k_n} \frac{(X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n},\vartheta_0))^2}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)} |\varphi_{i,n}(\vartheta) - \varphi_{i,n}(\vartheta_0)| \\ &= B_{1,n}(\vartheta) + B_{2,n}(\vartheta). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} B_{1,n}(\vartheta) &\le \sum_{i=1}^{k_n} \frac{(X_{i,j}-\triangle m(t_{i,n},\vartheta_0))^2}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)} \cdot \left| \frac{\triangle b(t_{i,n},\vartheta)-\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta)}\, \varphi_{i,n}(\vartheta) \right| \\ &+ 2\sum_{i=1}^{k_n} \left| \frac{X_{i,j}-\triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)} \right| \cdot \left| (\triangle m(t_{i,n},\vartheta)-\triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)) \cdot \frac{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta)} \right| |\varphi_{i,n}(\vartheta)| \\ &+ \sum_{i=1}^{k_n} \frac{|\triangle m(t_{i,n},\vartheta)-\triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)|^2}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta)}\, |\varphi_{i,n}(\vartheta)| \, . \end{aligned}$$

Durch hnliche berlegungen wie beim Beginn des Beweises lt sich zeigen, da die in Betragsstrichen stehenden Familien von Funktionen von $\vartheta$ auf $K_{\gamma_0}$ gleichgradig stetig sind und fr $\vartheta = \vartheta_0$ den Wert Null annehmen. Somit existiert eine Funktion $w(\gamma) \to 0,\ \gamma \downarrow 0$, derart, da fr $\gamma \le \gamma_0$ gilt

$$\sup_{\vartheta\in K_\gamma} \frac{1}{k_n} B_{1,n}(\vartheta) \le w(\gamma) \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \left( \frac{(X_{i,j}-\triangle m(t_{i,n},\vartheta_0))^2}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)} + 2 \left| \frac{X_{i,j}-\triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)} \right| + 1 \right) .$$

Aus $\mathcal{L}_{\vartheta_0}\left( \frac{X_{i,j}-\triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0))^{1/2}} \right) = N(0,1)$ folgt

$$\sup_n E_{\vartheta_0} \sup_{\vartheta\in K_\gamma} \frac{1}{k_n} B_{1,n}(\vartheta) \le 4w(\gamma) \xrightarrow[\gamma\to 0]{} 0 \, .$$

Analog ergibt sich mit Hilfe der gleichgradigen Stetigkeit der $\varphi_{i,n}(\vartheta)$ die Beziehung

$$\sup_n E_{\vartheta_0} \sup_{\vartheta\in K_\gamma} \frac{1}{k_n} B_{2,n}(\vartheta) \xrightarrow[\gamma\to 0]{} 0 \, .$$

Damit folgt

$$\sup_n E_{\vartheta_0} \sup_{\vartheta\in K_\gamma} \left| L_n^{(1)}(\vartheta) - L_n^{(1)}(\vartheta_0) \right| \xrightarrow[\gamma\to 0]{} 0 \, .$$

Mit hnlichen Methoden lassen sich analoge Aussagen fr $L_n^{(2)}(\vartheta)$ und $L_n^{(3)}(\vartheta)$ nachweisen. Die Behauptung von Lemma 7 folgt jetzt aus der Darstellung (14). ■

Wir wollen nun eine zu Lemma 7 analoge Aussage fr die Situation in Theorem 2 nachweisen.

**Lemma 8** *Die Funktionen $b$ und $m$ mgen den Voraussetzungen in Theorem 2 gengen. $\vartheta_0 \in \Theta$ sei ein innerer Punkt. Dann gilt fr alle $1 \le u, v \le k$*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} \sup_n E_{\vartheta_0} \sup_{\vartheta\in K_\gamma} \frac{1}{m_n} |L_{n,u,v}(\vartheta) - L_{n,u,v}(\vartheta_0)| = 0 \, .$$

**Beweis:** Da $b$ von $\vartheta$ unabhngig ist, vereinfacht sich die Darstellung von $L_{j,n,u,v}(\vartheta)$ in (16) zu

$$\begin{aligned} L_{j,n,u,v}(\vartheta) &= \sum_{i=1}^{k_n} \left[ \frac{X_{i,j}-\triangle m(t_{i,n},\vartheta)}{(\triangle b(t_{i,n}))^{1/2}} \cdot \frac{\triangle m_{u,v}(t_{i,n},\vartheta)}{(\triangle b(t_{i,n}))^{1/2}} - \frac{\triangle m_u(t_{i,n},\vartheta)\, \triangle m_v(t_{i,n},\vartheta)}{\triangle b(t_{i,n})} \right] \\ &= L_{1,j,n}(\vartheta) + L_{2,j,n}(\vartheta). \end{aligned}$$

Es gilt mit $\phi_{i,n}(\vartheta) = \frac{\triangle m_{u,v}(t_{i,n},\vartheta)}{\triangle b(t_{i,n})}$

$$\begin{aligned} L_{1,j,n}(\vartheta) - L_{1,j,n}(\vartheta_0) &= \sum_{i=1}^{k_n} \frac{X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n}))^{1/2}} (\phi_{i,n}(\vartheta) - \phi_{i,n}(\vartheta_0))(\triangle b(t_{i,n}))^{1/2}) \\ &+ \sum_{i=1}^{k_n} \frac{\triangle m(t_{i,n},\vartheta) - \triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n})} \phi_{i,n}(\vartheta) \triangle b(t_{i,n}). \end{aligned}$$

Wir untersuchen die erste Summe. Weil $\dot{m}_{u,v}$ einer Hderbedingung in einer Umgebung von $\vartheta_0$ gengt, gibt es eine Konstante c und ein $\alpha > 0$ und ein hinreichend kleines $\gamma_0$ mit

$$|\phi_{i,n}(\vartheta_1) - \phi_{i,n}(\vartheta_2)| \leq c_1 ||\vartheta_1 - \vartheta_2||^\alpha$$

fr alle $\vartheta_i \in K_{\gamma_0}$. Bezglich $P^n_{\vartheta_0}$ sind die $\dfrac{X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n}))^{1/2}}$ standardnormalverteilt. Deshalb besitzt

$$\xi_{j,n}(\vartheta) = \sum_{i=1}^{k_n} \frac{X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n}))^{1/2}} (\phi_{i,n}(\vartheta) - \phi_{i,n}(\vartheta_0))(\triangle b(t_{i,n}))^{1/2}$$

eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz

$$\sigma_n^2(\vartheta) = \sum_{i=1}^{k_n} (\phi_{i,n}(\vartheta) - \phi_{i,n}(\vartheta_0))^2 \triangle b(t_{i,n}).$$

Es gilt $E(\xi_{j,n}(\vartheta))^{2l} = 1 \cdot 3 \cdots (2l-1)\sigma^{2l}$. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt $\triangle b(t_{i,n}) \leq c_3(t_{i,n} - t_{i-1,n})$ mit einer gewissen Konstanten $c_3$. Damit gilt

$$E(\xi_{j,n}(\vartheta))^{2l} \leq 1 \cdot 3 \cdots (2l-1)(c_1^2 \gamma_0^{2\alpha} c_3 T)^l.$$

Analog ergibt sich

$$E(\xi_{j,n}(\vartheta) - \xi_{j,n}(\vartheta_0))^{2l} \leq 1 \cdot 3 \cdots (2l-1)(c_1^2 ||\vartheta_1 - \vartheta_2||^{2\alpha} c_3 T)^l.$$

Whlt man jetzt $l$ so gro, da $r = 2\alpha l > k$ gilt, so sind mit $l = 2m$ die Voraussetzungen von Lemma 1 erfllt, woraus

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} \sup_n E_{\vartheta_0} \sup_{\substack{j,n \\ \vartheta \in K_\gamma}} |\xi_{j,n}(\vartheta) - \xi_{j,n}(\vartheta_0)| = 0$$

folgt. Wir untersuchen jetzt den zweiten Term in der Darstellung von $L_{1,j,n}(\vartheta) - L_{1,j,n}(\vartheta_0)$. Die Folge $\phi_{i,n}(\vartheta)$ ist gleichmig beschrnkt auf $K_{\gamma_0}$ und die Folge $\dfrac{\triangle m(t_{i,n},\vartheta) - \triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n})}$ ist gleichgradig stetig. Aus $\triangle b(t_{i,n}) \leq c_3(t_{i,n} - t_{i-1,n})$ ergibt sich dann

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} \sup_{\substack{j,n \\ \vartheta \in K_\gamma}} \left| \sum_{i=1}^{k_n} \frac{\triangle m(t_{i,n},\vartheta) - \triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n})} \phi_{i,n}(\vartheta) \triangle b(t_{i,n}) \right| = 0.$$

Somit gilt

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} \sup_{\substack{j,n\\ \vartheta\in K_\gamma}} |L_{1,j,n}(\vartheta) - L_{1,j,n}(\vartheta_0)| = 0 \ .$$

Analog zeigt man

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} \sup_{\substack{j,n\\ \vartheta\in K_\gamma}} |L_{2,j,n}(\vartheta) - L_{2,j,n}(\vartheta_0)| = 0 \ .$$

Damit ist Lemma 8 vollstndig bewiesen. ■

**Beweis von Theorem 1:** Weil $\vartheta_0$ ein innerer Punkt von $\Theta$ ist, gibt es ein $\gamma_0 > 0$ derart, da $K_{\gamma_0} \subseteq \Theta^0$ gilt. Im weiteren bezeichnen wir durch $o_{P^n_\vartheta}(1)$ Folgen von Zufallsvariablen, die $P^n_\vartheta$–stochastisch gegen Null streben. Wir setzen $A_n = \left\{\widehat{\vartheta_n} \in K_{\gamma_0}\right\}$. Weil $\widehat{\vartheta_n}$ konsistent ist, gilt

$$P^n_{\vartheta_0}(\overline{A_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ . \tag{20}$$

Auf dem Ereignis $A_n$ besitzt die Log – Likelihoodfunktion ein relatives Maximum in $\widehat{\vartheta_n}$. Deshalb gilt auf $A_n$ fr alle $u$ $(u = 1, \dots, k)$ $L_{n,u}\left(\widehat{\vartheta_n}\right) = 0$. Aufgrund der Beziehung (20) ist $I_{\overline{A_n}} L_{n,u}\left(\widehat{\vartheta_n}\right) = o_{P^n_{\vartheta_0}}(1)$.

$I_A$ ist hierbei die Indikatorfunktion des Ereignisses $A$. Wir bezeichnen durch $DL_n(\vartheta)$ den Gradienten von $L_n$ und durch $D^2$ die Matrix der zweiten Ableitungen. Durch Taylorentwicklung ergibt sich aus $L_{n,u}\left(\widehat{\vartheta_n}\right) = 0$

$$o_{P^n_{\vartheta_0}}(1) = \frac{1}{\sqrt{k_n m_n}} DL_n(\vartheta_0) + \sqrt{k_n m_n}\left(\widehat{\vartheta_n} - \vartheta_0\right) \cdot \frac{1}{k_n m_n}\left(D^2 L_n(\vartheta_0) + R_n\right), \tag{21}$$

wobei $R_n = D^2 L_n\left(\widetilde{\vartheta_n}\right) - D^2 L_n(\vartheta_0)$ gilt und $\widetilde{\vartheta_n}$ auf der Verbindungsgeraden von $\vartheta_0$ und $\widehat{\vartheta_n}$ zwischen diesen beiden Punkten liegt.

Wir untersuchen zunchst $R_n$. Aus der Konsistenz von $\widehat{\vartheta_n}$ folgt

$$P^n_{\vartheta_0}\left(\widehat{\vartheta_n} \notin K_\gamma\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

fr alle $\gamma > 0$. Wir schtzen die Elemente $L_{n,u,v}(\widetilde{\vartheta_n})$ der Matrix $R_n$ ab:

$$\begin{aligned}
&P^n_{\vartheta_0}\left(\frac{1}{k_n m_n}\left|L_{n,u,v}\left(\widetilde{\vartheta_n}\right) - L_{n,u,v}(\vartheta_0)\right| > \varepsilon\right)\\
&\le P^n_{\vartheta_0}\left(\frac{1}{k_n m_n}\left|L_{n,u,v}\left(\widetilde{\vartheta_n}\right) - L_{n,u,v}(\vartheta_0)\right| > \varepsilon,\ \widetilde{\vartheta_n} \in K_\gamma\right) + P^n_{\vartheta_0}\left(\widetilde{\vartheta_n} \notin K_\gamma\right)\\
&\le \frac{1}{\varepsilon} \sup_n E_{\vartheta_0} \sup_{\vartheta\in K_\gamma} \frac{1}{k_n m_n} |L_{n,u,v}(\vartheta) - L_{n,u,v}(\vartheta_0)| + P^n_{\vartheta_0}\left(\widetilde{\vartheta_n} \notin K_\gamma\right).
\end{aligned}$$

Wenden wir Lemma 7 auf die rechte Seite an, so folgt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P^n_{\vartheta_0}\left(\frac{1}{k_n m_n}\left|L_{n,u,v}\left(\widetilde{\vartheta_n}\right) - L_{n,u,v}(\vartheta_0)\right| > \varepsilon\right)$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\lim_{\gamma\downarrow 0}\sup_n E_{\vartheta_0}\sup_{\vartheta\in K_\gamma}\frac{1}{k_n m_n}\left|L_{n,u,v}(\vartheta) - L_{n,u,v}(\vartheta_0)\right| + \lim_{\gamma\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P^n_{\vartheta_0}\left(\widetilde{\vartheta_n}\notin K_\gamma\right) = 0.$$

Damit gilt

$$\frac{1}{k_n m_n} R_n = o_{P^n_{\vartheta_0}}(1). \tag{22}$$

Wir untersuchen jetzt die Elemente der Matrix $\frac{1}{k_n m_n} D^2 L_n(\vartheta_0)$. Sei

$$Y_{i,j,n} = \frac{X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0))^{1/2}}.$$

Aus (14) und (16) folgt bei festem $u, v$ mit

$$S_{i,n} = \frac{\triangle b_{u,v}(t_{i,n},\vartheta_0)}{2\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)} - \frac{\triangle b_u(t_{i,n},\vartheta_0)\,\triangle b_v(t_{i,n},\vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0))^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_n m_n} L_{n,u,v}(\vartheta_0) \;&=\; \frac{1}{m_n}\sum_{j=1}^{m_n}\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}(Y^2_{i,j,n}-1)\,S_{i,n} + \frac{1}{m_n}\sum_{j=1}^{m_n}\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} Y_{i,j,n}\,\psi_{i,n}(\vartheta_0)\\ &-\frac{1}{m_n}\sum_{j=1}^{m_n}\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}\left[\frac{\triangle m_u(t_{i,n},\vartheta_0)\,\triangle m_v(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)} + \frac{\triangle b_u(t_{i,n},\vartheta_0)\,\triangle b_v(t_{i,n},\vartheta_0)}{2(\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0))^2}\right],\end{aligned} \tag{23}$$

wobei die $S_{i,n}$ und $\psi_{i,n}(\vartheta_0)$ gleichmig beschrnkt sind. Wegen $\mathcal{L}_{\vartheta_0}(Y_{i,j,n}) = N(0,1)$ und Lemma 6 folgt

$$E_{\vartheta_0}\left(\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}(Y^2_{i,j,n}-1)\,S_{i,n}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{und} \qquad E_{\vartheta_0}\left(\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} Y_{i,j,n}\,\psi_{i,n}(\vartheta_0)\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Damit streben die ersten beiden Terme auf der rechten Seite von (23) $P^n_{\vartheta_0}$–stochastisch gegen Null fr $n\to\infty$. Wegen Lemma 3 strebt der dritte Term fr $n\to\infty$ gegen $-\sigma_{u,v}(\vartheta_0)$. Damit strebt also $\frac{1}{k_n m_n}(D^2 L_n(\vartheta_0) + R_n)$ $P^n_{\vartheta_0}$–stochastisch gegen $-\sum(\vartheta_0)$.

Wir untersuchen nun die Folge der zuflligen Vektoren $\frac{1}{\sqrt{k_n m_n}} D L_n(\vartheta_0)$. $<\cdot,\cdot>$ bezeichne das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^k$ und $a\in\mathbb{R}^k$ sei fest gewhlt. Dann gilt aufgrund von (16)

$$\left\langle\frac{1}{\sqrt{k_n m_n}} D\,L_n(\vartheta_0), a\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{k_n m_n}}\sum_{j=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{k_n}\left(\left(Y^2_{i,j,n}-1\right)\,c_{i,n} + Y_{i,j,n}\,d_{i,n}\right),$$

wobei

$$c_{i,n} = \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{k}\frac{\triangle b_u(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0)}\,a_u \qquad \text{und} \qquad d_{i,n} = \sum_{u=1}^{k}\frac{\triangle m_u(t_{i,n},\vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n},\vartheta_0))^{1/2}}\,a_u.$$

Aus Lemma 3 folgt

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \left(2\, c_{i,n}^2 + d_{i,n}^2\right) = \sum_{u,v=1}^{k} \sigma_{u,v}(\vartheta_0)\, a_u\, a_v .$$

Wenden wir jetzt Lemma 5 an, so folgt

$$\mathcal{L}_{\vartheta_0}\left(\left\langle \frac{1}{k_n m_n} D\, L_n(\vartheta_0), a \right\rangle\right) \Longrightarrow N(0,\sigma^2).$$

Durch Anwendung der Cramer – Wold – Technik erhlt man

$$\mathcal{L}_{\vartheta_0}\left(\frac{1}{\sqrt{k_n m_n}} D\, L_n(\vartheta_0)\right) \Longrightarrow N(0, \sum(\vartheta_0)).$$

Weil $\frac{1}{k_n m_n}\,(D^2 L_n(\vartheta_0) + R_n)$ stochastisch gegen die regulre Matrix $\sum(\vartheta_0)$ strebt, ergibt sich die Behauptung aus der Darstellung (21) durch Anwendung des Satzes von Slutsky. ■

**Beweis von Theorem 2:**

Durch Anwendung der gleichen Argumente wie in Beweis von Theorem 1 erhlt man

$$o_{P^n_{\vartheta_0}}(1) = \frac{1}{\sqrt{m_n}} DL_n(\vartheta_0) + \frac{1}{m_n}\left(D^2 L_n(\vartheta_0)\sqrt{m_n}\left(\widehat{\vartheta_n} - \vartheta_0\right) + R_n\right).$$

Wegen Lemma 8 strebt die Folge der Matrizen $\frac{1}{m_n} R_n$ $P^n_{\vartheta_0}$–stochastisch gegen Null. Wir setzen

$$Y_{i,j,n} = \frac{X_{i,j} - \triangle m(t_{i,n},\vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n}))^{1/2}} .$$

Die $u$–te Komponente von $\frac{1}{\sqrt{m_n}}\, DL_n(\vartheta_0)$ hat dann die Gestalt

$$\frac{1}{\sqrt{m_n}}\, L_{n,u}(\vartheta_0) = \frac{1}{\sqrt{m_n}} \sum_{j=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{k_n} Y_{i,j,n}\, \frac{\triangle m_u(t_{i,n},\vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n}))^{1/2}}. \tag{24}$$

Die Elemente der Matrix $\frac{1}{m_n}\, D^2\, L_n(\vartheta_0)$ haben die Form

$$\frac{1}{m_n}\, L_{n,u,v}(\vartheta_0) = \frac{1}{m_n} \sum_{j=1}^{m_n} \left[\sum_{i=1}^{k_n} \left(Y_{i,j,n}\, \frac{\triangle m_{u,v}(t_{i,n},\vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n}))^{1/2}} - \frac{\triangle m_u(t_{i,n},\vartheta_0)\, \triangle m_v(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n})}\right)\right]. \tag{25}$$

Wir setzen $Z_{i,n} = \frac{1}{m_n} \sum\limits_{j=1}^{m_n} Y_{i,j,n}$. Dann gilt $\mathcal{L}_{\vartheta_0}(Z_{i,n}) = N\left(0, \frac{1}{m_n}\right)$. Wegen Voraussetzung (V4) ist $\dfrac{\triangle b_{u,v}(t_{i,n},\vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n})}$, $i = 1,\ldots,k_n$, $n = 1,\ldots,$ betragsmig beschrnkt. Wegen der Voraussetzung ber $b$ in Theorem 2 gilt $\triangle b(t_{i,n}) \le \sup\limits_{0\le t\le T} \dot{b}(t)(t_{i,n} - t_{i-1,n})$ mit $\sup\limits_{0\le t\le T} \dot{b}(t) < \infty$. Damit hat der erste Term auf der rechten Seite von (25) die Gestalt $\sum\limits_{i=1}^{k_n} Z_{i,n}\, h_{i,n}$, wobei die

$h_{i,n}$ mit einer gewissen Konstanten $c$ die Abschtzung $|h_{i,n}| \leq c(t_{i,n} - t_{i-1,n})^{1/2}$ gestatten. Damit ist $U_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} Z_{i,n}\, h_{i,n}$ eine normalverteilte Zufallsgre mit dem Erwartungswert Null und einer Varianz, die hchstens $\dfrac{c^2 T}{m_n}$ ist. Wegen $m_n \to \infty$ streben deshalb die $U_n$ $P^n_{\vartheta_0}$–stochastisch gegen Null. Da der zweite Term in (25) nach Lemma 5 gegen $-\widetilde{\sigma_{u,v}}$ strebt, konvergiert insgesamt $\frac{1}{m_n} D^2 L_n(\vartheta_0)$ $P^n_{\vartheta_0}$–stochastisch gegen $-\widetilde{\sum}(\vartheta_0)$.

Wie im Beweis von Theorem 1 bleibt nur zu zeigen, da die Verteilung von $\frac{1}{\sqrt{m_n}} D\, L_n(\vartheta_0)$ gegen $N\Big(0, \widetilde{\sum}(\vartheta_0)\Big)$ strebt. Diese Aussage lt sich folgendermaen begrnden. Die $U_{i,n} = \frac{1}{\sqrt{m_n}} \sum\limits_{j=1}^{m_n} Y_{i,j,n}$ sind unabhngige standardnormalverteilte Zufallsvariable. Somit besitzt der Vektor

$$\left( \sum_{i=1}^{k_n} U_{i,n} \frac{\triangle m_1(t_{i,n}, \vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n}))^{1/2}}, \ldots, \sum_{i=1}^{k_n} U_{i,n} \frac{\triangle m_k(t_{i,n}, \vartheta_0)}{(\triangle b(t_{i,n}))^{1/2}} \right)$$

eine $k$–dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor 0 und der Kovarianzmatrix

$$\sum\nolimits_n = \left( \sum_{i=1}^{k_n} \frac{\triangle m_u(t_{i,n}, \vartheta_0)\, \triangle m_v(t_{i,n}, \vartheta_0)}{\triangle b(t_{i,n})} \right)_{1 \leq u,v \leq k} .$$

Wegen Lemma 4 gilt $\sum_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \widetilde{\sum}(\vartheta_0)$ und hieraus folgt

$$\mathcal{L}_{\vartheta_0} \left( \frac{1}{\sqrt{m_n}} DL_n(\vartheta_0) \right) \Longrightarrow N\Big(0, \widetilde{\sum}(\vartheta_0)\Big). \qquad \blacksquare$$

## Literaturverzeichnis

[1] **Ibragimov, I.A.** and **Hasminskij, R.Z.** : *Asymptotische Schtztheorie.* (Russisch) Moskau 1979

[2] **Jacod, J.** : *Random sampling in estimation problems for continuous Gaussian processes with independent increments.* Preprint No. 57, Laboratoire de Probabilitès de L' Universitè Paris V, 1991

[3] **Jacod, J.** and **Shiryaev, A. N.** : *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Berlin 1987

[4] **Liese, F.** and **Wienke, A.** : *Exponential rate of convergence of maximum likelihood estimators for inhomogeneous Wiener processes.* Eingereicht bei Kybernetika (Prague)

**eingegangen:** 2. Dezember 1992

**Autoren:**

Prof. Dr. Friedrich Liese
Universitt Rostock
Fachbereich Mathematik
Universittsplatz 1
18051 Rostock
Bundesrepublik Deutschland

Dipl.–Math. Andreas Wienke
Universitt Rostock
Fachbereich Mathematik
Universittsplatz 1
18051 Rostock
Bundesrepublik Deutschland