Rostock. Math. Kolloq. **48**, 59–74 (1995)

Subject Classification (AMS)
06F05, 20M14

Manfred Krüppel

Ungleichungen für den asymptotischen Radius in uniform konvexen Banach-Räumen mit Anwendungen in der Fixpunkttheorie

Abstract. *We regard a new modul of convexity δ_p, which depends of an parameter $p > 1$. With help of δ_p we obtain an estimate of $\|\lambda x + (1-\lambda)y\|$ for $0 \le \lambda \le 1$ and prove an inequality for the asymptotic radius of a bounded sequence. By means of our inequality we obtain two asymptotic fixed point theorems.*

1 Der Konvexitätsmodul δ_p

Nach Clarkson [5] heißt ein Banach-Raum X uniform konvex, wenn zu jedem ε mit $0 < \varepsilon \le 2$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß aus $\|x\| \le 1, \|y\| \le 1$ und $\|x - y\| \ge \varepsilon$ folgt:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \le 1 - \delta(\varepsilon).$$

Die Funktion

$$\delta(\varepsilon) = \inf \left[1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in X, \|x\| \le 1, \|y\| \le 1, \|x-y\| \ge \varepsilon \right]$$

heißt Konvexitätsmodul des Banach-Raumes X.
Der Banach-Raum X ist genau dann uniform konvex, wenn aus $\|x_n\| \le 1, \|y_n\| \le 1$ und $\|x_n + y_n\| \to 2$ stets $\|x_n - y_n\| \to 0$ folgt (vgl. [8] oder [11]).
Der Hilbert-Raum ist uniform konvex; dies folgt aus der Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Die Funktionsräume L^p sind für $1 < p < \infty$ uniform konvex; dies ergibt sich aus den Clarksonschen Ungleichungen (Clarkson [5]): Es gilt

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^p \le \left(\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} \right)^{q-1} \tag{1}$$

für $1 < p \le 2$ und für $2 \le p < \infty$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^q + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^q \le \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}, \tag{2}$$

wenn q den zu p konjugierten Exponenten bezeichnet.

Satz 1 *Im Raum L^p mit $1 < p \le 2$ gilt für $\|x\| \le 1, \|y\| \le 1$*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^q \le \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} - (2^{p-1} - 1) \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^q,$$

wobei q der zu p konjugierte Exponent ist.

Beweis: Sei $a = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^q$ und $b = \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^q$. Dann ist $0 \le a \le 1$ und $0 \le b \le 1$.
Wir setzen

$$f(b) := \inf_{0 \le a \le 1} [(a+b)^{p-1} - a^{p-1}].$$

Zur Bestimmung von $f(b)$ für ein festes $b > 0$ betrachten wir die Funktion

$$g(a) := (a+b)^{p-1} - a^{p-1}$$

für $0 \le a \le 1$. Wegen $a, b \ge 0$ und $p - 2 \le 0$ ist

$$g'(a) = (p-1)(a+b)^{p-2} - (p-1)a^{p-2} \le 0.$$

Die Funktion $g(a)$ ist also monoton fallend. Daher ist

$$f(b) = (1+b)^{p-1} - 1.$$

Wegen $f''(b) = (p-1)(p-2)(1+b)^{p-3} < 0$ ist die Funktion $f(b)$ konkav und folglich

$$f(b) \ge (2^{p-1} - 1)b.$$

Es gilt also

$$(2^{p-1} - 1) \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^q \le \left(\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^q + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^q \right)^{p-1} - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^{q(p-1)}.$$

Nach der Clarksonschen Ungleichung (1) erhalten wir unter Beachtung von $(q-1)(p-1) = 1$ und $q(p-1) = p$ die Behauptung des Satzes. ■

Es sei X ein uniform konvexer Banach-Raum und p eine reelle Zahl mit $1 < p < \infty$. Wir führen einen neuen parameterabhängigen Konvexitätsmodul $\delta_p(\varepsilon)$ ein:

$$\delta_p(\varepsilon) := \inf \left[\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p : x, y \in X,\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon \right].$$

Satz 2 *Der Konvexitätsmodul $\delta_p(\varepsilon)$ hat folgende Eigenschaften:*

(*i*) $\delta_p(\varepsilon) > 0$ *für* $\varepsilon > 0$.

(*ii*) $\delta_p(\lambda\varepsilon) \leq \lambda^p \delta_p(\varepsilon)$ *für* $0 \leq \lambda \leq 1$.

(*iii*) *Für beliebige* $x,\ y \in X$ *mit* $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ *gilt*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p \leq \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} - \delta_p(\|x-y\|).$$

Beweis: Zu (i). Angenommen, (i) sei falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß zu jeder natürlichen Zahl n Elemente x_n, y_n existieren mit $\|x_n\| \leq 1, \|y_n\| \leq 1, \|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$ und

$$\left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|^p > \frac{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p}{2} - \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Wegen der Konvexität der Funktion t^p für $t > 0$ und der Dreiecksungleichung ist

$$\frac{\|x_n\| + \|y_n\|}{2} \geq \left(\frac{\|x_n\| + \|y_n\|}{2} \right)^p \geq \left(\frac{\|x_n - y_n\|^p}{2} \right)^p \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(\|x_n\|^p + \|y_n\|^p\right)} = 0.$$

Aus (3) folgt daher

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\|x_n + y_n\|^p}{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p} \geq 2^{p-1}. \tag{4}$$

Wir können annehmen, daß $\|x_n\| \to a$ und $\|y_n\| \to b$ konvergieren, andernfalls gehen wir zu Teilfolgen über. Da t^p eine für $t > 0$ streng konvexe Funktion ist, gilt

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $a = b$ ist. Aus (4) folgt unter Beachtung der Dreiecksungleichung und der strengen Konvexität von t^p

$$2^{p-1} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|x_n + y_n\|^p}{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{(\|x_n\|^p + \|y_n\|^p)}{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p} \leq 2^{p-1}$$

Hieraus folgt $a = b$, d.h. $\|x_n\| \to a$ and $\|y_n\| \to a$, sowie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n + y_n\|^p}{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p} = 2^{p-1} \ .$$

Weiter ergibt sich $\|x_n + y_n\| \to 2a$. Dies steht aber wegen $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$ im Widerspruch zur uniformen Konvexität von X.

Zu (ii). Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir zwei Folgen $(x_n), (y_n)$ derart, daß $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$, $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$ und

$$\delta_p(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p}{2} - \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|^p \right] .$$

gilt. Ist $\lambda \in (0,1)$, so gilt für die Folgen $x'_n = \lambda x_n$ und $y'_n = \lambda y_n$: $\|x'_n\| \leq 1$, $\|y'_n\| \leq 1$ und $\|x'_n - y'_n\| \geq \lambda\varepsilon$. Nach Definition von δ_p ist daher

$$\delta_p(\lambda\varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} \left[\frac{\|x'_n\|^p + \|y'_n\|^p}{2} - \left\| \frac{x'_n + y'_n}{2} \right\|^p \right] = \lambda^p \delta_p(\varepsilon).$$

Zu (iii). Die Eigenschaft (iii) ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Konvexitätsmoduls. ■

Bemerkung. Im Hilbert-Raum ist $\delta_2(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$, wie aus der Parallelogrammgleichung hervorgeht. Nach Satz 1 gilt für den Raum L^p mit $1 < p < 2$

$$\delta_p(\varepsilon) \geq (2^{p-1} - 1) \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q \ ,$$

wobei q der zu p konjugierte Exponent ist. Für den Raum L^p mit $2 < p < \infty$ gilt nach der Clarksonschen Ungleichung (2) $\delta_p(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$.

Wir werden die Ungleichung in (iii) verallgemeinern. Dazu definieren wir $\varphi(t) := \min(t, 1-t)$ für $0 \leq t \leq 1$ und setzen diese Funktion periodisch mit der Periode 1 fort. Es ist dann $\varphi(t)$ gleich dem Abstand des Punktes t von dem nächsten ganzzahligen Punkt (Sägezahnkurve).

Satz 3 *Sei X ein gleichmäßig konvexer Banach-Raum und $1 < p < \infty$. Ist $\|x\| \leq 1$ und $\|y\| \leq 1$, dann gilt für $0 \leq \lambda \leq 1$*

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p \leq \lambda\|x\|^p + (1-\lambda)\|y\|^p - 2\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^\nu}\right).$$

Beweis: Für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ ist die Ungleichung offensichtlich richtig und nach Satz 1 ebenso für $\lambda = 1/2$. Wir zeigen zunächst mittels vollständiger Induktion nach n, daß die Ungleichung für alle Zahlen λ der Form $k/2^n (k = 0, 1, \ldots, 2^n)$ richtig ist.

Dazu nehmen wir an, daß für eine natürliche Zahl n die Ungleichung für alle Zahlen $\lambda = k/2^n$ mit $k = 0, 1, \ldots, 2^n$ gilt, d.h., es sei

$$\left\|\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right\|^p \leq \frac{k}{2^n}\|x\|^p + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)\|y\|^p - 2\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi\left(2^\nu\frac{k}{2^n}\right)\delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^\nu}\right), \quad (5)$$

denn für $\nu \leq n$ ist $\varphi\left(2^\nu \frac{k}{2^n}\right) = 0$.

Es sei nun λ eine feste Zahl der Gestalt $\lambda = (2s+1)/2^{n+1}$, wobei s eine der Zahlen $0, 1, \ldots, 2^{n-1}$ ist. Unter Beachtung der Beziehungen

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{s}{2^n}x + \left(1 - \frac{s}{2^n}\right)y\right] + \left[\frac{s+1}{2^n}x + \left(1 - \frac{s+1}{2^n}\right)y\right]\right\}$$

und

$$\frac{x-y}{2^n} = \left[\frac{s+1}{2^n}x + \left(1 - \frac{s+1}{2^n}\right)y\right] + \left[\frac{s}{2^n}x + \left(1 - \frac{s}{2^n}\right)y\right]$$

erhalten wir nach Satz 1 (iii) unter Benutzung von (5) mit $k = s$ und $k = s+1$

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p &\leq \frac{\left\|\frac{s}{2^n}x + \left(1 - \frac{s}{2^n}\right)y\right\|^p + \left\|\frac{s+1}{2^n}x + \left(1 - \frac{s+1}{2^n}\right)y\right\|^p}{2} - \delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^n}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\frac{s}{2^n} + \frac{s+1}{2^n}\right]\|x\|^p + \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{s}{2^n}\right) + \left(1 - \frac{s+1}{2^n}\right)\right]\|y\|^p \\
&\quad - \sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\varphi\left(\frac{2^\nu s}{2^n}\right) + \varphi\left(2^\nu\frac{s+1}{2^\nu}\right)\right]\delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^\nu}\right) - \delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^n}\right).
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{1}{2}\left[\frac{s}{2^n} + \frac{s+1}{2^n}\right] = \lambda$$

und

$$\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{s}{2^n}\right) + \left(1 - \frac{s+1}{2^n}\right)\right] = 1 - \lambda\ .$$

Zum Nachweis der Beziehung

$$\varphi\left(2^\nu \frac{s}{2^n}\right) + \varphi\left(2^\nu \frac{s+1}{2^n}\right) = 2\varphi\left(2^\nu \frac{2s+1}{2^{n+1}}\right)$$

bemerken wir, daß die Zahlen $2^\nu \frac{s}{2^n} = \frac{s}{2^{n-\nu}}$ und $2^\nu \frac{s+1}{2^n} = \frac{s+1}{2^{n-\nu}}$ beide in einem Intervall der Form $\left[m, m+\frac{1}{2}\right]$ oder $\left[m+\frac{1}{2}, m+1\right]$ (mit einer ganzen Zahl m) liegen und daß die Funktion φ auf jedem dieser Intervalle linear ist. Beachten wir schließlich noch, daß

$$\varphi(2^n\lambda) = \varphi\left(2^n \frac{2s+1}{2^{n+1}}\right) = \varphi\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

und daß für $\nu > n$

$$\varphi(2^\nu\lambda) = \varphi\left(2^\nu \frac{2s+1}{2^{n+1}}\right) = 0$$

ist, so folgt, daß die zu beweisende Ungleichung auch für die Zahl $\lambda = (2s+1)/2^{n+1}$ richtig ist. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt somit die Ungleichung für alle Zahlen λ der Form $k/2^n$.

Um die Ungleichung für alle Zahlen $\lambda \in [0,1]$ zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß die Reihe

$$2\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^\nu}\right)$$

auf dem Intervall [0,1] gleichmäßig konvergiert. Nach Satz 1 (ii) und wegen $\varphi(t) \le \frac{1}{2}$ ist

$$2\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^\nu}\right) \le \delta_p(\|x-y\|)\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu p}} \,.$$

Die Reihe ist also nach dem Majorantenkriterium von Weierstraß gleichmäßig konvergent. Folglich sind beide Seiten der zu beweisenden Ungleichung stetig bzgl. λ. Da die Menge der Zahlen $\lambda = k/2^n$ dicht ist in [0,1] und für diese Zahlen die Ungleichung gilt, folgt durch Grenzübergang, daß die zu beweisende Ungleichung für alle Zahlen aus [0,1] richtig ist.

Bemerkung. Führen wir den ganzen Beweis im reellen Hilbert-Raum mit $p = 2$, so erhalten wir wegen $\delta_2(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^p$ unter Beachtung der Tatsache, daß bei allen Schritten stets das Gleichheitszeichen steht, die Beziehung

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - 2\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(2^\nu\lambda)\left(\frac{\|x-y\|}{2^{\nu+1}}\right)^2 .$$

Andererseits gilt im reellen Hilbert-Raum

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + (1-\lambda)^2\|y\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)(x,y)$$

und

$$\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 = \lambda(1-\lambda)\|x\|^2 + \lambda(1-\lambda)\|y\|^2 - 2\lambda(1-\lambda)(x,y).$$

Hieraus erhalten wir

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

Durch Vergleich folgt die für $0 \leq \lambda \leq 1$ gültige Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^{\nu\lambda})}{4^{\nu}} = 2\lambda(1-\lambda).$$

2 Das asymptotische Zentrum

Zum Beweis des bekannten Fixpunktsatzes für nichtexpansive Operatoren in uniform konvexen Banach-Räumen (vgl. Browder [2], Göhde [9], Kirk [10]) führte M. Edelstein [6] den Begriff des asymptotischen Zentrums einer beschränkten Folge (u_n) ein.
Er zeigte: Ist (u_n) eine beschränkte Folge in einem uniform konvexen Banach-Raum X, dann gibt es genau ein $z \in X$, so daß für alle $x \neq z$

$$\lim\sup \|z-u_n\| < \lim\sup \|x-u_n\| \tag{6}$$

gilt. Der eindeutig bestimmte Punkt z, für den (6) gilt, heißt asymptotisches Zentrum der Folge (u_n) und $r(z) = \lim\sup \|z-u_n\|$ der asymptotische Radius der Folge (u_n) (vgl. R. Schöneberg [16]). Das Funktional

$$r(x) = \limsup_{n\to\infty} \|x-u_n\|$$

nimmt also für $x = z$ sein Minimum an.

Satz 4 *Sei (u_n) eine beschränkte Folge in dem uniform konvexen Banach-Raum X und z das asymptotische Zentrum dieser Folge. Dann gilt für $1 < p < \infty$ und alle $x \neq z$*

$$\left(\frac{r(z)}{r(x)}\right)^p + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu}\delta_p\left(\frac{\|z-x\|}{2^{\nu}r(x)} - 0\right) \leq 1. \tag{7}$$

Beweis: Es sei $\lambda \in [0,1]$. Wegen

$$[\lambda x + (1-\lambda)z] - u_n = \lambda(x-u_n) + (1-\lambda)(z-u_n)$$

gilt nach Satz 3

$$\|\lambda x+(1-\lambda)z-u_n\|^p \leq \lambda\|x-u_n\|^p+(1-\lambda)\|z-u_n\|^p-2\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu m}\right)m^p,$$

wobei $m \geq \max(\|x-u_n\|,\|z-u_n\|)$ ist.
Zu $\varepsilon>0$ wählen wir n_o so groß, daß für $n \geq n_o$

$$\max(\|x-u_n\|,\|z-u_n\|) \leq r(x)+\varepsilon$$

ausfällt (man beachte $r(z) \leq r(x)$).
In der obigen Ungleichung nehmen wir $n \geq n_o$ und setzen $m = r(x)+\varepsilon$. Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$r^p(\lambda x+(1-\lambda)z) \leq \lambda r^p(x)+(1-\lambda)r^p(z)-2\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu[r(x)+\varepsilon]}\right)[r(x)+\varepsilon]^p.$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt

$$r^p(\lambda x+(1-\lambda)z) \leq \lambda r^p(x)+(1-\lambda)r^p(z)-2\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu r(x)}-0\right)r^p(x).$$

Berücksichtigen wir noch, daß $r(z) \leq r(\lambda x+(1-\lambda)z)$ ist, so erhalten wir nach Umformung

$$\lambda r^p(z) \leq \lambda r^p(x)-2\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu r(x)}-0\right)r^p(x).$$

Für $\lambda=\frac{1}{2^n}$ folgt unter Beachtung der Definition von $\varphi(.)$ und $r(x)>0$

$$\frac{1}{2^n}\frac{r^p(z)}{r^p(x)} \leq \frac{1}{2^n}-2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{2^\nu}{2^n}\delta_p\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu r(x)}-0\right) .$$

Multiplizieren wir mit 2^n und führen dann den Grenzübergang $n \to \infty$ durch, so erhalten wir die zu beweisende Ungleichung. ∎

Folgerung 1. Für beliebiges $p>1$ gilt

$$2\sum_{\nu=0}^{\infty}2^\nu\delta_p\left(\frac{1}{2^\nu}-0\right) \leq 1.$$

Betrachten wir nämlich eine konvergente Folge (u_n), dann ist der Grenzwert z zugleich das asymptotische Zentrum der Folge (u_n) und es ist $r(z)=0$. Für einen beliebigen Punkt $x \neq z$ gilt $\|u_n-x\| \leq \|u_n-z\|+\|z-x\|$, woraus zunächst $r(x) \leq \|z-x\|$ folgt. Andererseits ist $\|u_n-x\| \geq \|z-x\|-\|z-u_n\|$. Für $n \to \infty$ erhalten wir $r(x) \geq \|z-x\|$. Also ist

$r(x) = \|z - x\|$ und wir erhalten aus (7) die obige Ungleichung.

Bemerkung. Ist $g(t)$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $0 < g(t) \leq \delta_p(t)$ für $t > 0$, so gilt

$$\left(\frac{r(z)}{r(x)}\right)^p + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu r(x)}\right) \leq 1 \ .$$

Beispiele.

1. Im Hilbert-Raum nimmt für $p = 2$ die Ungleichung (7) wegen $\delta_2(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$ die Gestalt

$$\left(\frac{r(z)}{r(x)}\right)^2 + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \left(\frac{\|z-x\|}{2^{\nu+1} r(x)}\right)^2 \leq 1$$

an und ist äquivalent mit

$$r^2(z) + \|z-x\|^2 \leq r^2(x).$$

Diese Ungleichung wurde von Baillon [1] mittels der Parallelogrammungleichung und von Tingley [17] über das Skalarprodukt hergeleitet.

2. Im Raum L^p mit $1 < p < 2$ erhalten wir aus (7) unter Beachtung von

$$\delta_p(\varepsilon) \geq (2^{p-1} - 1)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

(vgl. Satz 1) und

$$2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu (2^{p-1} - 1)\frac{\|z-x\|^p}{2^{(\nu+1)q} r^q(x)} = \frac{2^{p-1}-1}{2^{p-1}}\left(\frac{\|z-x\|}{r(x)}\right)^q$$

die Ungleichung

$$\left(\frac{r(z)}{r(x)}\right)^p + \frac{2^{p-1}-1}{2^{p-1-1}}\left(\frac{\|z-x\|}{r(x)}\right)^q \geq 1 \ ,$$

wobei q der zu p konjugierte Exponent ist.

3. Im Raum L^p mit $2 \leq p < \infty$ ergibt sich aus (7) unter Beachtung von

$$\delta_p(\varepsilon) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

die Abschätzung

$$r^p(x) + \frac{\|z-x\|^p}{2^{p-1}-1} \leq r^p(x) \ .$$

3 Asymptotische Fixpunktsätze

Es sei C eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge des uniform konvexen Banach-Raumes X und $T : C \to C$ eine Lipschitz-stetige Abbildung. Mit $\|T\|$ bezeichnen wir die Lipschitz-Norm von T, d.h.

$$\|T\| = \sup\left(\frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|} : x \neq y\right).$$

Ist die Abbildung T nicht expansiv, d.h. gilt $\|T\| \leq 1$, dann hat T nach dem bekannten Fixpunktsatz von Browder / Göhde / Kirk einen Fixpunkt ([2], [9], [10], [8]).
In [7] zeigten Goebel und Kirk, daß es in jedem uniform konvexen Banach-Raum eine Konstante $L > 1$ mit folgender Eigenschaft gibt: Ist $\sup \|T^n\| < L$, dann hat T einen Fixpunkt in C. Im Raum L^p mit $p \geq 2$ ist ihre Konstante $L = (1 + 1/2^p)^{1/p}$. In einer Reihe von Arbeiten sind Erweiterungen der Konstanten vorgenommen worden, so daß die Fixpunktaussage erhalten bleibt. Für den Hilbert-Raum zeigten Lifschitz [13], Baillon [1], Tingley [17] u.a., daß T einen Fixpunkt besitzt, wenn $\lim\sup\|T^n\| < \sqrt{2}$ ist. Für die reellen Funktionenräume L^p mit $1 < p < \infty$ erweiterte Lim in [14] und [15] die Konstante.
Als Anwendung der Ungleichung für den asymptotischen Radius formulieren wir einen Fixpunktsatz, der die genannten Aussagen umfaßt.

Satz 5 *Es sei C eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene und konvexe Menge des uniform konvexen Banach-Raumes X und $T : C \to C$ eine Lipschitz-stetige Abbildung. Weiter sei p irgendeine Zahl > 1 und $g(t)$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $0 < g(t) \leq \delta_p(t)$. Genügt L der Gleichung*

$$\frac{1}{L^p} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{1}{2^\nu L}\right) = 1 \tag{8}$$

und gilt

$$K = \lim\sup\|T^n\| < L\ , \tag{9}$$

dann hat T einen Fixpunkt in C.

Beweis 1. Es sei u ein festes Element aus C und z das asymptotische Zentrum der beschränkten Folge $(T^n u)$. Wir setzen für $x \in C$

$$r(x) = \lim_{n\to\infty}\sup\|x - T^n u\|.$$

Ist $r(z) = 0$, so gilt $\lim T^n u = z$ und wegen der Stetigkeit von T folgt $Tz = z$. Im folgenden können wir $r(z) > 0$ annehmen. Nach Satz 4 gilt wegen $g(t) \leq \delta_p(t)$

$$\frac{r^p(z)}{r^p(x)} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{\|z - x\|}{2^\nu r(x)}\right) \leq 1. \tag{10}$$

Wegen

$$r(T^m z) = \limsup_{n\to\infty} \|T^m z - T^n u\| \le \|T^m\| \limsup_{n\to\infty} \|z - T^{n-m} u\| = \|T^m\| r(z)$$

und der Monotonie von g(.) erhalten wir aus (10) mit $x = T^m z$

$$\frac{1}{\|T^m\|^p} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{\|z - T^m z\|}{2^\nu \|T^m\|^p r(z)}\right) \le 1. \tag{11}$$

Für $x \in C$ definieren wir

$$d(x) := \limsup_{n\to\infty} \|x - T^n x\|.$$

Offensichtlich gilt $r(z) \le d(u)$.
Wir wählen nun eine solche Teilfolge (m_i), daß die folgenden Grenzwerte existieren:

$$\lim_{i\to\infty} \|z - T^{m_i} z\| = \limsup_{m\to\infty} \|z - T^m z\| = d(z)$$

und

$$\limsup_{i\to\infty} \|T^{m_i}\| = K_0.$$

Offensichtlich ist $K_0 \le K = \limsup \|T^n\|$.

Setzen wir in (11) $m = m_i$ und führen den Grenzübergang $i \to \infty$ durch, dann erhalten wir unter Beachtung der Stetigkeit und der Monotonie von g(.) sowie den Abschätzungen $r(z) \le d(u)$ und $K_0 \le K$ die Ungleichung

$$\frac{1}{K^p} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{d(z)}{2^\nu K d(u)}\right) \le 1. \tag{12}$$

Der Fall $r(z) > 0$ kann folglich nur für $K \ge 1$ eintreten. Wir betrachten jetzt die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{K^p} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{t}{2^\nu K}\right),\ 0 \le t \le 1.$$

Die Stetigkeit und die strenge Monotonie von g(.) überträgt sich auf f(.). Es ist

$$f(0) = \frac{1}{K^p} \le 1.$$

Unter Berücksichtigung der Voraussetzungen (8) und (9) ist $f(1) > 1$. Folglich gibt es genau ein $\alpha < 1$ mit $f(\alpha) = 1$. Aus (12) folgt

$(i)\quad d(z) \le \alpha d(u).$

Aus $\|z-u\| \leq \|z-T^n u\| + \|u-T^n u\|$ folgt für $n \to \infty$ weiter

$$(ii) \quad \|z-u\| \leq r(z) + d(u) \leq 2d(u).$$

2. Ausgehend von einem beliebigen Punkt $u_o \in C$ definieren wir eine Folge (u_m) induktiv, so daß u_{m+1} das asymptotische Zentrum der Iterationsfolge $(T^n u_m)$ ist. Ist für irgendein m

$$\limsup_{n\to\infty} \|u_{m+1} - T^n u_m\| = 0,$$

dann ist unter Beachtung der Stetigkeit von T der Punkt u_{m+1} ein Fixpunkt von T. Ist dies nicht der Fall, dann gilt nach (i) und (ii)

$$\|u_{m+1} - u_m\| \leq 2d(u_m) \leq 2\alpha^m d(u_0).$$

Also ist (u_m) eine Cauchy-Folge und somit konvergent gegen einen Punkt $y \in C$. Es ist

$$\begin{aligned}\|y - T^n y\| &\leq \|y-u_m\| + \|u_m - T^n u_m\| + \|T^n u_m - T^n y\| \\ &\leq (1+\|T^n\|)\|y-u_m\| + \|u_m - T^n u_m\|.\end{aligned}$$

Hieraus folgt $d(y) \leq (1+K)\|y-u_m\| + d(u_m) \to 0$ für $m \to \infty$. Dies ergibt schließlich $Ty = y$. Der Fixpunktsatz ist bewiesen.

Beispiele.

1. Im Hilbert-Raum erhalten wir mit $g(t) = \delta_2(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2$ für (8) die Beziehung

   $$\frac{1}{L^2} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \frac{1}{(2^{\nu+1}L)^2} = 1$$

   und daher $L^2 = 2$. Die Fixpunktbedingung (9) lautet damit

   $$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\| < \sqrt{2}$$

   (vgl. Lifschitz [13] und Baillon [1]).

2. Im Raum L^p mit $1 < p < 2$ erhalten wir mit

   $$g(t) = (2^{p-1} - 1)\left(\frac{t}{2}\right)^2 \leq \delta_p(t)$$

   (siehe Satz 1) für L die Beziehung

   $$\frac{1}{L^p} \;+\; 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu (2^{p-1}-1)\left(\frac{1}{2^{\nu+1}L}\right)^q = 1,$$

d. h.

$$\frac{1}{L^p} + \frac{2^{p-1}-1}{2^{p-1}-1}\frac{1}{L^p} = 1.$$

3. Im Raum L^p mit $p > 2$ bekommen wir unter Beachtung von $\delta_p(\varepsilon) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ als hinreichende Fixpunktbedingung

$$\limsup_{n\to\infty}\|T^n\| < L = \left(1 + \frac{1}{2^{p-1}-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Der nächste Fixpunktsatz bezieht sich auf asymptotisch reguläre Operatoren. Der Operator $T : C \to C$ heißt nach Browder und Petryshin [3] asymptotisch regulär in C, wenn $\lim\|T^n x - T^{n+1}x\| = 0$ für jedes $x \in C$. Eine Übersicht über Arbeiten, die asymptotisch reguläre Operatoren betreffen, findet man in Bruck [4]. Der folgende Fixpunktsatz ist eine Verallgemeinerung von [12].

Satz 6 *Es sei C eine nichtleere, beschränkte abgeschlossene und konvexe Teilmenge des uniform konvexen Banach-Raumes X und T ein asymptotisch regulärer Operator, der C in sich abbildet. Weiter sei p irgendeine Zahl > 1 und $g(t)$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $0 < g(t) \leq \delta_p(t)$. Genügt L der Gleichung (8) und gilt*

$$K = \liminf_{n\to\infty}\|T^n\| < L, \tag{13}$$

dann hat T einen Fixpunkt in C.

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich dem des vorigen Satzes.

1. Wir wählen eine solche Teilfolge (n_i) der natürlichen Zahlen, daß

$$K = \lim_{i\to\infty}\|T^{n_i}\|. \tag{14}$$

2. Es sei u ein festes Element aus C und $z = z(u)$ das asymptotische Zentrum der Folge $(T^{n_i}u)$. Wir setzen für $x \in C$

$$r(x) = \limsup_{i\to\infty}\|x - T^{n_i}u\|$$

und werden zeigen: Ist $r(z) = 0$, dann ist z ein Fixpunkt von T.
Aus $r(z) = 0$ folgt zunächst $T^{n_i}u \to z$ für $i \to \infty$.
Nach Voraussetzung existiert ein m, so daß T^m stetig (sogar Lipschitz-stetig) ist. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned}\|T^{n_i+m}u - z\| &\leq \|T^{n_i}u - z\| + \|T^{n_i+m}u - T^{n_i}u\| \\ &\leq \|T^{n_i}u - z\| + \sum_{j=0}^{m-1}\|T^{n_i+j+1}u - T^{n_i+j}u\|.\end{aligned}$$

Da T asymptotisch regulär ist, folgt $T^{n_i+m}u \to z$ für $i \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von T^m erhalten wir daher

$$T^m z = \lim_{i\to\infty} T^m(T^{n_i}u) = \lim_{i\to\infty} T^{m+n_i}u = z.$$

Durch Induktion nach s folgt $T^{ms}z = z$ für jede natürliche Zahl s und daher $T^{ms+1}z = Tz$. Somit ist $Tz - z = T^{ms+1}\,z - T^{ms}z$. Für $s \to \infty$ folgt wegen der asymptotischen Regularität $Tz = z$.

3. Im folgenden können wir $r(z) > 0$ annehmen. Nach Satz 4 gilt wegen $g(t) \leq \delta_p(t)$

$$\frac{r^p(z)}{r^p(x)} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu r(x)}\right) \leq 1. \tag{15}$$

Als nächstes zeigen wir, daß für jede natürliche Zahl s die Abschätzung

$$r(T^s z) \leq \|T^s\| r(z) \tag{16}$$

gilt. Für $n_i > s$ ist

$$\begin{aligned}\|T^s z - T^{n_i}u\| &\leq \|T^s z - T^{n_i+s}u\| + \|T^{n_i+s}u - T^{n_i}u\| \\ &\leq \|T^s\|\|z - T^{n_i}u\| + \sum_{j=0}^{s-1} \|T^{n_i+j+1}u - T^{n_i+j}u\|.\end{aligned}$$

Da T asymptotisch regulär ist, folgt für $i \to \infty$ nach Definition von $r(x)$ die Ungleichung (16).
Setzen wir in (15) $x = T^{n_i}z$, so erhalten wir unter Beachtung von (16) sowie der Monotonie von $g(t)$

$$\frac{1}{\|T^{n_i}\|^p} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{\|z - T^{n_i}z\|}{2^\nu \|T^{n_i}\| r(z)}\right) \leq 1. \tag{17}$$

Für $x \in C$ definieren wir

$$d(x) = \lim_{i\to\infty} \sup \|z - T^{n_i}z\|.$$

Offensichtlich ist $r(z) \leq d(u)$. Führen wir in (17) den Grenzübergang $i \to \infty$ durch, dann erhalten wir unter Beachtung von (14) sowie der Stetigkeit und Monotonie von g(.) die Abschätzung

$$\frac{1}{K^p} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{d(z)}{2^\nu K d(u)}\right) \leq 1.$$

Von hier ab verläuft der Beweis ebenso wie der des vorigen Satzes ab der Ungleichung (12).

∎

Literaturverzeichnis

[1] **Baillon, J. B.** : *Quelques aspects de la théorie des points fixes dans les espaces de Banach I.* Séminaire d' Analyse Fonctionelle de l' École Polytechnique, VII. 1978 - 1979

[2] **Browder, F. E.** : *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54**, 1041 - 1044 (1965)

[3] **Browder, F. E.** und **Petryshin, W. V.** : *The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 571 - 575 (1966)

[4] **Bruck, R. E.** : *Asymptotic behavior of nonexpansive mappings.* Contemp. Math. **18**, 1 - 47 (1983)

[5] **Clarkson, J. A.** : *Uniformly convex spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 396 - 414 (1936)

[6] **Edelstein, M.** : *Fixed point theorems in uniformly convex Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **44**, 369 - 374 (1974)

[7] **Goebel, K.** und **Kirk, W. A.** : *A fixed point theorem for transformations whose iterates have uniform Lipschitz constant.* Studia Math. **47**, 135 - 140 (1973)

[8] **Goebel, K.** und **Reich, S.** : *Uniform convexity, hyperbolic geometry and nonexpansive mappings.* New-York and Basel 1984

[9] **Göhde, D.** : *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildungen.* Math. Nachr. **30**, 251 - 258 (1965)

[10] **Kirk, W. A.** : *A fixed point theorem for mappings which do not increase distance.* Amer. Math. Monthly **72**, 1004 - 1006 (1965)

[11] **Köhte, G.** : *Topologische lineare Räume.* Berlin 1964

[12] **Krüppel, M.** : *Ein Fixpunktsatz für asymptotisch reguläre Operatoren in gleichmäßig konvexen Banach-Räumen.* Wiss. Zeitschr. PH Güstrow, Heft **1**, 241 - 246 (1987)

[13] **Lifschitz, E. A.** : *Fixed point theorems for operators in strongly convex spaces.* Voronez Gos. Univ. Trudy Mat. Fak. **16**, 23 - 28 (1975)

[14] **Lim, T. C.** : *Fixed point theorems for uniformly lipschitzian mappings in L^p spaces.* Nonlinear Anal. **7**, No 5, 555 - 563 (1983)

[15] **Lim, T. C. :** *Some L^p inequalities and their applications to fixed point theorems of uniformly Lipschitzian mappings.* Part. II. Proc. of Sympos. Pure Math. **45**, 119 - 125 (1986)

[16] **Schöneberg, R. :** *Fixpunktsätze für einige Klassen kontraktionsartiger Operatoren in Banachräumen über einen Fixpunktindex, eine Zentrumsmethode und die Fixpunkttheorie nichtexpansiver Abbildungen.* Diss. Aachen 1977

[17] **Tingley, D. :** *Noncontractive uniformly Lipschitzian semigroups in Hilbert space.* Proc. Amer. Math. Soc. **92**, No 3, 355 - 361 (1984)

eingegangen: 5. Juli, 1994

Verfasser:

Prof. Dr. M. Krüppel
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
18051 Rostock
Germany