Rostock. Math. Kolloq. **50**, 65–70 (1997)

Subject Classification (AMS)
41A10, 41A29, 49K30, 65K10

Markus Kappert

Eine Gradaussage für Posinome bester Approximation

ABSTRACT. In this paper we consider the least-squares approximation by posinoms. We prove a statement about the degree of the best-approximation posinom in a special case. The proof is based on the Kuhn-Tucker-Theorem.

KEY WORDS. least - squares approximation, posinoms, degree

1 Einleitung

In verschiedenen Arbeiten haben sich L. Berg [1], [2], [3], [4] und B. Thielcke [8] mit der Interpolation einer Menge

$$S_n := \{(t_i, f_i) | i = 0, \dots, n\} \text{ mit } 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \; (n \in \mathbb{N}_0)$$

durch Posinome [7], d.h. durch Polynome mit nichtnegativen Koeffizienten beschäftigt. Es liegt nahe, die Fragestellung zu erweitern und die Approximation im euklidischen Sinne durch Posinome zu betrachen. Gesucht ist dann ein Posinom P, für das

$$\sum_{i=0}^{n} (P(t_i) - f_i)^2 = min! \tag{1.1}$$

gilt. Hierbei ist auch $t_0 > 0$ zugelassen. Existiert ein Posinom P, das (1.1) erfüllt, so gibt es keine anderen Posinome, die (1.1) erfüllen (vgl. [3], S. 60). Wir nennen P das Posinom bester Approximation. Weitere Ergebnisse finden wir bei L. Berg in [3], [4], [5].
In Folgendem erkennen wir den praktischen Nutzen der Approximation durch Posinome: Sind bei der Approximation einer Menge S_n Oszillationen der Funktion und ihrer Ableitungen unerwünscht, so liegt es nahe, mit Posinomen zu approximieren. Insbesondere, wenn die

Wahl des Polynomgrads noch offen ist, bietet die Theorie der Posinome eine eindeutige Entscheidungsmöglichkeit (vgl. [1], S. 503). Genauso verhält es sich in Fällen, in denen man bemüht ist, diffizile nichtlineare Approximationen zu finden, ohne festzustellen, daß eine Gerade, die möglicherweise den Anstieg Null hat, die bessere Lösung ist.

2 Angabe und Beweis der neuen Aussage

Wir wollen hier eine Aussage über den Grad des Posinoms bester Approximation in einem Spezialfall beweisen:

Satz 1 *Es sei*

$$S_k := \{(t_i, f_i) |\ i = 0, \ldots, k\} \text{ mit } 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_k \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Das Posinom bester Approximation zu S_n existiere und habe den Grad Null. Dann hat auch das Posinom bester Approximation zu S_{n+1}, wenn es existiert und S_{n+1} nicht interpoliert, den Grad Null.

Beweis:
Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, und es sei A die folgende $(n+1) \times (m+1)$ - Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^m \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^m \end{pmatrix}.$$

Es seien ferner

$$\vec{x}^T = (x_0, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \text{ und } \vec{f}^T = (f_0, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dann ist die Bestimmung des Posinoms bester Approximation gleichbedeutend mit der Lösung des quadratischen Optimierungsproblems

$$\vec{x}^T\ A^T A\vec{x} - 2\vec{f}^T A\vec{x} = min!$$

unter der Nebenbedingung

$$\vec{x} \geq \vec{0}.$$

Dieses Problem ist äquivalent zu den Kuhn-Tucker-Bedingungen (vgl. [6])

$$\vec{v} = A^T A\vec{x} - A^T\vec{f} \geq \vec{0}, \quad \vec{x}^T\vec{v} = 0, \quad \vec{x} \geq 0 \tag{2.2}$$

mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^{m+1}$.
Es sei $P_n(t) = x_0^{(n)}$ das Posinom bester Approximation zu S_n.
Ist P_n das Interpolationsposinom zu S_n und $f_{n+1} \geq x_0^{(n)}$, so existiert ein Interpolationsposinom P_{n+1} zu S_{n+1}. Ist P_n das Posinom bester Approximation zu S_n, aber nicht das Interpolationsposinom zu S_n, und gilt $f_{n+1} > x_0^{(n)}$, so existiert kein Posinom bester Approximation zu S_{n+1} (vgl. [3], Theorem 6). Wir können also voraussetzen, daß $f_{n+1} \leq x_0^{(n)}$ gilt.
Es sind die folgenden Fälle zu betrachten:

1. Fall:
Es ist

$$P_n(t) = x_0^{(n)} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f_i > 0.$$

Es sei $f_{n+1} \geq -\sum_{i=0}^{n} f_i$.
Ist $m = 0$, so ist $x_0^{(n+1)} := \frac{1}{n+2} \sum_{i=0}^{n+1} f_i \geq 0$. Dann gilt $v_0^{(n+1)} = 0$ in (2.2).
Es sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig.
Wegen $v_0^{(n)} = 0$ und $x_j^{(n)} = 0$ für $j = 1, \ldots, m$ in (2.2) gilt für $j = 1, \ldots, m$:

$$v_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} t_i^j \cdot x_0^{(n)} - \sum_{i=0}^{n} t_i^j \cdot f_i \geq 0.$$

Wiederum ist $x_0^{(n+1)} := \frac{1}{n+2} \sum_{i=0}^{n+1} f_i \geq 0$. Ferner sei $x_j^{(n+1)} = 0$ für $j = 1, \ldots, m$.

Dann gilt $v_0^{(n+1)} = 0$ in (2.2), und wir müssen zeigen, daß

$$v_j^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} t_i^j \cdot x_0^{(n+1)} - \sum_{i=0}^{n+1} t_i^j \cdot f_i \geq 0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

ist. Betrachten wir für $j = 1, \ldots, m$ nun $v_j^{(n+1)}$ als Funktion von f_{n+1}. Dann gilt für $j = 1, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} \left(v_j^{(n+1)}\right)'(f_{n+1}) &= \sum_{i=0}^{n+1} t_i^j \cdot \frac{1}{n+2} - t_{n+1}^j \\ &< t_{n+1}^j - t_{n+1}^j = 0. \end{aligned}$$

Also ist $v_j^{(n+1)}$ für $j = 1, \ldots, m$ streng monoton fallend in f_{n+1}. Wir können daher wegen $f_{n+1} \leq x_0^{(n)}$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} v_j^{(n+1)}(f_{n+1}) &\geq v_j^{(n+1)}(x_0^{(n)}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n+1} t_i^j\right) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n} f_i + x_0^{(n)}}{n+2} - \sum_{i=0}^{n} t_i^j \cdot f_i - t_{n+1}^j \cdot x_0^{(n)} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} t_i^j \cdot x_0^{(n)} - \sum_{i=0}^{n} t_i^j \cdot f_i - t_{n+1}^j \cdot x_0^{(n)} \\ &\geq \sum_{i=0}^{n+1} t_i^j \cdot x_0^{(n)} - \sum_{i=0}^{n} t_i^j \cdot x_0^{(n)} - t_{n+1}^j \cdot x_0^{(n)} = 0, \end{aligned}$$

wobei $j = 1, \ldots, m$.

Mithin ist nach den Kuhn-Tucker-Bedingungen $P_{n+1}(t) = x_0^{(n+1)}$ das gesuchte Posinom bester Approximation.

Es seien $f_{n+1} < -\sum_{i=0}^{n} f_i$ und $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann setzen wir $x_j^{(n+1)} = 0$ für $j = 0, \ldots, m$. Aufgrund von $x_j^{(n+1)} = 0$ für $j = 0, \ldots, m$ in (2.2) ist für diese j

$$\begin{aligned} v_j^{(n+1)} &= -\sum_{i=0}^{n+1} t_i^j \cdot f_i \\ &\geq -\sum_{i=0}^{n} t_i^j \cdot f_i + t_{n+1}^j \cdot \sum_{i=0}^{n} f_i \\ &\geq -\sum_{i=0}^{n} t_i^j \cdot x_0^{(n)} + t_{n+1}^j \cdot \sum_{i=0}^{n} f_i \\ &\geq -\left(\sum_{i=0}^{n} t_i^j - (n+1) \cdot t_{n+1}^j\right) \cdot x_0^{(n)} \geq 0 \end{aligned}$$

wegen $x_0^{(n)} > 0$ äquivalent zu

$$\sum_{i=0}^{n} t_i^j \leq (n+1) \cdot t_{n+1}^j.$$

Die letzte Zeile ist aber wegen

$$\sum_{i=0}^{n} t_i^j \leq \sum_{i=0}^{n} t_{n+1}^j \quad (j = 0, \ldots, m)$$

wahr, so daß auch hier nach den Kuhn-Tucker-Bedingungen $P_{n+1}(t) = x_0^{(n+1)}$ das gesuchte Posinom bester Approximation ist.

2. Fall:

Es ist

$$P_n(t) = x_0^{(n)} = 0.$$

Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Wegen $x_j^{(n)} = 0$ für $j = 0, \ldots, m$ in (2.2) ist für diese j:

$$v_j^{(n)} = -\sum_{i=0}^{n} t_i^j \cdot f_i \geq 0.$$

Weiter gilt $f_{n+1} \leq x_0^{(n)} = 0$.
Wir setzen $x_0^{(n+1)} = 0$ und $x_j^{(n+1)} = 0$ für $j = 1, \ldots, m$, sofern $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $j = 0, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} v_j^{(n+1)} &= -\sum_{i=0}^{n+1} t_i^j \cdot f_i \\ &= -\sum_{i=0}^{n} t_i^j \cdot f_i - t_{n+1}^j \cdot f_{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Somit folgt, wie oben, daß auch in diesem Fall die Behauptung bewiesen ist. Mithin ist alles gezeigt. ■

Abschließend möchte ich noch Herrn Prof. Dr. L. Berg danken, der mich auf die Fragestellung aufmerksam gemacht hat und mich freundlich beraten hat.

Literatur

[1] **Berg, L.** : *Zur Identifikation mehrfach monotoner Funktionen.* Z. Angew. Math. Mech. **65**, 497 - 507 (1985)

[2] **Berg, L.** : *Über vollmonotone Polynome durch vier gegebene Punkte.* Optimization **16**, 265 - 272 (1985)

[3] **Berg, L.** : *Existence, characterization and application of interpolating minimal polynomials.* Optimization **18**, 55 - 63 (1987)

[4] **Berg, L.** : *Interpolation and approximation by completely monotonous polynomials.* In: Greenspan, D., und Rózsa, P. (Ed.): Numerical Methods. Colloq. Math. Soc. János Bolyai **50**, pp. 589 - 604, Amsterdam 1991

[5] **Berg, L.** : *On the least-squares approximation of four points in the plain by posinoms.* Z. Angew. Math. Mech.**76** (4), 241-244 (1996)

[6] **Collatz, L.** und **Wetterling, W.** : *Optimierungsaufgaben.* Berlin 1971

[7] **Marusciac, I.** : *On a geometric programming problem with linear constraints.* Math., Rev. Anal. Numer. Theor. Approximation, Anal. Numer. Theor. Approximation **9**, 209 - 219 (1980)

[8] **Thielcke, B.** : *Zwei Algorithmen zur Berechnung interpolierender Minimalpolynome.* Rostock. Math. Kolloq. **30**, 56 - 62 (1986)

eingegangen: 22. Juni 1995

Autor:

Markus Kappert
Fachbereich Mathematik
Gerhard – Mercator – Universität
Gesamthochschule Duisburg
D-47048 Duisburg
Deutschland