Rostock. Math. Kolloq. **48**, 75–79 (1995)

Subject Classification (AMS)
40A05

Manfred Krüppel

Eine Ungleichung für Banach-Limites beschränkter Zahlenfolgen

Abstract. *Let be* $\mathrm{LIM}\, x_n$ *any Banach-limit for an arbitrary bounded sequence of real numbers. Then the inequality* $\mathrm{LIM}\, g(x_n) \geq g(\mathrm{LIM}\, x_n)$ *holds, where* $g(t)$ *is any convex function.*

Der Banach-Limes als verallgemeinerter Grenzwert beschränkter Zahlenfolgen wurde von S. Banach [1] eingeführt (vgl. auch [2], [3], [4] und [6]). Ein Banach-Limes ist ein auf dem Raum der beschränkten reellen Zahlenfolgen (x_n) definiertes lineares Funktional, das mit $\mathrm{LIM}\, x_n$ bezeichnet wird und die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $\mathrm{LIM}\, x_n \geq 0,$ falls $x_n \geq 0$ für alle n.
2. $\mathrm{LIM}\,(ax_n + by_n) = a\,\mathrm{LIM}\, x_n + b\,\mathrm{LIM}\, y_n$
3. $\mathrm{LIM}\, x_{n+1} = \mathrm{LIM}\, x_n$
4. $\mathrm{LIM}\, x_n = 1,$ falls $x_n = 1$ für alle n.

Aus diesen Eigenschaften folgt (vgl. etwa S. Banach [1])

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \mathrm{LIM}\, x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Für eine konvergente Folge (x_n) stimmt also ein Banach-Limes mit dem Grenzwert überein. Durch die vier Eigenschaften 1 bis 4 ist der Banach-Limes nicht für jede beschränkte Folge eindeutig bestimmt. Wie G. G. Lorentz [3] zeigte, ist für die Folge (x_n) genau dann jeder Banach-Limes gleich dem Wert s, wenn

$$\lim_{p\to\infty} \frac{x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}}{p} = s$$

gleichmäßig bzgl. n gilt. Ist insbesondere die Folge (x_n) periodisch, d.h. gilt $x_{n+p} = x_n (p > 1)$, dann ist stets

$$\mathrm{LIM}\, x_n = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i.$$

Als Folgerung aus den Eigenschaften 1 bis 4 ergibt sich die weitere Eigenschaft

$$5.\ \mathrm{LIM}\,(x_n y_n) = x_0\ \mathrm{LIM}\,y_n, \qquad \text{falls} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ ist.}$$

Zum Nachweis gehen wir von der Beziehung

$$|x_n y_n - x_0 y_0| \le |x_n - x_0|\,|y_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

aus. Wegen der Linearität eines Banach-Limes folgt

$$\mathrm{LIM}\,(x_n y_n) = \mathrm{LIM}\,(x_n y_n - x_0 y_n) + \mathrm{LIM}\,(x_0 y_n) = \mathrm{LIM}\,(x_0 y_n) = x_0\ \mathrm{LIM}\,y_n$$

Für einen beliebigen Banach-Limes beweisen wir die folgende Ungleichung.

SATZ. Ist $g(t)$ eine konvexe Funktion, dann gilt für jeden Banach-Limes

$$\mathrm{LIM}\,g(x_n) \ge g(\mathrm{LIM}\,x_n).$$

Beweis: Gegeben sei ein Banach-Limes $\mathrm{LIM}\,x_n$. Ist A irgendeine Teilmenge der natürlichen Zahlen und (x_n) die charakteristische Folge von A, d.h.

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \in A, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist durch $\mu(A) = \mathrm{LIM}\,x_n$ ein Maß auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ definiert, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} &1.\ \mu(A) && \ge 0, \\ &2.\ \mu(A \cup B) && = \mu(A) + \mu(B), \text{ falls } A \cap B = \emptyset, \\ &3.\ \mu(A+1) && = \mu(A), \text{ wobei } A+1 = \{n+1 : n \in A\}, \\ &4.\ \mu(\mathbb{N}) && = 1. \end{aligned}$$

1. Wir nehmen zunächst an, daß $g(t)$ streng monoton wachsend ist. Wir stellen nun für jede beschränkte Folge (x_n) unseren Banach-Limes $\mathrm{LIM}\,x_n$ ähnlich wie das Lebesguesche Integral dar. Für eine gegebene beschränkte Folge (x_n) sei $a < \inf x_n$ und $b > \sup x_n$ sowie $m > 1$ eine natürliche Zahl. Die Punkte $y_k = a + k(b-a)/m\ (k = 0, 1, \ldots, m)$ bilden eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Wir setzen

$$A_k = \{n : y_k \le x_n < y_{k+1}\},\ k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

und betrachten die m Folgen

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} y_k & \text{für } n \in A_k, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Auf Grund der Eigenschaften eines Banach-Limes ist

$$\mathrm{LIM} \sum_{k=0}^{m-1} x_n^{(k)} = \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{LIM}\, x_n^{(k)} = \sum_{k=0}^{m-1} y_k \mu(A_k).$$

Da die Mengen A_k paarweise disjunkt sind, gilt für jedes n

$$\sum_{k=0}^{m-1} x_n^{(k)} \leq x_n,$$

so daß

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_k \mu(A_k) \leq \mathrm{LIM}\, x_n$$

folgt. Ebenso kann man zeigen, daß

$$\mathrm{LIM}\, x_n \leq \sum_{k=0}^{m-1} y_{k+1} \mu(A_k)$$

gilt. Da die Mengen A_k paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung $\mathbb{N}$ ergibt, ist

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_{k+1} \mu(A_k) - \sum_{k=0}^{m-1} y_k \mu(A_k) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \mu(A_k) = \frac{1}{m}.$$

Es folgt analog der Lebesgueschen Integraldefinition (vgl. etwa [5], S. 124)

$$\mathrm{LIM}\, x_n = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \mu(A_k). \tag{1}$$

Um eine entsprechende Darstellung für den Banach-Limes $\mathrm{LIM}\, g(x_n)$ zu bekommen, zerlegen wir das Intervall $[g(a), g(b)]$ durch die Punkte $g(y_k)$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Da $g(t)$ streng monoton wachsend ist, gilt

$$A_k = \{n : g(y_k) \leq g(x_n) < g(y_{k+1})\}$$

für $k = 0, 1, \ldots, m-1$ und wir erhalten jetzt

$$\sum_{k=0}^{m-1} g(y_k) \mu(A_k) \leq \mathrm{LIM}\, g(x_n) \leq \sum_{k=0}^{m-1} g(y_{k+1}) \mu(A_k).$$

Da $y_{k+1} - y_k = 1/m$ und die Funktion $g(t)$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, strebt $\max |g(y_{k+1}) - g(y_k)|$ gegen 0 für $m \to \infty$ und folglich ist

$$\mathrm{LIM}\, g(x_n) = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m-1} g(y_k) \mu(A_k). \tag{2}$$

Da $\mu(A_k) \geq 0$ für $k = 0, 1, \dots, m-1$ und die Summe gleich 1 ist, gilt nach der Jensenschen Summationsungleichung für die konvexe Funktion $g(t)$ (vgl. [5], S. 344)

$$\sum_{k=0}^{m-1} g(y_k)\mu(A_k) \geq g\left(\sum_{k=0}^{m-1} y_k\mu(A_k)\right).$$

Hieraus folgt für $m \to \infty$ wegen (1) und (2) unter Beachtung der Stetigkeit von $g(t)$ die Behauptung des Satzes für streng monoton wachsende $g(t)$.

2. Ist $g(t)$ monoton wachsend, so ist $h(t) = g(t) + t$ streng monoton wachsend. Unter Beachtung der Linearität eines Banach Limes erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{LIM}\, g(x_n) &= \mathrm{LIM}\,(h(x_n) - x_n) \\ &= \mathrm{LIM}\, h(x_n) - \mathrm{LIM}\, x_n \\ &\geq h(\mathrm{LIM}\, x_n) - \mathrm{LIM}\, x_n = g(\mathrm{LIM}\, x_n). \end{aligned}$$

Ebenso beweist man den Satz für monoton fallende $g(t)$.

3. Schließlich sei $g(t)$ eine nichtmonotone konvexe Funktion und $g(t_0)$ das Minimum von $g(t)$. Wir setzen

$$g_1(t) = \begin{cases} g(t) & \text{für } t \leq t_0, \\ g(t_0) & \text{für } t > t_0 \end{cases}$$

und

$$g_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq t_0, \\ g(t) - g(t_0) & \text{für } t > t_0. \end{cases}$$

Dann ist $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, wobei $g_1(t)$ konvex und monoton fallend und $g_2(t)$ konvex und monoton wachsend ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{LIM}\, g(x_n) &= \mathrm{LIM}\,[g_1(x_n) + g_2(x_n)] = \mathrm{LIM}\, g_1(x_n) + \mathrm{LIM}\, g_2(x_n) \\ &\geq g_1(\mathrm{LIM}\, x_n) + g_2(\mathrm{LIM}\, x_n) = g(x_n). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Beispiel. Für die periodische Folge

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ 2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist $\operatorname{LIM} x_n = 1$ für jeden Banach-Limes. Wählen wir als konvexe Funktion $g(t) = t^2$, dann ist

$$g(x_n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 4 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und $\operatorname{LIM} g(x_n) = 2$. Es ist also $\operatorname{LIM} g(x_n) \geq g(\operatorname{LIM} x_n)$.

Literatur

[1] **Banach, S.** : *Théorie des operations lineares.* Warzawa 1932

[2] **Kantorowitsch, L. W.,** und **Akilow, G. P.** : *Funktionalanalysis in nomierten Räumen.* Berlin 1978

[3] **Lorentz, G. G.** : *A contribution to the theory of divergent sequences.* Acta Math. **80**, 167-190 (1948)

[4] **Mazur, S.** : *On the generalized limit of bounded sequences .* Colloq. Math. **2**, 173-175 (1951)

[5] **Natanson. I. P.** : *Theorie der Funktion einer reellen Veränderlichen.* Berlin 1969

[6] **Zeller, K.,** und **Beekmann, W.** : *Theorie der Limitierungsverfahren.* Heidelberg, New York 1970

eingegangen: 5. Juli 1994

Autor: Prof. Dr. M. Krüppel
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
18051 Rostock
Germany