Rostock. Math. Kolloq. **48**, 27–46 (1995)

Subject Classification (AMS)
03G20, 08A40

Dietlinde Lau

Die maximalen Klassen von $\cap_{a\in Q} Pol_k\{a\}$ für $Q \subseteq E_k$ (Ein Kriterium für endliche semi–primale Algebren mit nur trivialen Unteralgebren)

Im folgenden soll in Verallgemeinerung von [4] eine Beschreibung sämtlicher maximalen Klassen der Teilklasse

$$T_Q := \bigcap_{a\in Q} Pol_k\{a\}$$

von P_k für beliebiges Q mit $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$, $k \geq 2$, angegeben werden. Mit Hilfe dieser Klassen läßt sich dann leicht ein Vollständigkeitskriterium für T_Q formulieren, aus dem sich wiederum als leichte Folgerung eine notwendige und hinreichende Bedingung für endliche semi-primale Algebren mit nur trivialen Unteralgebren ergibt.
Ermittelt wurden die maximalen Klasssen von T_Q durch Anwendung der von I. G. Rosenberg in [13] entwickelten Methode zur Bestimmung der maximalen Klassen von P_k, wobei eine Reihe von Beweisdetails aus dieser Arbeit übernommen werden konnte.
Zwei Tage nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit stellte sich heraus, daß von Á. Szendrei analoge Ergebnisse erzielt und in [16] bereits publiziert worden waren. Da sich die Beweise zu den Sätzen jedoch in vielen Details unterscheiden, soll hier die Variante der Verfasserin trotzdem vorgestellt werden. Insbesondere soll gezeigt werden, daß für $|Q| \geq 2$ sämtliche maximalen Klassen von T_Q als Durchschnitte von T_Q mit gewissen maximalen Klassen von P_k oder $Pol_k\{a\}$ ($a \in Q$) dargestellt werden können. Vermutlich gilt Ähnliches für die maximalen Klassen von $T_{Q'} := \bigcap_{\varrho\in Q'} Pol_k\varrho$ mit gewissen $Q' \subseteq \mathcal{P}(E_k)$ und $|Q'| \geq 2$. In Vorbereitung auf solche weiterführenden Untersuchungen wurden deshalb in [7] die maximalen Klassen von $Pol_k E_l$ für $2 \leq l \leq k-1$ bestimmt und in [8] der Fall $k = 3$ für beliebiges $Q' \subseteq \mathcal{P}(E_3)$ vollständig behandelt.

1 Grundbegriffe und Bezeichnungen

Wir verwenden bis auf geringfügige Änderungen die in [10] und [6] angegebenen und erläuterten Begriffe und Bezeichnungen. Insbesondere seien

$$\begin{aligned}
&P_A^n := \{f^n | f^n : A^n \longrightarrow A\},\ P_A := \bigcup_{n\geq 1} P_A^n,\\
&E_k := \{0, 1, ..., k-1\}\ (k \geq 2),\\
&P_k := P_{E_k},\\
&R_k^h := \{\varrho | \varrho \subseteq E_k^h\} \text{ und } R_k := \bigcup_{h\geq 1} R_k^h.
\end{aligned}$$

Als Operationen über P_k seien das Umordnen von Variablen, das Identifizieren von Variablen, das Hinzufügen von fiktiven Variablen und das Einsetzen von Funktionen in Funktionen zugelassen. Bekanntlich lassen sich diese Operationen auch mit Hilfe der sogenannten Mal'cev-Operationen ζ, τ, Δ, ∇, $\star$ (siehe [10]) beschreiben. Die Menge der aus Funktionen einer Menge M ($\subseteq P_k$) in endlich vielen Schritten konstruierbaren Funktionen - **Superpositionen über** M genannt - wird mit $[M]$ bezeichnet. Ist $M = [M]$, so heißt M **abgeschlossene Menge** (**Klasse**) oder kurz **Klasse** von P_k. Eine Teilklasse von P_k, die sämtliche Projektionen $e_i^n : e_i^n(x_1, ..., x_n) := x_i$ ($n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$) enthält, nennt man **Klon** von P_k. Eine echte Teilklasse M von M' wird eine **maximale Klasse** von M' genannt, wenn keine Klasse M'' von P_k mit $M \subset M'' \subset M'$ existiert. Für beliebige Teilklassen M von P_k sei ferner

$$V_k^{\uparrow}(A) := \{B \mid A \subseteq B = [B] \subseteq P_k\}.$$

Die h-ären Relationen ϱ aus R_k^h werden von uns je nach Bedarf sowohl in der Form $\varrho = \{(a_0, ..., a_{h-1}), (b_0, ..., b_{h-1}), ...\}$ als auch in der Form von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & ... \\ a_1 & b_1 & ... \\ ... & ... & ... \\ a_{h-1} & b_{h-1} & ... \end{pmatrix}$$

angegeben und benutzt. An die Matrizendarstellung der Relation ϱ wird auch gedacht, wenn nachfolgend von Zeilen und Spalten der Relation ϱ die Rede ist. Zwecks Kennzeichnung der Stelligkeit h von ϱ schreiben wir anstelle von ϱ auch ϱ^h.

Bezeichne ε eine Äquivalenzrelation auf E_h, die auf E_h die Zerlegung $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup ... \cup \varepsilon_r$ bewirkt. Die Relation

$$\delta^h_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_r} := \{(a_0, ..., a_{h-1}) \in E_k^h \mid (i, j) \in \varepsilon \Longrightarrow a_i = a_j\}$$

heißt **diagonale Relation**. Die leere Menge sei per definitionem eine diagonale Relation. D_k bezeichne die Menge aller möglichen diagonalen Relationen über E_k und es sei $D_k^h := R_k^h \cap D_k$. Wir vereinbaren, falls die Stelligkeit einer diagonalen Relation durch einen Index angegeben ist, auf die Angabe der einelementigen Äquivalenzklassen zu verzichten. Weiter sei

$$\iota_k^h := \{(a_0, ..., a_{h-1}) \in E_k^h \mid \exists i, j \in E_h : i \neq j \wedge a_i = a_j\}.$$

Die Menge aller Funktionen aus P_k, die die Relation ϱ bewahren, bezeichnen wir wie üblich mit $Pol_k\varrho$ bzw. kurz mit $Pol\varrho$. Inv_kM, wobei $M \subseteq P_k$, bezeichne die Menge aller **Invarianten** von M, d.h. die Menge all der Relationen aus R_k, die von sämtlichen Funktionen aus M bewahrt werden.

Als Operationen über Relationen verwenden wir die zweistelligen Operationen $\circ$ (Relationenprodukt, Faltung), $\times$ (kartesisches Produkt), $\cap$ (Durchschnitt) und die einstelligen Operationen ζ, τ, Δ und $pr_{\alpha_1,...,\alpha_t}$ mit $\{\alpha_1, ..., \alpha_t\} \subseteq E_h$, die definiert sind durch

$$\zeta\varrho := \{(a_1, a_2, ..., a_{h-1}, a_0) \mid (a_0, a_1, ..., a_{h-1}) \in \varrho\},$$
$$\tau\varrho := \{(a_1, a_0, a_2, ..., a_{h-1}) \mid (a_0, a_1, ..., a_{h-1}) \in \varrho\},$$
$$\Delta\varrho := \{(a_1, ..., a_{h-1}) \mid (a_1, a_1, a_2, ..., a_{h-1}) \in \varrho\}$$

für $h \geq 2$ und

$$pr_{\alpha_1,...,\alpha_t}\varrho := \{(a_{\alpha_1}, ..., a_{\alpha_t}) \mid \exists a_j \ (j \in E_h \backslash \{\alpha_1, ..., \alpha_t\}) : (a_0, ..., a_{h-1}) \in \varrho\},$$

wobei $\varrho \in R_k^h$.

Nähere Ausführungen zu diesen Operationen entnehme man [10].

Wir sagen, eine Relation ϱ' ist aus der Relation ϱ **mit Hilfe von** Inv_kT_Q **ableitbar** (oder kurz ϱ' ist ϱ**-ableitbar**), wenn man sie unter Verwendung der oben definierten Relationenoperationen aus Relationen der Menge $\{\varrho\} \cup Inv_kT_Q$ erhalten kann. Wir schreiben in diesem Fall auch

$$\{\varrho\} \cup Inv_kT_Q \ \vdash \ \varrho'$$

oder kurz

$$\varrho \ \vdash \ \varrho'.$$

Das nachfolgende Lemma faßt einige bekannte bzw. leicht zu überprüfende Aussagen zusammen, die Grundlagen späterer Beweise bilden.

LEMMA 1.1.
Es gilt:

(a) $\forall \varrho, \varrho' \in R_k : (Pol\varrho \subseteq T_Q \ \wedge \ (\{\varrho\} \cup Inv_kT_Q \vdash \varrho') \Longrightarrow Pol\varrho \subseteq T_Q \cap Pol\varrho')$;

(b) $Inv_kP_k = D_k$ ([13], [10]);

(c) *Für jede Relation* ϱ *aus* Inv_kT_Q *existieren gewisse Relationen* $\varrho_1, ..., \varrho_r$ *aus* $\{\{a\} \mid a \in Q\} \cup D_k$ *und* $\varrho' \in D_k$ *mit* $\varrho = (\varrho_1 \times \varrho_2 \times ... \times \varrho_r) \cap \varrho'$. ■

Nachfolgend werden einige Relationenmengen definiert, die wir zur Beschreibung der maximalen Klassen von T_Q $(Q \subseteq E_k)$ benötigen:

$\mathcal{M}_k := \{\varrho \in R_k^2 \mid \varrho$ ist Halbordnungsrelation auf E_k mit genau einem kleinsten und einem größten Element $\}$

$$\mathcal{M}_{k;Q} := \begin{cases} \{\varrho \in \mathcal{M}_k \mid a \text{ ist größtes oder kleinstes Element von } E_k \text{ bez. } \varrho\ \}, \\ \qquad \text{falls } Q = \{a\}, \\ \{\varrho \in \mathcal{M}_k \mid a \text{ ist größtes (kleinstes) und } b \text{ ist kleinstes (größtes) Ele-} \\ \qquad \text{ment von } E_k \text{ bez. } \varrho\ \}, \text{ falls } Q = \{a\} \text{ und } a \neq b, \\ \emptyset \text{ sonst;} \end{cases}$$

$$\mathcal{U}_k := \{\varrho \in R_k^2 \mid \varrho \text{ ist nichttriviale Äquivalenzrelation auf } E_k\ \};$$

$$\mathcal{U}_{k;Q} := \begin{cases} \{\varrho \in \mathcal{U}_k \mid \forall x \in E_k\ \forall q \in Q:\ (x,q) \in \varrho \implies x = q\}, \\ \qquad \text{falls } |Q| \leq k-2, \\ \emptyset \text{ sonst;} \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_k := \{\ \{(x, s(x)) \mid x \in E_k\} \mid s \text{ ist eine Permutation auf } E_k \text{ ohne Fixpunkte, und alle Zyklen von } s \text{ haben ein und dieselbe Primzahllänge } \};$$

$$\mathcal{S}_{k;Q} := \begin{cases} \{\varrho \in \mathcal{S}_k | \forall x, y \in E_k : (x,y) \in \varrho\ \wedge x \in Q\ \implies y \in Q\}, \\ \qquad \text{falls } |Q| = s \cdot p, k = t \cdot p, p \text{ prim}, \\ \emptyset \text{ sonst;} \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_{k,Q} := \{\ \{(x, s(x)) \mid x \in E_k\} \mid s \text{ ist eine Permutation auf } E_k \text{ mit genau einem Fixpunkt } (\in Q), \text{ alle echten Zyklen von } s \text{ haben ein und dieselbe Primzahllänge und } s \text{ bewahrt } Q\ \};$$

$$\mathcal{L}_k := \begin{cases} \{\ \{(a,b,c,d) \in E_k^4 \mid a +_G b = c +_G d\} \mid (E_k; +_G) \text{ ist elementar abelsche } p\text{-Gruppe } \}, \\ \qquad \text{falls } k = p^m,\ p \text{ prim},\ m \geq 1, \\ \emptyset \text{ sonst;} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{k;Q} := \begin{cases} \{\ \{(a,b,c) \in E_k^3 \mid a +_G b = c\} \mid (E_k; +_G) \text{ ist elementar abelsche 2-Gruppe} \\ \qquad \text{mit dem neutralen Element } q\,\}, \\ \qquad \text{falls } k = 2^m,\ m \geq 1 \text{ und } Q = \{q\}, \\ \emptyset \text{ sonst.} \end{cases}$$

Eine h-äre Relation ϱ heißt **zentral**, wenn sie total symmetrisch, d.h., für jede Permutation s auf E_h gilt

$$(a_0, .., a_{h-1}) \in \varrho \implies (a_{s(0)}, ..., a_{s(h-1)}) \in \varrho,$$

total reflexiv, d.h.

$$\iota_k^h \subseteq \varrho\ ,$$

und von E_k^h verschieden ist und mindestens ein sogenanntes **zentrales Element** $c \in E_k$ mit

$$\{c\} \times E_k^h \subseteq \varrho$$

besitzt.
$\mathcal{C}_k^h$ bezeichne die Menge aller h-ären zentralen Relationen, $1 \leq h \leq k-1$. Weiter sei

$$\mathcal{C}_k := \bigcup_{h=1}^{k-1} \mathcal{C}_k^h,$$

$$\mathcal{C}_{k;Q} := (\mathcal{C}_k^1 \backslash \{\{q\} \mid q \in Q\}) \cup \bigcup_{h=2}^{k-1} \{\varrho \in \mathcal{C}_k^h \mid \forall q \in Q : q \text{ ist zentrales Element von } \varrho\}$$

(speziell gilt $\mathcal{C}_{k;E_k} = \mathcal{C}_k^1 \backslash \{\{q\} \mid q \in E_k\}$)
und

$$\mathcal{N}_{k;Q} := \begin{cases} \{\, (\varrho \backslash \iota_k^2) \cup \ \{(q,q)\} \mid \varrho \in \mathcal{C}_{k;Q}^2 \cup \{E_k^2\}\}, & \text{falls } Q = \{q\}, \\ \{\varrho \subseteq E_k^2 \mid \exists q \in Q : \{(x,q),(q,x) \mid x \in E_k\} \subseteq \varrho \ \wedge \tau\rho & \\ \qquad = \rho \ \wedge \ \varrho \cap \iota_k^2 = \{(q,q)\} \wedge \ \varrho \cap ((Q \backslash \{q\}) \times & \\ \qquad (E_k \backslash \{q\})) = \emptyset\} \ , & \text{falls } 2 \leq |Q|. \end{cases}$$

Offenbar gilt $\mathcal{N}_{k;Q} \subseteq \bigcup_{a \in Q} \mathcal{N}_{k;\{a\}}$.
Die Elemente $c \in Q$ mit $\{(x,c),(c,x) \mid x \in E_k \backslash \{c\}\} \subseteq \varrho$ $(\in \mathcal{N}_{k;Q})$ nennen wir **zentrale Elemente** von ϱ.
$\mathcal{B}_k$ bezeichne die Menge aller homomorphen Urbilder von h-adisch elementaren Relationen, $3 \leq h \leq k$ ([13]). Für das Verständnis der nachfolgenden Beweise genügt es zu wissen, daß die Relationen aus $\mathcal{B}_k$ total reflexiv und total symmetrisch sind, aber keine zentralen Elemente besitzen.
Betrachtet man anstelle von E_k eine beliebige andere endliche Menge A, so lassen sich über A (indem man in obigen Definitionen E_k durch A ersetzt) die Relationenmengen $\mathcal{M}_A$, $\mathcal{M}_{A;Q}$, $\mathcal{U}_A$, $\mathcal{U}_{A;Q}$, $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_{A;Q}$, $\mathcal{P}_{A;Q}$, $\mathcal{L}_A$, $\mathcal{L}_{A;Q}$, $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_{A;Q}$, $\mathcal{N}_{A;Q}$ und $\mathcal{B}_A$ für $Q \subseteq A$ definieren.
Als bekannt setzen wir den folgenden Satz voraus:

SATZ 1.2. ([13]) *Sei* $R_{max}(P_k) := \mathcal{S}_k \cup \mathcal{M}_k \cup \mathcal{U}_k \cup \mathcal{L}_k \cup \mathcal{C}_k \cup \mathcal{B}_k$. *Dann gilt*

(a) $\{Pol_k \varrho \mid \varrho \in R_{max}(P_k)\}$ *ist die Menge aller maximalen Klassen von* P_k.

(b) $\forall M \subseteq P_k : ([M] = P_k \iff \forall \varrho \in R_{max}(P_k) : M \not\subseteq Pol \varrho)$. ■

Im folgenden nicht weiter erläuterte Begriffe und Bezeichnungen entnehme man [10] oder [6].

2 Resultate

Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes.

SATZ 2.1.
Sei $R_{max}(T_Q) := \mathcal{M}_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{P}_{k;Q}$. *Dann ist*

$$\{T_Q \cap Pol_k \varrho \mid \varrho \in R_{max}(T_Q)\}$$

die Menge aller maximalen Klassen von T_Q *für* $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$.

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satz und der Tatsache, daß T_Q endlich erzeugbar ist (siehe 3.1), ist dann der

SATZ 2.2. (Vollständigkeitskriterium für T_Q)
Für eine beliebige Teilmenge M von T_Q gilt:

$$[M] = T_Q \iff \forall \varrho \in R_{max}(T_Q) : M \not\subseteq T_Q \cap Pol_k \varrho. \blacksquare$$

Ein Spezialfall dieses Satzes ist der

SATZ 2.3. (Vollständigkeitskriterium für die Klasse aller idempotenten Funktionen aus P_k)
Für eine beliebige Teilmenge M von T_{E_k} $(= \bigcup_{n\geq 1}\{f^n \in P_k \mid f(x,...,x) = x\})$ mit $k \geq 3$ gilt :

$$[M] = T_{E_k} \iff \forall \varrho \in \mathcal{C}^1_{k;E_k} \cup \mathcal{S}_{k;E_k} \cup \mathcal{P}_{k;E_k} \cup \mathcal{N}_{k;E_k} : M \not\subseteq T_{E_k} \cap Pol_k \varrho. \blacksquare$$

Der Satz 2.1 läßt sich auch in der Sprache der Allgemeinen Algebra formulieren:
Bekanntlich nennt man eine endliche Algebra $(A; F)$ $(F \subseteq P_A)$ **semi-primal**, wenn $[F] = Pol_A Inv^1_A F$ ist (vgl. [2], [1] oder [10], S. 143). Bezeichnet $Sub(\mathcal{A})$ die Menge aller Unteralgebren von $\mathcal{A}$, so ist $Inv^1_A F$ die Menge aller Trägermengen von Algebren aus $Sub(\mathcal{A})$. Falls $Sub(\mathcal{A})\backslash\{\mathcal{A}\}$ nur aus einelementigen Algebren besteht und $Q := \{a \mid (\{a\}; F) \in Sub(\mathcal{A})\}$ ist, so definiert jede von F bewahrte Relation ϱ aus $\mathcal{P}_{A;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q}$ einen nichttrivialen Automorphismus s $(s(a) = b \ :\iff \ (a, b) \in \varrho)$ der Algebra $\mathcal{A}$ und die Relationen aus $\mathcal{U}_{k;Q}$ sind spezielle nichttriviale Kongruenzen von $\mathcal{A}$. Eine Folgerung aus Satz 2.1 ist dann der

SATZ 2.4.
Bezeichne $\mathcal{A} = (A; F)$ eine endliche Algebra mit der Eigenschaft, daß $(Sub\mathcal{A})\backslash\{\mathcal{A}\}$ nur aus einelementigen Algebren besteht. Folgende Bedingungen sind dann äquivalent:

(a) *$(A; F)$ ist semi-primal mit $\{a \in A \mid (\{a\}; F) \in Sub\mathcal{A}\} = Q$;*

(b) *$\mathcal{A}$ hat keine echten Automorphismen, ist einfach (d.h., $\mathcal{A}$ besitzt nur triviale Kongruenzen) und die direkten Produkte $\mathcal{A}^h$ von $\mathcal{A}$ für $h = 2, 3, ..., |A| - 1$ besitzen keine Unteralgebren mit Trägermengen aus der Menge $\mathcal{M}_{A;Q} \cup \mathcal{L}_{A;Q} \cup \mathcal{N}_{A;Q} \cup \mathcal{C}_{A;Q}$.* $\blacksquare$

3 Einige Hilfsaussagen

LEMMA 3.1.
Für alle Q mit $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$ ist die Menge T_Q aus gewissen Funktionen aus T^3_Q erzeugbar.

Beweis: Für $k = 2$ gilt die Behauptung nach [9] (vgl. [5]). Sei nachfolgend $k \geq 3$. Dann gehören die weiter unten definierten Funktionen $\vee$, $\cdot$, w, $r_{a;b}$, falls $\{a,b\} \subset E_k$, $q_{a,b;c}$, falls $a \neq b$ oder $\{a,b\} \not\subseteq Q$ und $\{a,b,c\} \subseteq E_k$, zu T_Q:

$$x \vee y := max(x,y),\ x \cdot y := min(x,y) \text{ bez. der totalen Ordnung } 0 < 1 < 2 < \ldots < k-1;$$

$$w(x,y) := \begin{cases} x \text{ für } x = y \in Q, \\ 0 \text{ sonst;} \end{cases}$$

$$j_{a;b}(x) := \begin{cases} b \text{ für } x = a, \\ 0 \text{ sonst;} \end{cases}$$

$$r_{a;b}(x,y,z) := x \vee j_{a;b}(y) \cdot z;$$

$$q_{a,b;c}(x,y,z) := x \vee j_{a;c}(y) \cdot j_{b;c}(z).$$

Wir wollen zeigen, daß die oben angegebenen Funktionen aus T_Q ein Erzeugendensystem für T_Q bilden.
Eine Superposition über w ist die Funktion $w_n := \underbrace{w \star w \star \ldots \star w}_{n-1 \text{ mal}}$ mit

$$w_n(x_1,...,x_n) = \begin{cases} x \text{ für } x_1 = x_2 = ... = x_n = x \in Q\ , \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$(n \geq 1)$. Bezeichne nun f^n eine beliebige Funktion aus T_Q, die von w_n verschieden ist. Dann läßt sich f wie folgt darstellen:

$$f(x_1,...,x_n) = w_n(x_1,...,x_n) \vee \bigvee_{\substack{\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n) \\ \in E_k^n \setminus \{(q,q,...,q) \mid q \in Q\} \\ f(\boldsymbol{a}) \neq 0}} j_{a_1;f(\boldsymbol{a})}(x_1) \cdot ... \cdot j_{a_n;f(\boldsymbol{a})}(x_n).$$

Offenbar ist f damit eine Superposition über der Menge

$$B := \{w_n\} \cup \{x \vee j_{a_1;b}(x_1) \cdot ... \cdot j_{a_n;b}(x_n) \mid (a_1,...,a_n) \in E_k^n \setminus \{(q,q,...,q) \mid q \in Q\}\ \wedge\ b \in E_k\}.$$

$B \setminus \{w_n\}$ wiederum ist aus Funktionen des Typs $r_{a;b}$ und $q_{a,b;c}$ erzeugbar:

$$\begin{aligned} &r_{a_1,...,a_i,a_{i+1};b}(x,x_1,...,x_i,x_{i+1},y) := \\ &r_{a_1,...,a_i;b}(x,x_1,...,x_i,r_{a_{i+1};b}(x,x_{i+1},y)) = \\ &x \vee j_{a_1;b}(x_1) \cdot ... \cdot j_{a_n;b}(x_n) \cdot y \end{aligned}$$

$(i = 1,...,n)$,

$$\begin{aligned} &r_{a_1,...,a_n;b}(x,x_1,...,x_n,q_{a_i,a_j;b}(x,x_i,x_j)) = \\ &x \vee j_{a_1;b}(x_1) \cdot ... \cdot j_{a_n;b}(x_n). \end{aligned}$$

Also gilt $[T^3] = T$. $\square$

Eine Folgerung aus dem eben bewiesenen Lemma ist das

LEMMA 3.2.
Für jedes Q mit $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$ ist Verband der Teilklassen von T_Q dual atomar und T_Q besitzt nur endlich viele maximale Klassen. $\blacksquare$

Da man sich leicht überlegen kann, daß sämtliche maximalen Klassen von T_Q Klone sind, gilt außerdem nach bekannten Eigenschaften von Funktionenalgebren (vgl. [10]):

LEMMA 3.3.
Zu jeder maximale Klasse M von T_Q findet man eine höchstens k^3-äre Relation ϱ_M mit $M = Pol_k \varrho_M$. $\blacksquare$

LEMMA 3.4.
Sei $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$. Dann gilt:

(a) $\forall \varrho \in \mathcal{M}_k \cup \mathcal{U}_k \cup \mathcal{S}_k \cup \mathcal{L}_k \cup \mathcal{B}_k \cup (\mathcal{C}_k \backslash \{\{q\} \mid q \in Q\}) : T_Q \not\subseteq Pol_k \varrho$;

(b) $V_k^{\uparrow}(T_Q) = \{T_{Q'} \mid Q' \subseteq Q\}$ $(T_\emptyset := P_k)$;

(c) $\forall \varrho \in \bigcup_{a \in Q} (\mathcal{P}_{k;\{a\}} \cup \mathcal{N}_{k;\{a\}}) : T_Q \cap Pol_k \varrho \subset T_Q$.

Beweis: (a) und (c) prüft man leicht nach. (b) Es genügt, folgende Aussage für $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$ und $f \in P_k$ zu beweisen:

$$(a \in Q \ \wedge f(a,a,...,a) \neq a) \implies T_{Q \backslash \{a\}} \subseteq [T_Q \cup \{f\}].$$

Sei $f(a,a,...,a) \neq a$ für ein gewisses $a \in Q$, $Q \subseteq E_k$ und $f'(x) := f(x,x,...,x)$. Zwecks Nachweis von $T_{Q \backslash \{a\}} \subseteq [T_Q \cup \{f\}]$ sei $g^m \in T_{Q \backslash \{a\}}$ beliebig gewählt. Zu T_Q gehört dann die Funktion h_g^{m+1} mit

$$h_g(x_1,..,x_{m+1}) := \begin{cases} x, & \text{falls} \quad x_1 = ... = x_{m+1} = x \in Q, \\ u, & \text{falls} \quad x_1 = ... = x_m = u \in Q \backslash \{a\} \ \wedge \ x_{m+1} = f'(u), \\ g(x_1,...,x_m) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bildet man nun $h(x_1,...,x_m) := h_g(x_1,...,x_m, f'(x_1))$, so sieht man, daß $h = g$ und folglich $g \in [T_Q \cup \{f\}]$ ist. $\blacksquare$

LEMMA 3.5.
Zu jeder Relation $\gamma \in R := \mathcal{M}_k \cup \mathcal{U}_k \cup \mathcal{S}_k \cup \mathcal{L}_k \cup \mathcal{B}_k \cup (\mathcal{C}_k \backslash \{\{q\} \mid q \in Q\})$ existiert eine aus γ mit Hilfe von $Inv_k T_Q$ ableitbare Relation γ', die zu

$$\mathcal{M}_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q} \cup \bigcup_{q \in Q} (\mathcal{P}_{k;\{q\}} \cup \mathcal{N}_{k;\{q\}})$$

gehört.
Beweis: Es genügt,

$$\gamma \in R \backslash (\mathcal{M}_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q}) \tag{1}$$

zu betrachten. Außerdem sei γ h-är, wobei $h \geq 2$ wegen (1).
Wir bilden zunächst die $(h-1)$-äre Relation

$$\gamma_a := pr_{1,2,\ldots,h-1}(\Delta(\{a\} \times \gamma)) \tag{2}$$

für $a \in Q$. Ist $h = 2$ (also $\gamma \in (\mathcal{C}_k^2 \backslash \mathcal{C}_{k;Q}^2) \cup (\mathcal{M}_k \backslash \mathcal{M}_{k;Q}) \cup (\mathcal{U}_k \backslash \mathcal{U}_{k;Q}) \cup (\mathcal{S}_k \backslash \mathcal{S}_{k;Q})$), so haben wir

$$\gamma_a = \{x \in E_k \mid (a, x) \in \gamma\}. \tag{3}$$

Man prüft nun leicht nach, daß in diesem Fall wegen (1) die Relation γ_a für gewisses $a \in Q$ zu $\mathcal{C}_{k;Q}^1 = \{E \subset E_k \mid |E| \geq 2 \vee \exists b \in E_k \backslash Q : E = \{b\}\}$ gehört. Falls $\gamma \in \mathcal{M}_k \backslash \mathcal{M}_{k;Q}$ wähle man dazu a als ein vom größten und vom kleinsten Element von E_k bez. γ verschiedenes Element aus Q. Für $\gamma \in \mathcal{U}_k \backslash \mathcal{U}_{k;Q}$ sei $a \in Q$ aus einer Äquivalenzklasse von γ mit mindestens zwei Elementen. Gehört γ zu $\mathcal{S}_k \backslash \mathcal{S}_{k;Q}$, so existiert ein $a \in Q$ und ein $b \in E_k \backslash Q$ mit $(a, b) \in \gamma$, womit $\gamma_a = \{b\} \in \mathcal{C}_{k;Q}^1$. Falls $\gamma \in \mathcal{C}_k^2 \backslash \mathcal{C}_{k;Q}^2$, gibt es ein $a \in Q$, das kein zentrales Element von γ ist. Folglich haben wir auch in diesem Fall $\gamma_a \in \mathcal{C}_{k;Q}^1$.
Sei nun $h \geq 3$ und $\gamma \notin \mathcal{L}_k$, d.h. $\gamma \in \mathcal{C}_k^h \cup \mathcal{B}_k^h$. Wählt man dann in (2) $a \in Q$ als ein nicht-zentrales Element von γ (falls $\gamma \in \mathcal{C}_k$) bzw. beliebig aus Q, so erhält man durch (2) eine $(h-1)$-äre reflexive, total symmetrische Relation mit den gleichen zentralen Elementen wie γ und dem neuen zentralen Element a. Da a als nicht-zentrales Element der Relation ϱ gewählt wurde, existieren gewisse $d_1, ..., d_{h-1} \in E_k$ mit $(a, d_1, ..., d_{h-1}) \notin \gamma$ und damit $(d_1, ..., d_{h-1}) \notin \gamma_a$. Folglich ist $\gamma_a \neq E_k^{h-1}$ und γ_a eine zentrale Relation. Wiederholte Anwendung dieser Konstruktion liefert eine γ-ableitbare Relation aus $\mathcal{C}_{k;Q}$.

Es bleibt noch $\gamma \in \mathcal{L}_k$ ($k = p^m$, p prim, $m \geq 1$) zu untersuchen. In diesem Fall existiert eine elementar abelsche p-Gruppe $(E_k; +)$ mit $\gamma = \{(x, y, u, v) \in E_k^4 \mid x + y = u + v\}$. O.B.d.A. können wir nach [12] annehmen, daß das neutrale Element o der p-Gruppe $(E_k; +)$ zu Q gehört. Für $p \neq 2$ betrachten wir jetzt die γ-ableitbare Relation

$$\gamma' := pr_{3,4}(\delta_{\{0,1,2\}}^5 \cap (\{o\} \times \gamma)) = \{(x, y) \in E_k^2 \mid x + y = o\}.$$

Offenbar gehört γ' zu $\mathcal{P}_{k;\{o\}}$, da $x + x = o$ im Fall $p \neq 2$ nur für $x = o$ gilt.
Ist $p = 2$, so kann man aus $\{\gamma\} \cup Inv_k T_Q$ die Relation

$$\gamma'' := pr_{1,2,3}(\Delta(\{o\} \times \gamma)) = \{(x, y, z) \in E_k^3 \mid x + y = z\}$$

ableiten, womit $\gamma'' \in \mathcal{L}_{k;\{o\}}$ im Fall $\{o\} = Q$. Falls $|Q| \geq 2$ gilt, gibt es ein $a \in Q \backslash \{o\}$ und die γ-ableitbare Relation

$$\gamma''' := pr_{0,1}((\gamma'' \times \{a\}) \cap \delta_{\{2,3\}}^4) = \{(x, a - x) \mid x \in E_k\}$$

gehört zu $\mathcal{S}_k$. Außerdem haben wir entweder $\gamma''' \in \mathcal{S}_{k;Q}$ oder (wie oben gezeigt wurde) es ist aus γ''' eine Relation aus $\mathcal{C}^1_{k;Q}$ ableitbar. ■

LEMMA 3.6.
Sei $|Q| \geq 2$ und $\gamma \in \bigcup_{a\in Q} \mathcal{P}_{k;\{a\}} \cup \mathcal{N}_{k;\{a\}}$. Mit Hilfe von $Inv_k T_Q$ läßt sich dann aus γ eine Relation aus $\mathcal{P}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{C}^1_{k;Q}$ ableiten.

Beweis: Sei zunächst $\gamma \in (\bigcup_{a\in Q} \mathcal{P}_{k;\{a\}}) \backslash \mathcal{P}_{k;Q}$. Dann gibt es $(b,c) \in \gamma$ mit $b \in Q$ und $c \in E_k \backslash Q$. Die γ-ableitbare Relation

$$\gamma_b := pr_1(\Delta(\{b\} \times \gamma)) = \{x \in E_k \mid (b,x) \in \gamma\} \tag{4}$$

gehört (wegen $\gamma_b = \{c\}$) zu $\mathcal{C}_{k;Q}$.
Abschließend sei $\gamma \in (\bigcup_{a\in Q} \mathcal{N}_{k;\{a\}}) \backslash \mathcal{N}_{k;Q}$, d.h., γ hat folgende Eigenschaften:

- $\exists q \in Q : \iota^2_k \cap \gamma = \{(q,q)\} \;\wedge\; \{(x,q),(q,x) \mid x \in E_k\} \subseteq \gamma$;
- γ ist symmetrisch und
- $\exists b \in Q \setminus \{q\}\; \exists c \in E_k \backslash \{b,q\} :\; (b,c) \in \gamma$.

Bildet man nun die γ-ableitbare Relation γ_b (siehe (4)), so gilt $\{q,c\} \subseteq \gamma_b$ und $b \notin \gamma_b$, womit γ_b zu $\mathcal{C}^1_{k;Q}$ gehört. ■

LEMMA 3.7.
Sei $\varrho \in R^t_k$, $A = Pol_k\varrho$, A maximal in T_Q und $V^{\uparrow}_k(A)\backslash\{A\} = V^{\uparrow}_k(T_Q)$. Dann gilt $|Q| = 1$ und es existiert ein

$$\gamma \in \mathcal{P}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q}$$

mit $A \subseteq Pol_k\gamma$.

Beweis: Wegen Lemma 3.4 folgt aus unseren Voraussetzungen über ϱ:

(I) Falls $|Q| \geq 2$, so existiert keine Relation $\gamma \in (R_{max}(P_k)\backslash\{\{q\} \mid q \in Q\}) \cup \bigcup_{a\in Q} R_{max}(T_{\{a\}})$, die aus ϱ mit Hilfe von $Inv_k T_Q$ ableitbar ist (vgl. 1.2 und 2.1).

Speziell ergibt sich aus (I): $t \geq 2$.

O.B.d.A. können wir außerdem folgende 3 Eigenschaften von ϱ annehmen:

(II) ϱ enthält keine doppelten Zeilen.

(III) Jede aus ϱ ableitbare $(t-1)$-äre Relation gehört zu $Inv_k T_Q$ (siehe 1.1(c)).

(IV) Es existiert keine ϱ-ableitbare t-äre Relation ϱ' mit der Eigenschaft $Pol_k\varrho' \subset T_Q$ und $|\varrho'| < |\varrho|$.

Aus den Annahmen (II) - (IV) ergeben sich einige weitere Eigenschaften von ϱ:

(V) ϱ besitzt keine konstanten Zeilen. (Angenommen, ϱ hat eine konstante Zeile aus dem Element a. Wegen (I) ist $a \in Q$ und es gilt $\varrho = pr_{0,\dots,i-1}\varrho \times \{a\} \times pr_{i+1,\dots,t-1}\varrho$ für gewisses $i \in E_t$. Mit Hilfe von (III) und 1.1(c) sieht man dann, daß ϱ eine Invariante von T_Q ist, was unseren Voraussetzungen über ϱ widerspricht.)

Eine unmittelbare Folgerung aus (V) und (III) ist:

(VI) $\forall i \in E_t : \; pr_{0,\dots,i-1,i+1,\dots,t-1}\varrho = E_k^{t-1}$.

Als Nächstes wollen wir uns

(VII) $(t \geq 3 \vee |Q| = 1) \implies \varrho \cap \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}} \in \{\{(q,q,\dots,q)\} \mid q \in Q\}$;
$(t = 2) \implies \varrho \cap \delta^t_{\{0,1\}} \in \{\emptyset, \{(q,q)\} \mid q \in Q\}$

überlegen. Nach (III) gilt

$$\varrho \cap \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}} \in \{\emptyset, \{(q,q,\dots,q)\}, \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}} \mid q \in Q\}.$$

$\varrho \cap \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}} = \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}}$ entfällt, da $A = Pol_k\varrho \subset T_Q$ und T_Q höchstens eine Konstante enthält.
Falls $Q = \{a\}$ und $\varrho \cap \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}} = \emptyset$, folgt aus $pr_{0,\dots,t-2}\varrho = E_k^{t-1}$ (siehe (VI)) die Beziehung $pr_t((\{a\} \times \varrho) \cap \delta^{t+1}_{\{0,\dots,t-1\}} \in \mathcal{C}^1_{k;\{a\}}$, im Widerspruch zu (I).
Im Fall $t \geq 3$ ergibt sich aus $\varrho \cap \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}} = \emptyset$, daß $pr_{t-2,t-1}(\varrho \cap \delta^t_{\{0,\dots,t-2\}}) \notin Inv_kT_Q$ ist, was (III) widerspricht. Also gilt (VII).

Bekanntlich (siehe [13], [10] oder [4]) ist aus ϱ für $t = 2$ die Relation

$$\sigma_i(\varrho) := \{(a_1,\dots,a_i) \in E_k^i \mid \exists u \in E_k : \{(a_1,u),\dots,(a_i,u)\} \subseteq \varrho\}$$

ableitbar und es gilt:

(VIII) $(t = 2 \wedge \varrho \circ (\tau\varrho) = E_k^2) \implies \forall i \geq 2 : \sigma_i(\varrho) = E_k^i$.

Folgende drei Fälle sind für ϱ möglich:
Fall 1: t = 2.
Wir untersuchen die ϱ-ableitbare Relation $\varrho \cap (\tau\varrho)$.
Fall 1.1: $\varrho \cap (\tau\varrho) \in \{\emptyset, \{(q,q)\}\}$ für ein gewisses $q \in Q$.
ϱ ist in diesem Fall antisymmetrisch. Bildet man $\varrho \circ (\tau\varrho)$, so haben wir wegen (VI) $\iota_k^2 \subseteq \varrho \circ (\tau\varrho)$.
Fall 1.1.1: $\varrho \circ (\tau\varrho) = \iota_k^2$.
Wegen $pr_0\varrho = pr_1\varrho = E_k$ (siehe (VI)) gilt $|\varrho| \geq k$. Falls $|\varrho| > k$ ist, existieren $a, b, c \in E_k$ mit

$(a,c),(b,c) \in \varrho$ und $a \neq b$, woraus sich $(a,b) \in \varrho \circ (\tau\varrho)$ ergibt, was wegen $\varrho \circ (\tau\varrho) = \iota_k^2$ nicht möglich sein kann. Also gilt $|\varrho| = k$, und ϱ ist von der Gestalt $\{(x,s(x)) \mid x \in E_k\}$, wobei s eine von der Identität verschiedene Permutation auf E_k bezeichnet, die höchstens einen Fixpunkt (nämlich q) besitzt. Angenommen, s hat echte Zyklen unterschiedlicher Länge. Sei r (≥ 2) die Länge eines kleinsten solchen Zyklus. Dann gilt

$$pr_0((\underbrace{\varrho \circ \varrho \circ \ldots \circ \varrho}_{r \text{ mal}}) \cap \iota_k^2) \in \mathcal{C}_{k;Q}^1$$

im Widerspruch zu (I). Also haben alle echten Zyklen von s ein und dieselbe Länge l. Angenommen, es ist $l = p \cdot m$, p prim und $m \geq 2$. Dann hat $\underbrace{\varrho \circ \varrho \circ \ldots \circ \varrho}_{m \text{ mal}}$ echte Zyklen der Länge p, d.h., aus ϱ ist eine Relation aus $\mathcal{S}_k \cup \mathcal{P}_{k;\{q\}}$ ableitbar, was der Bedingung (I) für $|Q| \geq 2$ oder $\varrho \in \mathcal{S}_k$ widerspricht. Also ist im Fall 1.1.1 $Q = \{q\}$ und $A \subseteq Pol_k\gamma$ für ein gewisses $\gamma \in \mathcal{P}_{k;\{q\}}$.

Fall 1.1.2: $\iota_k^2 \subset \varrho \circ (\tau\varrho) \subset E_k^2$.

$\varrho' = \varrho \circ (\tau\varrho)$ ist in diesem Fall keine Invariante von T_Q und $Pol_k\varrho' \not\subseteq T_Q$, was wegen $V_k^{\uparrow}(A)\backslash\{A\} = V_k^{\uparrow}(T_Q)$ nicht sein kann.

Fall 1.1.3: $\varrho \circ (\tau\varrho) = E_k^2$.

Nach (VIII) gilt dann $\sigma_k(\varrho) = E_k^k$. Folglich existiert ein $u \in E_k$ mit $(x,u) \in \varrho$ für alle $x \in E_k$. Wegen $\varrho \cap \iota_k^2 \in \{\emptyset, \{(q,q)\}\}$ $(q \in Q)$ geht dies nur für $\varrho \cap \iota_k^2 = \{(q,q)\}$ und $u = q$.

Ist $(\tau\varrho)\circ\varrho = E_k^2$, so können wir analog wie eben für ϱ auch $\{(x,q) \mid x \in E_k\} \subseteq \tau\varrho$ nachweisen und erhalten mit dem oben Gezeigten einen Widerspruch zur Antisymmetrie von ϱ. Also ist $\iota_k^2 \subseteq (\tau\varrho)\circ\varrho \subset E_k^2$. Folglich läßt sich der Fall 1.1.3 auf die Fälle 1.1.1 und 1.1.2 zurückführen.

Fall 1.2: $\{(q,q)\} \subset \varrho \cap (\tau\varrho) \subset \varrho$.

Man prüft leicht nach, daß dieser Fall wegen der Voraussetzung (III) über ϱ auszuschließen ist.

Fall 1.3: $\varrho \cap (\tau\varrho) = \varrho$.

ϱ ist in diesem Fall symmetrisch. Außerdem haben wir $\iota_k^2 \subseteq \varrho \circ \varrho$. Wir unterscheiden 3 Fälle:

Fall 1.3.1: $\varrho \circ \varrho = \iota_k^2$.

Dann ist ϱ eine Permutation mit höchstens einem Fixpunkt q (falls $\varrho \cap \iota_k^2 = \{(q,q)\}$), und jeder echte Zyklus von ϱ hat wegen der Symmetrie von ϱ die Länge 2, d.h., $\varrho \in \mathcal{S}_k \cup \mathcal{P}_{k;\{q\}}$. Wie im Fall 1.1.1 erhalten wir folglich auch im Fall 1.3.1 entweder einen Widerspruch zu (I) oder es ist $|Q| = 1$ und $A \subseteq Pol_k\gamma$ für ein $\gamma \in \mathcal{P}_{k;Q}$.

Fall 1.3.2: $\iota_k^2 \subset \varrho \circ \varrho \subset E_k^2$.

Dieser Fall kann wie der Fall 1.1.2 ausgeschlossen werden.

Fall 1.3.3: $\varrho \circ \varrho = E_k^2$.

Da $\varrho \circ \varrho = \varrho \circ (\tau\varrho) = E_k^2$ ist, gilt nach (VIII) $\sigma_k(\varrho) = E_k^k$, d.h., es existiert ein $u \in E_k$ mit $\{(x,u) \mid x \in E_k\} \subseteq \varrho$. Folglich haben wir $\varrho \cap \iota_k^2 = \{(q,q)\}$ und $u = q$. Hieraus und aus der Symmetrie von ϱ folgt, daß q zentrales Element von ϱ ist und damit ϱ zu $\mathcal{N}_{k;\{q\}}$ gehört. Wegen (I) geht dies nur für $|Q| = 1$.

Fall 1 ist somit vollständig abgehandelt.
Fall 2: $t = 3$.
Wegen $pr_{0,1}\varrho = E_k^2$ (nach (VI)), $\varrho \cap \delta^3_{\{0,1,2\}} = \{(q,q,q)\}$ für gewisses $q \in Q$ (siehe (VII)) und (III) gilt $\Delta\varrho = E_k \times \{q\}$, d.h. $(a,a,q) \in \varrho$ für alle $a \in E_k$. Analog überlegt man sich, daß (a,q,a) und (q,a,a) für beliebiges $a \in E_k$ zu ϱ gehören. Wir können außerdem annehmen, daß ϱ total symmetrisch ist. Wäre nämlich ϱ nicht total symmetrisch, so wäre die aus ϱ ableitbare Relation

$$\varrho' := \bigcap_{\substack{s \\ s \text{ Permutation auf } E_3}} \{(a_{s(0)}, a_{s(1)}, a_{s(2)}) \mid (a_0,a_1,a_2) \in \varrho\}$$

total symmetrisch und wegen

$$\begin{pmatrix} a & a & q \\ a & q & a \\ q & a & a \end{pmatrix} \subseteq \varrho' \subset \varrho \ (a \neq q)$$

auch keine Invariante von T_Q, im Widerspruch zu (IV).

Als Nächstes beweisen wir die Aussage

(IX) $\forall a,b \in E_k : \{(a,b,c),(a,b,c')\} \subseteq \varrho \implies c = c'$.

Angenommen, es existieren a,b,c,c' mit $\{(a,b,c),(a,b,c')\} \subseteq \varrho$ und $c \neq c'$. Für die ϱ-ableitbare Relation

$$\varrho_1 := pr_{0,2,5}((\varrho \times \varrho) \cap \delta^6_{\{0,3\},\{1,4\}}) = \{(x,y,z) \mid \exists u \in E_k : \{(x,u,y),(x,u,z)\} \subseteq \varrho\}$$

gilt dann $Pol_k\varrho_1 \not\subseteq T_Q$ wegen $\delta^3_{\{0,1,2\}} \subseteq \varrho_1$. Folglich ist ϱ_1 eine diagonale Relation. Man prüft leicht nach, daß auch $(a,c,c') \in \varrho_1$ und $(d,q,q) \in \varrho_1$ für alle $d \in E_k$ gilt. Also kann ϱ_1 nur die diagonale Relation E_k^3 sein. Für unsere Relation ϱ bedeutet dies, daß zu beliebigen (x,y,z) aus E_k^3 stets ein u mit $(x,u,y) \in \varrho$ und $(x,u,z) \in \varrho$ existiert. Speziell für $x = y = q$ und $z \neq q$ erhalten wir hieraus und unter Berücksichtigung der totalen Symmetrie von ϱ, daß ein $r \neq q$ mit $(q,q,r) \in \varrho$ existiert. Oben wurde aber $\Delta\varrho = E_k \times \{q\}$ bewiesen. Also war unsere Annahme $c \neq c'$ falsch, und damit ist (IX) gültig.
Wir betrachten nun die ϱ-ableitbare Relation

$$\varrho_2 := \varrho \circ \varrho = \{(a,b,c,d) \mid \exists u \in E_k : \{(a,b,u),(u,c,d)\} \subseteq \varrho\}.$$

Wegen $\{(a,a,q),(q,a,a) \mid a \in E_k\} \subseteq \varrho$ ist $\delta^4_{\{0,1,2,3\}} \subseteq \varrho_2$ und folglich $Pol_k\varrho_2 \not\subseteq T_Q$. Offensichtlich hat ϱ_2 keine doppelten Zeilen. Nach unseren Voraussetzungen über ϱ ist dies nur für $\varrho_2 = E_k^4$ möglich, und nach Definition von ϱ_2 wäre dann aber $\{(a,b,u),(u,c,a)\} \subseteq \varrho$ für

beliebig wählbare a, b, c aus E_k und ein gewisses u. Da ϱ aber total symmetrisch ist, ergibt dies $\{(a,u,b),(a,u,c)\} \subseteq \varrho$, wobei $b \neq c$ möglich ist, im Widerspruch zu (IX).
Der Fall 2 ist also für ϱ auszuschließen.
Fall 3: $t \geq 4$.
Wegen $pr_{0,1,\ldots,t-2}\varrho = E_k^{t-1}$ (siehe (VI)), (II), (III) und (VII) ist $\varrho \cap \delta^t_{\{0,\ldots,h-3\}} = \delta^{t-1}_{\{0,\ldots,h-3\}} \times \{q\}$ für ein gewisses $q \in Q$. Da auch $pr_{0,\ldots,h-3,h-1}\varrho = E_k^{t-1}$ ist, erhält man analog $\varrho \cap \delta^t_{\{0,\ldots,h-3\}} = \delta^{t-2}_{\{0,..,h-3\}} \times \{q\} \times E_k$, im Widerspruch zum eben Gezeigten. Also gibt es keine t-äre Relation ϱ mit den oben geforderten Eigenschaften und $t \geq 4$. ■

Durch

$$\varrho \sim \varrho' \ :\Longleftrightarrow\ T_Q \cap Pol_k\varrho = T_Q \cap Pol_k\varrho'$$

wird eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge $\mathcal{A}$ von Relationen aus R_k definiert. Wählt man nun aus jeder Äquivalenzklasse von $\sim$ einen Repräsentanten, so erhält man eine gewisse Teilmenge von $\mathcal{A}$, die wir mit $\mathcal{A}^\sim$ (nachfolgend $\mathcal{A} \in \{\mathcal{P}_{k;Q}, \mathcal{M}_{k;Q}, \mathcal{S}_{k;Q}\}$) bezeichnen wollen.

LEMMA 3.8. *Sei $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$. Dann gilt:*

(a) $\forall \varrho, \varrho \in \mathcal{M}_{||;Q} : \varrho \sim \varrho' \iff (\varrho' = \tau\varrho \ \vee\ \varrho = \varrho')$;

(b) $\forall \varrho, \varrho' \in \mathcal{P}_{k;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q} : \varrho \sim \varrho' \iff (\exists t : \varrho' = \underbrace{\varrho \circ \varrho \circ \ldots \circ \varrho}_{t \text{ mal}})$;

(c) $\forall \varrho, \varrho' \in \mathcal{M}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{S}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{P}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q} : \varrho \sim \varrho' \iff \varrho \neq \varrho'$.

Beweis Die Aussagen (a) und (b) sind direkte Folgerungen aus den Beweisen entsprechender Aussagen über Relationen aus $\mathcal{M}_k \cup \mathcal{S}_k$, die man in [12] oder auch in [6] findet. Wir haben also nur (c) zu beweisen. Dazu sei vereinbart, das kleinste Element von E_k bez. einer Relation ϱ aus $\mathcal{M}_{k;Q}$ mit o_ϱ und das größte Element von E_k bez. ϱ mit e_ϱ zu bezeichnen. Wegen (a) können wir o.B.d.A. auch stets $o_\varrho \in Q$ annehmen. Nachfolgend bezeichnen nun ϱ und ϱ' zwei verschiedene Relationen aus $\mathcal{M}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{S}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{P}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q}$. Wir wollen

$$T_Q \cap Pol_k\varrho \not\subseteq T_Q \cap Pol_k\varrho' \tag{5}$$

nachweisen und behandeln dazu mögliche Fälle:
Fall 1: $\{\varrho, \varrho'\} \subseteq \mathcal{C}^1_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{P}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{S}^\sim_{k;Q}$.
Falls $|Q| \geq k-1$, so gilt $\mathcal{U}_{k;Q} = \mathcal{P}_{k;Q} = \mathcal{S}_{k;Q} = \emptyset$ und (5) ist offenbar für ϱ , ϱ' erfüllt. Sei nun $|Q| \leq k-2$. Wir bezeichnen die Relation $\{(q,q) \mid q \in Q\} \cup (E_k \backslash Q)^2$ aus $\mathcal{U}_{k;Q}$ mit ω. Man prüft leicht nach, daß die Menge

$$A(\gamma) := \bigcup_{n \geq 1} \{f^n \in P_{E_k \backslash Q} \mid \exists f' \in T_Q \cap Pol_k\gamma : (\forall \mathbf{a} \in (\mathbf{E_k} \backslash \mathbf{Q})^\mathbf{n} : \mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}))\}$$

für $\gamma \in (\mathcal{C}^1_{k;Q} \backslash \{\gamma \mid \gamma \subseteq Q \vee \gamma = E_k \backslash Q\}) \cup (\mathcal{U}_{k;Q} \backslash \{\omega\}) \cup \mathcal{P}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{S}^\sim_{k;Q}$ eine maximale Klasse von $P_{E_k \backslash Q}$ bildet und $A(\gamma) = P_{E_k \backslash Q}$ für $\gamma \in \{\gamma \in \mathcal{C}^1_k \mid \gamma \subseteq Q \vee \gamma = E_k \backslash Q\} \cup \{\omega\}$ ist. Mit Hilfe von [12], [13] und [14] folgt hieraus unsere Behauptung (5) für $\varrho' \in \{\gamma \in \mathcal{C}_k^1 \mid \gamma \subseteq Q \vee \gamma = E_k \backslash Q\} \cup \{\omega\}$. Man prüft weiter leicht nach, daß für $\varrho' \in \{\gamma \in \mathcal{C}_k^1 \mid \gamma \subseteq Q \vee \gamma = E_k \backslash Q\} \cup \{\omega\}$ zu $T_Q \cap Pol_k \varrho$ eine $|\varrho'|$-stellige Funktion f_1 mit $f_1(\varrho') \notin \varrho'$ gehört. Folglich gilt (5) auch für die restlichen im Fall 1 betrachteten ϱ'.

Fall 2: $\varrho \in \mathcal{C}_{k;Q}^1$ und $\varrho' \in \mathcal{M}_{k;Q}^{\sim} \cup (\mathcal{C}_{k;Q} \backslash \mathcal{C}_{k;Q}^1) \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q}$.

Zu $T_Q \cap Pol_k \varrho$ gehört folgende $|\varrho'|$-stellige Funktion f_2 mit den Eigenschaften

$$f_2(\varrho') \notin \varrho', f_2(q, ..., q) = q \text{ für alle } q \in Q$$

und

$$f_2(\boldsymbol{a}) = c \text{ für die restlichen Tupel } \boldsymbol{a}, \text{ wobei } c \in \varrho \text{ ist.}$$

Also gilt (5).

Fall 3: $\varrho \in \mathcal{M}_{k;Q}^{\sim} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{P}_{k;Q}^{\sim} \cup \mathcal{S}_{k;Q}^{\sim}$ und $\varrho' \in (\mathcal{C}_{k;Q} \backslash \mathcal{C}_{k;Q}^1) \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q}$.

Sei ϱ' eine h'-äre Relation sowie $q \in Q$ und $a \in E_k \backslash Q$. Falls $\varrho' \in \mathcal{N}_{k;Q}$ sei außerdem $q \in Q$ so gewählt, daß $(q, q) \in \varrho'$. Dann gehören die h'-Tupel $(q, a, a, \ldots, a)$, $(a, q, a, \ldots, a)$, $\ldots$, $(a, a, \ldots, a, q)$ sämtlich zu ϱ', jedoch nicht alle zu ϱ. Folglich findet man in $T_Q \cap Pol_k \varrho$ eine h'-stellige Funktion f_3 mit

$$f_3 \begin{pmatrix} q & a & a & \ldots & a \\ a & q & a & \ldots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a & a & \ldots & q \end{pmatrix} \notin \varrho' \quad ,$$

womit (5) auch im Fall 3 richtig ist.

Fall 4: $\varrho \in \mathcal{P}_{k;Q}^{\sim} \cup \mathcal{S}_{k;Q}^{\sim}$ und $\varrho' \in \mathcal{M}_{k;Q}^{\sim}$.

Dieser Fall kann nur für $|Q| \leq 2$ auftreten. Außerdem ist $\mathcal{S}_{k;Q}^{\sim} = \emptyset$, falls $|Q| = 1$ oder $k = 3$. Man prüft nun leicht nach, daß $(T_Q \cap Pol_k \varrho) \nsubseteq (T_Q \cap Pol_k \varrho')^1$ für $k \geq 3$ gilt.

Fall 5: $\varrho \in \mathcal{U}_{k;Q}$ und $\varrho' \in \mathcal{M}_{k;Q}^{\sim}$.

Für $o_{\varrho'} \in Q$ gehört die zweistellige Funktion f_4 mit

$$f_4(x, y) := \begin{cases} y \text{ für } x = o_{\varrho'}, \\ o_{\varrho'} \text{ sonst} \end{cases}$$

zu $T_Q \cap Pol_k \varrho$, jedoch bewahrt sie nicht ϱ' mit dem kleinsten Element $o_{\varrho'}$, da

$$(f_4(o_{\varrho'}, e_{\varrho'}), f(\alpha, e_{\varrho'})) = (e_{\varrho'}, o_{\varrho'}) \text{ für } \alpha \in E_k \backslash \{o_{\varrho'}, e_{\varrho'}\} \; .$$

Fall 6: $\varrho \in \mathcal{M}_{k;Q}^{\sim}$ und $\varrho' \in \mathcal{C}_{k;Q}^1$.

Sei $a \in E_k \backslash \varrho'$ und

$$t_a(x, y) := \begin{cases} x \text{ für } x = y \in Q, \\ a \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion $t_a \in T_Q$ bewahrt ϱ, jedoch nicht ϱ'. Also gilt (5).

Fall 7: $\varrho \in \mathcal{M}^{\sim}_{k;Q}$ und $\varrho' \in \mathcal{M}^{\sim}_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{P}^{\sim}_{k;Q} \cup \mathcal{S}^{\sim}_{k;Q}$.

Seien $\varrho' = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}$, $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} \subset E_k^{|\varrho'|}$ und f_5 eine $|\varrho'|$-stellige Funktion mit

$$f_5(\varrho') := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{cases} \notin \varrho' & \text{für } \; \varrho' \not\subseteq \varrho, \\ \in \varrho \backslash \varrho' & \text{für } \; \varrho' \subset \varrho \end{cases}$$

und, falls $\mathbf{r} <_\varrho \mathbf{s}$ und damit $\alpha <_\varrho \beta$,

$$f_5(\boldsymbol{a}) := \begin{cases} o_\varrho & \text{für } \quad \boldsymbol{a} = (o_\varrho, o_\varrho, ..., o_\varrho), \\ \alpha & \text{für } \quad \boldsymbol{o_\varrho} <_\varrho \boldsymbol{a} <_\varrho \boldsymbol{s}, \\ \beta & \text{für } \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{s}, \\ e_\varrho & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$f_5(\mathbf{a}) := \begin{cases} o_\varrho & \text{für } \quad \boldsymbol{a} <_\varrho \boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{a} <_\varrho \boldsymbol{s}, \\ \alpha & \text{für } \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}, \\ \beta & \text{für } \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{s}, \\ e_\varrho & \text{sonst} \; , \end{cases}$$

falls $\mathbf{s}$ und $\mathbf{r}$ bez. ϱ unvergleichbar sind. Man prüft leicht nach, daß f_5 zu $T_Q \cap Pol_k\varrho$, aber nicht zu $T_Q \cap Pol_k\varrho'$ gehört.

Fall 8: $\varrho \in (\mathcal{C}_{k;Q} \backslash \mathcal{C}^1_{k;Q}) \cup \mathcal{N}_{k;Q}$ und $\varrho' \in \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{M}^{\sim}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q} \cup \mathcal{P}^{\sim}_{k;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q}$.

Bezeichne c ein zentrales Element von ϱ. In $T_Q \cap Pol_k\varrho$ findet man dann eine $|\varrho'|$-stellige Funktion f_6 mit

$$f_6(\varrho') \begin{cases} \notin \varrho' & \text{für } \; \varrho' \not\subseteq \varrho, \\ \in \varrho \backslash \varrho' & \text{für } \; \varrho' \subset \varrho \end{cases}$$

und $f_6(q, q, ..., q) = q$ für alle $q \in Q$ sowie $f_6(\boldsymbol{a}) = c$ für die restlichen Tupel $\boldsymbol{a} \in E_k^{|\varrho'|}$, die nicht zu $T_Q \cap Pol_k\varrho'$ gehört. Also gilt (5).

Fall 9: $\varrho \in \mathcal{L}_{k;Q}$.

Dann ist $|Q| = 1$ und $k = 2^m, m \geq 1$. O.B.d.A. sei $Q = \{0\}$. Die zur Beschreibung von ϱ benötigte elementar abelsche 2-Gruppe mit dem neutralen Element 0 sei mit G bezeichnet. Dem Beweis von Lemma 3.5 ist zu entnehmen, daß ϱ aus einer Relation $\{0\} \times \lambda$, wobei $\lambda \in \mathcal{L}_{2^m}$, ableitbar ist. Da außerdem $\varrho \circ \varrho = \lambda$ ist, gilt $T_{\{0\}} \cap Pol_k\lambda = Pol_k\varrho$. Nach [13] ist damit eine n-stellige Funktion f aus $Pol_k\varrho$ eine quasilineare Funktion der Form

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} \cdot x_i^{2^j},$$

wobei $+(= +_G)$ und $\cdot$ die Operationen eines Körpers $(E_{2^m}; +, \cdot)$ mit $G = (E_{2^m}; +)$ sind und $a_{1,0}, ..., a_{n,m-1} \in E_{2^m}$.

Fall 9.1.: $\varrho' \in \mathcal{C}^1_{k;Q}$.

Seien $a \notin \varrho'$ und $b \in \varrho'$. Dann bewahrt die quasilineare einstellige Funktion f_7 mit $f_7(x) := (a \cdot b^{-1}) \cdot x$ nicht ϱ' wegen $f_7(b) = a$, d.h., es gilt (5).

Fall 9.2.: $\varrho' \in \mathcal{P}^{\sim}_{k;Q}$.

Bezeichne 1 das Einselement der multiplikativen Gruppe des Körpers $(E_{2^m}; +, \cdot)$. Da die Ordnung dieser Gruppe ungerade ist, gilt für alle $a \in E_{2^m}\backslash\{0,1\}$ stets $a^2 \neq 1$. Die einstellige Funktion f_8 mit $f_8(x) := x^2$ ist aus $Pol_k\varrho$, aber sie bewahrt nicht ϱ', da es (nach Definition von ϱ') ein $a \in E_k\backslash\{1\}$ mit $(1, a) \in \varrho'$ und $(f_8(1), f_8(a)) = (1, a^2) \notin \varrho'$ wegen $a^2 \neq a$ und dem oben Bemerkten gibt.

Fall 9.3.: $\varrho' \in \mathcal{U}_{k;Q}$.

Die 2-stellige Funktion f_9 mit $f_9(x, y) := x + y$ aus $Pol_k\varrho$ bewahrt nicht die Relation ϱ'. Es gilt nämlich für $(a, b) \in \varrho'$ und $a \neq b$:

$$f_9\begin{pmatrix} a & a \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a+b \end{pmatrix} \notin \varrho',$$

da für $a \neq b$ stets $a + b \neq 0$ ist.

Fall 9.4.: $\varrho' \in \mathcal{M}^{\sim}_{k;Q}$.

Die oben definierte Funktion f_9 bewahrt in diesem Fall ebenfalls nicht die Relation ϱ', denn es gilt

$$f_9\begin{pmatrix} 0 & a \\ e_{\varrho'} & e_{\varrho'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \notin \varrho'$$

für $a \in E_k\backslash\{0\}$.

Fall 9.5.: $\varrho' \in \mathcal{L}_{k;Q}$.

Für beliebiges $\lambda \in \mathcal{L}_{2^2,0}$ ist $\{(0, x, x), (x, 0, x), (x, x, 0) \mid x \in E_k\} \subseteq \lambda$. Wegen $\varrho \neq \varrho'$ gibt es gewisse a und b aus E_k mit $(a, b, a +_G b) \in \varrho$ und $(a, b, a +_G b) \notin \varrho'$. Folglich bewahrt die dreistellige Funktion f_{10} mit $f_{10}(x, y, z) := x +_G y +_G z$ aus $Pol_k\varrho$ nicht die Relation ϱ', da

$$f_{10}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & a & b \\ a & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a +_G b \end{pmatrix}$$

ist.

Fall 9.6.: $\varrho' \in (\mathcal{C}_{k;Q}\backslash\mathcal{C}^1_{k;Q}) \cup \mathcal{N}_{k;Q}$.

Sei ϱ' eine h'−äre Relation und $(a_1, \ldots, a_{h'}) \notin \varrho'$. Dann bewahrt die h'-stellige Funktion f_{11} mit

$$f_{11}(x_1, \ldots, x_{h'}) := a_1 \cdot x_1 +_G a_2 \cdot x_2 +_G \cdots +_G a_{h'} \cdot x_{h'}$$

nicht die Relation ϱ', da, falls 1 das Einselement des Körpers $(E_k; +_G, \cdot)$ bezeichnet,

$$f_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_{h'} \end{pmatrix}$$

gilt und 0 ein zentrales Element von ϱ' ist. Also gilt (5) auch im Fall 9.6.
Weil außerdem aus $T_Q \cap Pol_k\varrho \not\subseteq T_Q \cap Pol_k\varrho'$ offensichtlich $\varrho \neq \varrho'$ folgt, ist (c) bewiesen. ∎

4 Beweis von Satz 2.1

Sei $R_{max}(T_Q) := \mathcal{M}_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q} \cup \mathcal{P}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q}$ und bezeichne A eine beliebige maximale Klasse von T_Q mit $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$. Durch vollständige Induktion über $r := |Q|$ wollen wir

$$\exists \varrho \in R_{max}(T_Q) : A \subseteq T_Q \cap Pol_k\varrho \tag{6}$$

beweisen.
$\mathbf{r = 1}$: Im Fall $V_k^{\uparrow}(A)\backslash\{A\} = V_k^{\uparrow}(T_Q)$ folgt (6) aus 3.7. Ist $V_k^{\uparrow}(A)\backslash\{A\} \neq V_k^{\uparrow}(T_Q)$, so existiert wegen 3.4(b) eine von $Pol_k\varrho$ verschiedene maximale Klasse B_1 von P_k mit $A = T_Q \cap B_1$. Nach 1.2 gehört dann eine Relation $\gamma \in \mathcal{M}_k \cup \mathcal{U}_k \cup \mathcal{S}_k \cup \mathcal{L}_k \cup \mathcal{B}_k \cup \mathcal{C}_k\backslash\{Q\}$ zu Inv_kA und (6) ergibt sich aus 3.5.
$\mathbf{r - 1 \longrightarrow r}$: Angenommen, (6) ist für alle $Q' \subseteq E_k$ mit $1 \leq |Q'| \leq r-1$ richtig, und es sei Q $(\subseteq E_k)$ r-elementig. Wegen $r = |Q| \geq 2$ und 3.7 haben wir $V_k^{\uparrow}(A)\backslash\{A\} \neq V_k^{\uparrow}(T_Q)$. Folglich existiert eine Teilklasse B von P_k mit

$$A = B \cap T_Q \text{ und } B \not\subseteq T_Q. \tag{7}$$

Zwei Fälle sind dann für B möglich:

Fall 1: $\forall a \in Q : B \not\subseteq Pol_k\{a\}$.
Da $A \neq P_k$, existiert wegen 1.2 ein $\gamma \in R_{max}(P_k)\backslash\{\{a\} \mid a \in Q\}$ mit $B \subseteq Pol_k\gamma$. Hieraus und aus (7) sowie 3.4(a) ergibt sich dann $A = B \cap T_Q \subseteq T_Q \cap Pol_k\gamma \subset T_Q$. Weil $\gamma \in Inv_kA$, folgt hieraus nach 3.5 und 3.6 die Aussage (6).
Fall 2: $\exists Q' \subset Q : B \subseteq T_{Q'} \wedge (\forall b \in Q\backslash Q' : B \not\subseteq Pol_k\{b\})$.
Wegen $B \notin V_k^{\uparrow}(T_Q)$ haben wir $B \subset T_{Q'}$, womit eine gewisse maximale Klasse B_2 von $T_{Q'}$ mit $B \subseteq B_2$ existiert (siehe 3.2). Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein $\varrho \in R_{max}(T_{Q'})$ mit $B_2 \subseteq T_{Q'} \cap Pol_k\varrho$. $T_{Q'} \cap Pol_k\varrho$ ist nach 3.4(a),(c) von $T_{Q'}$ verschieden, womit $B_2 = T_{Q'} \cap Pol_k\varrho$ gilt. Außerdem haben wir (man beachte dabei $\forall b \in Q\backslash Q' : B \not\subseteq Pol_k\{b\}$) : $\varrho \in \mathcal{M}_k \cup \mathcal{S}_k \cup \mathcal{U}_k \cup (\mathcal{C}_k\backslash\{\{q\} \mid q \in Q\}) \cup \bigcup_{a \in Q'}(\mathcal{P}_{k;\{a\}} \cup \mathcal{N}_{k;\{a\}})$. Mittels 3.5 und 3.6 folgt hieraus (6). Also

ist (6) richtig. Da man sich ferner leicht überlegen kann, daß $T_Q \cap Pol_k \varrho \neq T_Q$ für jedes $\varrho \in R_{max}(T_Q)$ gilt, folgt der Satz 2.1 aus (6) und 3.7. ■

Literatur

[1] **Denecke, K.** : *Preprimal Algebras.* Berlin 1982

[2] **Foster, A.L.** und **Pixley, A.F.** : *Semi-categorical algebras I, semi-primal algebras.* Math. Z. **85**, 147 - 169 (1964)

[3] **Forster, A.L.** und **Pixley, A.F.** : *Semi-categoral algebras II, semi-primal algebras.* Math. Z. **85**, 169 - 184 (1964)

[4] **Lau, D.** : *Die maximalen Klassen von $Pol_k(0)$.* Rostock. Math. Kolloq. **19**, 29 - 47 (1982)

[5] **Lau, D.** : *On closed subsets of Boolean functions (A new proof for Post's Theorem).* J. Inform. Process. Cybernet. EIK **27**, 3, 167 - 178 (1991)

[6] **Lau, D.** : *Ein neuer Beweis für Rosenberg's Vollständigkeitskriterium.* J. Inform. Process. Cybernet. EIK **28**, 4, 149 - 195 (1992)

[7] **Lau, D.** : *Die maximalen Klassen von $Pol_k E_l$ für $2 \leq l \leq k-1$.* Universität Rostock, Preprint 1992

[8] **Lau, D.** : *Die maximalen Klassen von $\bigcap_{\rho \in Q} Pol_3 \rho$ für $Q \subseteq \mathfrak{P}(\{0,1,2\})$, Teil I und II.* Preprints, Universität Rostock 1995

[9] **Post, E.L.** : *The two-valued interative systems of mathematical logic.* In: Ann. Math. Studies **5**, Princeton Univ. Press. 1941

[10] **Pöschel, R.** und **Kalužnin, L.A.** : *Funktionen- und Relationenalgebren.* Berlin 1979

[11] **Quackenbush, R.W.** : *A new proof of Rosenberg's primal algebra characterizations theorem.* In: Csakany, S. and other (eds.): *Finite Algebra and Multiple-valued Logic.* Colloq. Math. Soc. János Bolyai **28**, pp. 603 - 634. Amsterdam 1981

[12] **Rosenberg, I.G.** : *Über die Verschiedenheit maximaler Klassen in P_k.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **14** , 431 - 483 (1969)

[13] **Rosenberg, I.G.** : *Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken.* Rozpravy Československé Akad. Věd. Řada Mat. Přirod. Věd **80** , 3 - 93 (1970)

[14] **Rosenberg, I.G. :** *The number of maximal closed classes in the set of functions over a finite domain.* J. Combin. Theory, Ser. A, **14** , 1 - 7 (1973)

[15] **Rosenberg, I.G. :** *Completeness, closed classes and relations in Multiple-valued Logics.* In: Proc. Internat. Sympos. on multiple-valued logics. Morgantown 1974

[16] **Szendrei, A. :** *A classification of strictly simple algebras with trivial subalgebras.* Demonstr. Math. **24**, 149 - 173 (1991)

[17] **Werner, H. :** *Discriminator algebras: algebraic representation and model theoretic properties.* Studien zur Algebra und ihre Anwendungen **6**, Berlin 1978

eingegangen: 21. Februar 1994

Autorin: Dr. D. Lau
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
18051 Rostock
Germany