Rostock. Math. Kolloq. **50**, 31–44 (1997)

Subject Classification (AMS)
08A55 08A40

Dietlinde Lau

Die maximalen Klassen von $\widetilde{P}_3$

Nachfolgend soll bewiesen werden, daß die Menge aller partiellen Funktionen $\widetilde{P}_3$ über einer 3-elementigen Menge genau 58 verschiedene (bez. Superposition) abgeschlossene maximale Teilmengen besitzt. Diese Aussage folgt zwar auch aus der von I. G. Rosenberg und L. Haddad in [2] [3] und [4] angegebenen Beschreibung sämtlicher maximalen abgeschlossenen Mengen aus partiellen Funktionen über beliebigen endlichen Mengen, jedoch soll hier gezeigt werden, wie man dies auch (ohne Kenntnis des allgemeinen Falls) elementar beweisen kann. Die hier vorgestellte Beweisvariante wurde bereits 1977 im Anhang der Dissertation der Autorin angegeben, jedoch später nicht publiziert, was nun (sehr verspätet) nachgeholt werden soll.

Wir beginnen mit einer Zusammenstellung der benötigten Grundbegriffe und Bezeichnungen. Seien

$$E_k := \{0, 1, ..., k-1\} \text{ und } \widetilde{E}_k := \{0, 1, ..., k-1, \infty\}.$$

$P_k^{(n)}$ bezeichne die Menge aller n-stelligen Funktionen $f^{(n)}$, die das n-fache kartesische Produkt E_k^n in E_k abbilden, und es sei

$$P_k := \sum_{n\geq 1} P_k^{(n)}.$$

In Verallgemeinerung dieser Mengen betrachten wir

$$\widetilde{P}_k^{(n)} := \{f^{(n)} \mid f^{(n)} : E_k^n \to \widetilde{E}_k \}$$

und

$$\widetilde{P}_k := \sum_{n\geq 1} \widetilde{P}_k^{(n)},$$

wobei $f^n(a_1, ..., a_n) = \infty$ für „$f(a_1, a_2, ..., a_n)$ ist nicht definiert“ bzw. „$(a_1, ..., a_n)$ gehört nicht zum Definitionsbereich von f“ steht.
Falls die Stellenzahl von $f^{(n)} \in \widetilde{P}_k$ aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, schreiben wir nur f. Den Wertebereich von f kürzen wir mit $W(f)$ ab. Die durch $e_i^{(n)}(x_1, ..., x_n) := x_i$ bzw. $c_a^{(n)}(x_1, ..., x_n) := a$ $(a \in \widetilde{E}_k)$ definierten Funktionen $e_i^{(n)}$ bzw. $c_a^{(n)}$ heißen *Projektionen* bzw. *Konstanten*. Insbesondere bezeichnet $c_\infty^{(n)}$ eine n-stellige Funktion, die für kein Tupel aus E_k^n definiert ist.
Bezeichnungen für die von den Konstanten verschiedenen einstelligen Funktionen aus P_3 sind in der Tabelle 1 zusammengefaßt.

x	$j_0(x)$	$j_1(x)$	$j_2(x)$	$j_3(x)$	$j_4(x)$	$j_5(x)$	$u_0(x)$	$u_1(x)$	$u_2(x)$	$u_3(x)$	$u_4(x)$	$u_5(x)$
0	1	0	0	1	1	0	2	0	0	2	2	0
1	0	1	0	1	0	1	0	2	0	2	0	2
2	0	0	1	0	1	1	0	0	2	0	2	2
x	$v_0(x)$	$v_1(x)$	$v_2(x)$	$v_3(x)$	$v_4(x)$	$v_5(x)$	$s_1(x)$	$s_2(x)$	$s_3(x)$	$s_4(x)$	$s_5(x)$	$s_6(x)$
0	2	1	1	2	2	1	0	0	1	1	2	2
1	1	2	1	2	1	2	1	2	0	2	0	1
2	1	1	2	1	2	2	2	1	2	0	1	0

Tabelle 1

Als *Operationen über* $\widetilde{P}_k$ betrachten wir die sogenannten *Mal'cev-Operationen* ζ, τ, Δ, ∇ und $*$, die für beliebige $f^{(n)}$ und $g^{(m)}$ aus $\widetilde{P}_k$ wie folgt definiert sind:

$$(\zeta f)(x_1, x_2, ..., x_n) := f(x_2, x_3, ..., x_n, x_1),$$
$$(\tau f)(x_1, x_2, ..., x_n) := f(x_2, x_1, x_3, ..., x_n),$$
$$(\Delta f)(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) := f(x_1, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \text{ für } n \geq 2,$$
$$\zeta f = \tau f = \Delta f = f \text{ für } n = 1,$$
$$(\nabla f)(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) := f(x_2, x_3, ..., x_{n+1}) \text{ und}$$
$$(f * g)(x_1, ..., x_{m+n-1}) :=$$
$$\begin{cases} f(g(x_1, ..., x_m), x_{m+1}, ..., x_{m+n-1}) & \text{für } g(x_1, ..., x_m) \in E_k, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Menge aller Funktionen, die aus Funktionen einer Menge $A \subseteq \widetilde{P}_k$ mit Hilfe der oben definierten Mal'cev-Operationen in endlich vielen Schritten erhalten werden können, wird *Abschluß* von A genannt und mit $[A]$ bezeichnet. Ist $A = [A]$, so heißt A *abgeschlossene (Teil-)Menge* oder *(Teil-)Klasse von* $\widetilde{P}_k$. Eine echte Teilklasse A' der Klasse A nennt man *maximale Klasse von* A, wenn für alle $f \in A\backslash A'$ stets $[A' \cup \{f\}] = A$ gilt. Eine Menge B ($\subseteq A$) heißt *vollständig in* A, wenn $[B] = A$ ist.

Zur Beschreibung von abgeschlossenen Teilmengen von $\widetilde{P}_k$ sind h-stellige (h-äre) Relationen geeignet, $h \geq 1$, d.h. Teilmengen von $\widetilde{E}_k^h$, deren Elemente $(a_1, ..., a_h)$ wir zumeist als Spalten

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_h \end{pmatrix}$$

aufschreiben werden und die Relation selbst in Form einer Matrix, deren Spalten die Elemente der Relation sind.
Wir sagen, eine *h-äre Relation ρ über $\widetilde{E}_k$ wird von einer Funktion $f \in \widetilde{P}_k$ bewahrt*, wenn für alle $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, ..., \mathbf{r_n} \in \rho$ mit $\mathbf{r_i} := (r_{1i}, r_{2i}, ..., r_{hi})$, $i = 1, 2, ..., n$, stets

$$f(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_n}) := \begin{pmatrix} f(r_{11}, r_{12}, ..., r_{1n}) \\ f(r_{21}, r_{22}, ..., r_{2n}) \\ \vdots \\ f(r_{h1}, r_{h2}, ..., r_{hn}) \end{pmatrix} \in \rho$$

gilt, wobei für $\mathbf{a} \in \widetilde{E}_k^n \backslash E_k^h$ noch $f(\mathbf{a}) = \infty$ festgelegt sei.
Die Menge aller Funktionen aus P_k (bzw. $\widetilde{P}_k$), die die Relation $\rho \subseteq E_k^h$ (bzw. $\rho \subseteq \widetilde{E}_k^h$) bewahren, sei mit $Pol_k\rho$ (bzw. $Pol_{\widetilde{k}}\rho$) bezeichnet. Außerdem verwenden wir folgende Bezeichnung

$$POL_{\widetilde{k}}\rho := Pol_{\widetilde{k}}(\rho \cup (\widetilde{E}_k^h \backslash E_k^h)).$$

Die mit Hilfe einer gewissen Äquivalenzrelation ε auf E_h ($h \geq 1$) definierbare h-äre Relation

$$\delta_{k,\varepsilon}^h := \{(a_0, a_1, ..., a_{h-1}) \in E_k^h \mid (i, j) \in \varepsilon \Longrightarrow a_i = a_j\}$$

wird *diagonale Relation* genannt. Zwecks einfacherer Beschreibung einer diagonalen Relation $\delta_{k,\varepsilon}^h$ geben wir diese Relation später oft in der Form

$$\delta_{k;\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_r}^h$$

an, wobei ε_1, ε_2, ..., ε_r gerade die aus mindestens zwei Elementen bestehende Äquivalenzklassen von ε sind.
In den nachfolgenden Sätzen wird öfter auch die folgende Relationenbezeichnung verwendet:

$$\iota_k^h := \{(a_0, a_1, ..., a_{h-1}) \in E_k^h \mid |\{a_0, a_1, ..., a_{h-1}\}| \leq h - 1 \}.$$

Als nächstes sollen einige Hilfsaussagen zusammengestellt werden.

Der folgende Satz wurde erstmalig von S. V. Jablonskij (siehe dazu [12] oder [14]) bewiesen:

Satz 1 *P_3 besitzt genau 18 maximale Klassen:*

- *3 Klassen vom Typ $\mathfrak{M}$ (Klassen monotoner Funktionen):*

$$Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

- *3 Klassen vom Typ $\mathfrak{U}$ (durch nichttriviale Äquivalenzrelationen definierte Klassen):*

$$Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

- *1 Klasse vom Typ $\mathfrak{S}$ (autoduale Funktionen):*

$$Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- *9 Klassen vom Typ $\mathfrak{C}$ (durch zentrale Relationen definierte Klassen):*
  $Pol_3\{0\}$, $Pol_3\{1\}$, $Pol_3\{2\}$, $Pol_3\{0,1\}$, $Pol_3\{0,2\}$, $Pol_3\{1,2\}$,

$$Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

- *1 Klasse vom Typ $\mathfrak{L}$ (lineare Funktionen): $Pol_3\lambda_3$, wobei*
  $\lambda_3 := \{\,(a,b,c,d) \in E_3^4 \,|\, a+b = c+d (mod\, 3)\}$;

- *1 Klasse vom Typ $\mathfrak{B}$: $Pol_3\iota_3^3$, wobei*
  $\iota_3^3 := \{\,(a,b,c) \in E_3^3 \,|\, |\{a,b,c\}| \,\leq\, 2\,\}$.

Eine Teilmenge M von P_3 ist genau dann in P_3 vollständig, wenn M keine Teilmenge der oben angegebenen 18 maximalen Klassen von P_3 ist. □

Lemma 1 *Bezeichne f eine n-stellige Funktion aus P_3, die von mindestens 2 Variablen (o.B.d.A. seien dies x_1 und x_2) wesentlich abhängt, und sei $\{a,b,c\} = E_3$. Dann gilt:*
(a) $W(f) = E_3 \Rightarrow \exists\, \mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_n} \in \delta^3_{\{0,1\}} \cup \delta^3_{\{1,2\}} :\ f(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_n}) \in E_3^3 \backslash \iota_3^3$;
(b) $|W(f)| = 2 \Rightarrow \exists\, \mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_n} \in \delta^3_{\{a,b\}} \cup \delta^3_{\{b,c\}} :\ f(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_n}) \in \delta^3_{\{a,c\}} \backslash \delta^3_{\{0,1,2\}}$;
(c) $W(f) = E_3 \Rightarrow [\{f\} \cup \{\, g \in P_3^{(1)} \,|\, g(a) = g(b)\ \vee\ g(b) = g(c)\,\}] = P_3$.

Beweis: (a) ist ein Spezialfall des „Hauptlemmas von Jablonskij" und (b) eine leichte Folgerung aus diesem Lemma (siehe [10], S. 162).
(c): O.B.d.A. seien $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$. Offenbar gilt dann

$$\{\, g \in P_3^{(1)} \,|\, g(0) = g(1)\ \vee\ g(1) = g(2)\,\} = \{c_0, c_1, c_2, j_\alpha, u_\alpha, v_\alpha \,|\, \alpha \in \{0,2,3,5\}\}.$$

Man prüft nun leicht nach, daß diese Menge einstelliger Funktionen keine Teilmenge von maximalen Klassen des Typs $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$ ist. Da außerdem $W(f) = E_3$ und $f \in P_3 \backslash [P_3^{(1)}]$ vorausgesetzt ist, bewahrt f wegen (a) auch nicht die Relation ι_3^3, womit (c) aus Satz 1 folgt. $\square$.

Lemma 2 (a) *Für jedes $g \in \widetilde{P}_k \backslash (P_k \cup [\{c_\infty\}])$ gilt $[P_k \cup \{g\}] = \widetilde{P}_k$.*
(b) *$P_k \cup [\{c_\infty\}]$ ist die einzige maximale Klasse von $\widetilde{P}_k$, die P_k enthält.*

Beweis: (a): Sei $g^m \in \widetilde{P}_k \backslash (P_k \cup [\{c_\infty\}])$.
Da die Funktion $g' := e_2^2 * g$ $k+1$ verschiedene Werte annimmt, können wir o.B.d.A. $W(g) = \widetilde{E}_k$ annehmen. Folglich gibt es $k+1$ Tupel $\mathbf{a_i} := (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}) \in E_k^m$ mit $g(\mathbf{a_i}) = i$ $(i \in \widetilde{E}_k)$. Bezeichne $f^{(n)}$ eine beliebige Funktion aus $\widetilde{P}_k$. In Abhängigkeit von f lassen sich folgende Funktionen f_j $(j = 1, 2, ..., m)$ wie folgt definieren:

$$f_j(b_1, ..., b_n) = a_{ij} \iff f(b_1, ..., b_n) = i$$

$(b_1, ..., b_n \in E_k;\ i \in \widetilde{E}_k)$.
Damit haben wir $f(\mathbf{x}) = g(f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$, womit $f \in [P_k \cup \{g\}]$.
(b) folgt unmittelbar aus (a). $\square$

Die nächsten 4 Lemmatas befassen sich mit der Maximalität gewisser Teilklassen von $\widetilde{P}_3$ (bzw. $\widetilde{P}_k$) in $\widetilde{P}_3$ (bzw. $\widetilde{P}_k$).

In [1] wurde die nachfolgende Aussage (a) und in [13] (bzw. in [8], [9]) wurde die Aussage (b) des folgenden Lemmas bewiesen:

Lemma 3 *Seien*
$$\rho_1 := \{(a,a,b,b), (a,b,a,b) \,|\, a, b \in E_k\},$$

$\rho_2 := \{(a,a,b,b),(a,b,a,b),(a,b,b,a) \mid a,b \in E_k\}$,
$\rho_i := \{(a_1,a_2,...,a_i) \in E_k^i \mid |\{a_1,...,a_i\}| \le i-1\}$ *(*$i = 3, ..., k$*). Dann gilt*
(a) *Die Klassen* $Pol_k\rho_i$ *(*$i = 1,2,...,k$*) sind die einzigen echten Teilklassen von* P_k*, die* $P_k^{(1)}$ *enthalten. Außerdem gilt*

$$[P_k^{(1)}] = Pol_k\rho_1 \subset Pol_k\rho_2 \subset ... \subset Pol_k\rho_{k-1} \subset Pol_k\rho_k \subset P_k.$$

(b) *Die Klassen* $POL_{\widetilde{k}}\rho_i$ *(*$i = 1, 2, ..., k$*) sind maximale Klassen von* $\widetilde{P}_k$ *und die einzigen maximalen Klassen von* $\widetilde{P}_k$*, die* $P_k^{(1)}$ *enthalten.* □

Lemma 4 *Sei* $\varrho := \delta \cup \sigma$*, wobei* δ *eine gewisse* h*-stellige diagonale Relation bezeichnet, die von* E_k^h *verschieden ist, und* $\emptyset \neq \sigma \subseteq \{(a_1,...,a_h) \in E_k^h \mid |\{a_1,...,a_h\}| = h\}$ *sei. Außerdem existiere zu jedem* $\mathbf{a} := (a_1,...,a_h) \in \sigma$ *eine gewisse Äquivalenzrelation* ε_a *auf* E_k *mit den folgenden zwei Eigenschaften:*
(1) *Für jedes* $i \in \{1,...,h\}$ *existiert genau eine Äquivalenzklasse von* ε_a*, die* a_i *enthält.*
(2) *Zu jedem* $\mathbf{b} \in \varrho$ *findet man in* $POL_{\widetilde{k}}\varrho$ *eine einstellige Funktion* $g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ *mit* $g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ *und* $g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x) = g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(y)$ *für alle* $(x,y) \in \varepsilon_{\mathbf{a}}$*.*
Dann ist $POL_{\widetilde{k}}\varrho$ *eine maximale Klasse von* $\widetilde{P}_k$*.*

Beweis: Offensichtlich ist $POL_{\widetilde{k}}\varrho \neq \widetilde{P}_k$. Sei $f \in \widetilde{P}_k \backslash POL_{\widetilde{k}}\varrho$. Da ϱ die Eigenschaften (1) und (2) besitzt, erhält man durch Einsetzen gewisser einstelliger Funktionen aus $POL_{\widetilde{k}}\varrho$ in f zu jedem $r \in \sigma$ eine gewisse einstellige Funktion h_r mit $h_r(r) \in E_k^h \backslash \varrho$. Sei $\sigma = \{r_1,...,r_m\}$. Zu $POL_{\widetilde{k}}\varrho$ gehören Funktionen, die auf Zeilen der Form

$$(x_1, x_2, g_{r_1}(x_1), g_{r_2}(x_1), ..., g_{r_m}(x_1), g_{r_1}(x_2), g_{r_2}(x_2), ..., g_{r_m}(x_2))$$

beliebige Werte aus $\widetilde{E}_k$ und sonst nur den Wert ∞ annehmen. Folglich sind beliebige Funktionen aus $P_k^{(2)}$ Superpositionen über $\{f\} \cup POL_{\widetilde{k}}\varrho$, woraus (nach bekannten Eigenschaften von P_k) $P_k \subseteq [\{f\} \cup POL_{\widetilde{k}}\varrho]$ folgt. Da zu $POL_{\widetilde{k}}\varrho$ offenbar Funktionen gehören, die genau $k+1$ verschiedene Werte annehmen, folgt aus Lemma 2, (a), daß $[\{f\} \cup POL_{\widetilde{k}}\varrho] = \widetilde{P}_k$ gilt. Also ist $POL_{\widetilde{k}}\varrho$ eine maximale Klasse von $\widetilde{P}_k$. □

i	τ_i	i	τ_i
1	$\{0\}$	2	$\{1\}$
3	$\{2\}$	4	$\{0,1\}$
5	$\{0,2\}$	6	$\{1,2\}$
7	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
31	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
33	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	34	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
35	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
37	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	38	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
39	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	40	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Tabelle 2.1

i	τ_i	i	τ_i
41	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	42	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
43	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	44	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
45	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	46	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
47	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	48	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tabelle 2.2

i	τ_i
49	$\{(0,1,2),(a,a,b) \mid a,b \in E_3\}$
50	$\{(0,1,2),(a,b,a) \mid a,b \in E_3\}$
51	$\{(0,1,2),(b,a,a) \mid a,b \in E_3\}$
52	$\{(0,1,2),(1,0,2),(a,a,b) \mid a,b \in E_3\}$
53	$\{(0,1,2),(2,1,0),(a,b,a) \mid a,b \in E_3\}$
54	$\{(0,1,2),(0,2,1),(b,a,a) \mid a,b \in E_3\}$
55	$\{(a,a,b,b),(a,b,a,b) \mid a,b \in E_3\}$
56	$\{(a,a,b,b),(a,b,a,b),(a,b,b,a) \mid a,b \in E_3\}$
57	$\{(a,b,c) \in E_3^3 \mid \lvert\{a,b,c\}\rvert \leq 2\}$
58	$E_3^2 \cup \{(\infty,\infty)\}$

Tabelle 2.3

Lemma 5 *Die Klassen $POL_{\tilde{3}}\tau_i$ ($i \in \{1,2,...,57\}$, siehe Tabelle 2.1 - 2.3) sind maximale Klassen von $\widetilde{P}_3$.*

Beweis: Für $i \in \{1,2,...,54\}$ beweist man das Lemma leicht mit Hilfe von Lemma 4. Falls $i \in \{55,56,57\}$, folgt die obige Behauptung aus Lemma 3. Die Maximalität von $POL_{\tilde{3}}\tau_{58}$ ergibt sich aus $POL_{\tilde{3}}\tau_{58} = \widetilde{P}_3 \cup [\{c_\infty\}]$ und Lemma 2, (b). $\square$

Satz 2 (a) $\widetilde{P}_3$ *besitzt genau 58 maximale Klassen. Es sind dies die Mengen* $POL_3\tau_i$ (i = *1, 2, 3,..., 58), wobei die* τ_i *in den Tabellen 2.1 - 2.3 angegeben sind.*
(b) *Eine Menge* $A \subseteq \widetilde{P}_3$ *ist genau dann in* $\widetilde{P}_3$ *vollständig, wenn sie keine Teilmenge der angegebenen 58 maximalen Klassen ist.*

Beweis: Wegen Lemma 5 haben wir uns zum Beweis von (a) und (b) nur zu überlegen, daß eine in keine der Mengen $POL_{\widetilde{3}}\tau_i$ ($i \in \{1,2,...,58\}$) enthaltene Teilmenge von $\widetilde{P}_3$ vollständig in $\widetilde{P}_3$ ist.
Sei $M \subseteq \widetilde{P}_3$ keine Teilmenge der im Satz genannten Klassen. Folglich gehören zu M Funktionen $f_i^{n_i} \notin POL\tau_i$ ($i = 1,\ 2,\ ...,\ 58$). Ist

$$\tau_i = (\sigma_1\ \sigma_2\ ...\ \sigma_{m_i})$$

eine h_i-stellige Relation, so können wir o.B.d.A. $n_i = m_i$ und

$$f_i(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{m_i}) \in E_3^{h_i} \backslash \tau_i$$

vereinbaren.
Wie oben bereits erwähnt wurde, haben wir zu zeigen, daß $[M] = \widetilde{P}_3$ ist. Zuerst soll

$$\{c_0, c_1, c_2\} \subseteq [M] \tag{0.1}$$

nachgewiesen werden.
Die Funktion f_{37} ist einstellig und aus $P_3^{(1)} \backslash \{s_1\}$. Folgende 3 Fälle sind dann möglich:
Fall 1: $f_{37} = c_a$ ($a \in E_3$).
Offensichtlich haben wir in diesem Fall $\{c_0, c_1, c_2\} \subseteq [\{f_{37}, f_1, f_2, ..., f_6\}]$.
Fall 2: $|W(f_{37})| = 2$.
O.B.d.A. sei $W(f_{37}) = \{0,1\}$, d.h., $f_{37} \in \{j_0, j_1, ..., j_5\}$. Wegen $j_2 * j_2 = c_0$, $j_0 * j_0 = j_5$, $j_3 * j_3 = c_1$, $j_4 * j_4 = j_1$ und Fall 1 genügt es, $f_{37} \in \{j_1, j_5\}$ weiter zu untersuchen.
2.1: $f_{37} = j_1$.
Wir bilden $f_7' := f_7 * j_1 \in \{c_0, c_1, c_2, j_4, u_1, u_4, v_1, v_4\}$. Da $u_1 * u_1 = c_0$, $v_1 * v_1 = v_4$ und $u_4 * u_4 = c_2$, können wir uns wegen Fall 1 auf $f_7' \in \{j_4, v_4\}$ beschränken.
2.1.1: $f_7' = j_4$.
Einsetzen von f_{37} ($= j_1$) und f_7' ($= j_4$) in f_{10} liefert eine einstellige Funktion $f_{10}'(x) := f_{10}(j_1(x), j_4(x))$ mit $f_{10}' \in \{c_0, c_1, c_2, u_1, u_4, v_1, v_4\}$. Wegen $u_1 * u_1 = c_0$, $u_4 * u_4 = c_2$ und $v_1 * v_1 = v_4$ bleibt noch $f_{10}' = v_4$ zu untersuchen. Es ist $v_4 * j_4 = v_1$. Bildet man $f_{17}'(x) := f_{17}(j_1(x), j_4(x), v_1(x), v_4(x))$, so gilt $f_{17}' \in \{c_0, c_1, c_2, u_1, u_4\}$ und $f_{17}' * f_{17}'$ ist eine Konstante, womit der Fall 2.1.1 auf den ersten Fall zurückgeführt worden ist.
2.1.2: $f_7' = v_4$.

Die Funktion $f'_{14}(x) := f_{14}(j_1(x), v_4(x))$ gehört zu $\{c_0, c_1, c_2, j_4, u_1, u_4, v_1\}$. Wegen $u_1 * u_1 = c_0$, $u_4 * u_4 = c_2$, $j_1 * v_1 = j_4$ und Fall 2.1.1 ist auch der Fall 2.1.2 auf den ersten Fall zurückführbar.
2.2: $f_{37} = j_5$.
Dieser Fall läßt sich leicht wie der Fall 2.1 auf den ersten Fall zurückführen, indem man f_{16} anstelle von f_{17} und f_{13} anstelle von f_{14} verwendet.
Fall 3: $|(f_{37})| = 3$ und $f_{37} \neq s_1$.
Mit Hilfe der Funktionen f_{38}, ..., f_{42} ist auch dieser Fall zunächst auf die Fälle 1 oder 2 und damit auf Fall 1 zurückführbar.

Folglich gehören die Konstanten zu $[M]$.

Sei $f'_{43}(x) := f_{43}(c_0(x), c_1(x), c_2(x), x)$. Diese Funktion gehört zu $P_3^{(1)} \cap [M]$ und nimmt mindestens zwei verschiedene Werte an. Ist f'_{43} eine Permutation, so kann man mit Hilfe der Funktionen f_{44}, ..., f_{48} eine Funktion erhalten, die genau zwei verschiedene Werte aus E_3 annimmt. O.B.d.A. können wir also $W(f'_{43}) = E_2$ im folgenden voraussetzen, d.h., $f'_{43} \in \{j_0, j_1, ..., j_5\}$.
Sei

$$M_{a,b} := \{f \in P_3^{(1)} \mid f(a) = f(b)\}.$$

Als Nächstes soll

$$\exists\, a, b \in E_3 : \, a \neq b \,\wedge\, M_{a,b} \subset [M] \tag{0.2}$$

nachgewiesen werden. Wegen $j_0 * j_0 = j_5$, $j_4 * j_4 = j_1$ und Dualitätsgründen genügt es, die Fälle $f'_{43} \in \{j_1, j_2\}$ zu diskutieren.
Fall 1: $f'_{43} = j_1$.
Einsetzen der Konstanten und j_1 in f_{19} liefert $f'_{19} \in \{j_4, u_1, u_4, v_1, v_4\}$. Wegen $v_1 * v_1 = v_4$ und und $f_{22}(c_0, c_1, c_2, j_1, j_4) \in \{u_1, u_4, v_1, v_4\}$ können wir uns auf $f'_{19} \in \{u_1, u_4, v_4\}$ beschränken.
1.1: $f'_{19} = u_1$.
In diesem Fall läßt sich eine Funktion $f'_{25}(x) := f_{25}(c_0(x), c_1(x), c_2(x), j_1(x), u_1(x))$ mit $f'_{25} \in \{j_4, u_4, v_1, v_4\}$ konstruieren, von der wir o.B.d.A. $f'_{25} \in \{j_4, u_4, v_4\}$ annehmen können.
1.1.1: $f'_{25} = j_4$.
Es gilt $u_1 * j_4 = u_4$. Folglich ist die einstellige Funktion $f'_{34} := f_{34}(c_0, c_1, c_2, j_1, j_4, u_1, u_4) \in \{v_1, v_4\}$ eine Superposition über M. Wegen $v_1 * v_1 = v_4$ und $v_4 * j_4 = v_1$ gilt damit: $\{c_0, c_1, c_2, j_1, j_4, u_1, u_4, v_1, v_4\} = \{f \in P_3^{(1)} \mid f(0) = f(2)\} \subset [M]$.
1.1.2: $f'_{25} = u_4$.
Für die Funktion $f'_{23} := f_{23}(c_0, c_1, c_2, u_1, u_4)$ gilt $f'_{23} \in \{j_1, j_4, v_1, v_4\}$. Wegen $v_1 * v_1 = v_4$ und $j_4 * j_4 = j_1$ betrachten wir nur $f'_{23} \in \{j_1, v_4\}$.
1.1.2.1: $f'_{23} = j_1$.
Einsetzen von u_1 statt u_4 und u_4 statt u_1 in f_{23} ergibt anstelle von f'_{23} die Funktion $f''_{23} = j_4$.

Weiter wie in 1.1.1.

1.1.2.2: $f'_{23} = v_4$.

Einsetzen von u_1 statt u_4 und u_4 statt u_1 in f_{23} ergibt anstelle von f'_{23} die Funktion $f''_{23} = v_1$. Weiter ist $f'_{36} := f_{36}(c_0, c_1, c_2, u_1, u_4, v_1, v_4) \in \{j_1, j_4\}$. Falls $f'_{36} = j_1$ ist, setzen wir in f_{36} u_1 statt u_4, u_4 statt u_1, v_1 statt v_4 und v_4 statt v_1 in f_{36} ein und erhalten anstelle von f'_{36} die Funktion $f''_{36} = j_4$. Der Fall 1.1.2.2 ist damit ebenfalls auf den Fall 1.1.1 zurückführbar.

1.1.3: $f'_{13} = v_4$.

Eine Superposition über M ist dann $f'_{31} := f_{31}(c_0, c_1, c_2, j_1, u_1, v_4) \in \{j_4, u_4, v_1\}$. Wegen $j_1 * v_1 = j_4$ ist dieser Fall auf die Fälle 1.1.1 und 1.1.2 zurückführbar.

1.2: $f'_{19} = u_4$.

Wir können $f'_{28} := f_{28}(c_0, c_1, c_2, j_1, u_4) \in \{j_4, u_1, v_1, v_4\}$ bzw. o.B.d.A. (wegen $v_1 * v_1 = v_4$ und $u_4 * j_4 = u_1$) $f'_{28} \in \{u_1, v_4\}$ konstruieren.

1.2.1: $f'_{28} = u_1$.

Weiter wie im Fall 1.1.

1.2.2: $f'_{28} = v_4$.

Wir haben in diesem Fall $f'_{32} := f_{32}(c_0, c_1, c_2, j_1, v_4, u_4) \in \{j_4, u_1, v_1\}$. Wegen $v_4 * j_4 = v_1$ und $u_4 * v_1 = u_1$ können wir $f'_{32} = u_1$ annehmen, womit der Fall 1.2 auf den Fall 1.1 zurückführbar ist.

1.3: $f'_{19} = v_4$.

Bildet man man $f'_{26} := f_{26}(c_0, c_1, c_2, j_1, v_4)$, so ist $f'_{26} \in \{j_4, u_1, u_4, v_1\}$ bzw. o.B.d.A. (wegen $v_4 * j_4 = v_1$) $f'_{26} \in \{u_1, u_4, v_1\}$.

1.3.1: $f'_{26} \in \{u_1, u_4\}$.

Weiter wie unter 1.1 oder 1.2.

1.3.2: $f'_{26} = v_1$.

Es gilt $j_1 * v_1 = j_4$. Folglich läßt sich eine Funktion $f'_{35} := f_{35}(c_0, c_1, c_2, j_1, j_4, v_1, v_4) \in \{u_1, u_4\}$ konstruieren, d.h., 1.3.2 ist auf die Fälle 1.1 und 1.2 zurückführbar.

Im Fall 1 haben wir damit (2) gezeigt.

Fall 2: $f'_{43} = j_2$.

Dann gilt $f'_{19} := f_{19}(c_0, c_1, c_2, j_2) \in \{j_3, u_2, u_3, v_2, v_3\}$. Wegen $u_3 * u_3 = u_2$ und $v_3 * v_3 = v_2$ sei o.B.d.A. $f'_{19} \in \{j_3, u_2, v_2\}$.

2.1: $f'_{19} = j_3$.

Seien $f'_{22} := f_{22}(c_0, c_1, c_2, j_2, j_3)$ und $f''_{22} := f_{22}(c_0, c_1, c_2, j_3, j_2)$. Dann gilt $\{f'_{22}, f''_{22}\} \in \{\{u_2, u_3\}, \{v_2, v_3\}\}$. Als Superpositionen über $\{f'_{22}, f''_{22}, j_2, j_3, f_{34}, f_{35}\}$ erhält man folglich $\{u_2, u_3, v_2, v_3\}$, womit $M_{0,1} \subseteq [M]$ gezeigt wurde.

2.2: $f'_{19} = u_2$.

Wir haben in diesem Fall $f'_{25} := f_{25}(c_0, c_1, c_2, j_2, u_2) \in \{j_3, u_3, v_2, v_3\}$. Wegen $j_2 * u_3 = j_3$, $v_3 * v_3 = v_2$ und Fall 2.1 können wir $f'_{25} = v_2$ annehmen. Da $f_{33}(c_0, c_1, c_2, j_2, u_2, v_2) \in$

$\{j_3, u_3, v_3\}$ und $j_2 * u_3 = j_3$ sowie $j_2 * v_3 = j_3$, ist der Fall 2.2 auf den Fall 2.1 zurückführbar.
2.3: $f'_{19} = v_2$.
Analog zu 2.2.

Damit ist (2) bewiesen.

O.B.d.A. können wir folglich

$$M_{0,1} := \{\, f \in P_3^{(1)} \mid f(0) = f(1)\,\} = \{c_0, c_1, c_2, j_2, j_3, u_2, u_3, v_2, v_3\} \subset [M] \qquad (0.3)$$

annehmen.
Einsetzen dieser Funktionen und Identifizieren von Variablen in f_{49} liefert eine Funktion $f'_{49} \in P_3^{(1)}$ mit $f'_{49}(0) \neq f'_{49}(1)$ und $f'_{49} \neq s_1$.
Fall 1: $|W(f'_{49})| = 2$.
In diesem Fall prüft man leicht nach, daß $M_{0,1} \cup M_{a,b} \subset [M]$ für ein gewisses $(a, b) \in \{(0, 2), (1, 2)\}$ gilt. O.B.d.A. sei $(a, b) = (1, 2)$. Außerdem kann man wegen (3) o.B.d.A. annehmen, daß für gewisse $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E_3$

$$f_{55} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha & \delta \\ \beta & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in E_3^4 \backslash \tau_{55}$$

ist. Bildet man dann als Superposition über M die Funktion $f'_{55}(x, y) := f_{55}(g_1(x), g_2(y))$, wobei g_1 und g_2 gewisse Funktionen aus $M_{0,1} \cup M_{1,2}$ mit $g_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ und $g_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ bezeichnen, so gilt $f'_{55} \in P_3 \backslash [P_3^{(1)}]$.
Falls $|W(f'_{55})| = 3$, folgt aus Lemma 1, (c), daß $P_3 \subseteq [M]$ ist, woraus sich mit Hilfe von Lemma 2, (a) und $f_{58} \in \widetilde{P}_3 \backslash [\{c_\infty\}]$ unmittelbar $[M] = \widetilde{P}_3$ ergibt, w.z.b.w.
Sei also nachfolgend

$$|W(f'_{55})| = 2. \qquad (0.4)$$

Wegen Lemma 1, (b) existieren gewisse $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in E_3$ mit

$$f'_{55} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & a_2 \\ a_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

wobei $a_3 \neq b_3$ ist. Einsetzen gewisser Funktionen aus $M_{0,1} \cup M_{1,2}$ ($\subset [M]$) in f'_{55} liefert eine einstellige Funktion f''_{55} mit der Eigenschaft: $M_{0,2} \subseteq [\{f''_{55}\} \cup M_{0,1} \cup M_{1,2}]$. Mit Hilfe der

Funktion $f_{57} \in M$ und Lemma 1, (a) folgt hieraus $P_3^{(1)} \subset [M]$. Nach Lemma 3, (a) haben wir dann $Pol_3\tau_{56} \subseteq [M]$. Mit Hilfe der Funktionen f_{56} und f_{57} aus M erhält man hieraus leicht, daß sämtliche Funktionen aus P_3 Superpositionen über M sind. Wegen $f_{58} \in M$ und Lemma 2, (a) geht dies aber nur im Fall $[M] = \widetilde{P}_3$, w.z.b.w.

Fall 2: $|W(f'_{49})| = 3$.

f'_{49} ist in diesem Fall eine von s_1 verschiedene Permutation, mit deren Hilfe man im Fall $f_{49} \neq s_3$ wegen (3) eine gewisse einstellige Funktion g mit $g(0) \neq g(1)$ als Superposition über M bilden kann, womit wir weiter wie unter Fall 1 schließen können.

Ist $f'_{49} = s_3$, so ist es möglich, als Superposition über $M_{0,1} \cup \{f_{52}\}(\subset [M])$ eine einstellige Funktion h zu bilden, die entweder eine von s_1 und s_3 verschiedene Permutation ist oder genau 2 verschiedene Werte annimmt, jedoch nicht zu $M_{0,1}$ gehört. Folglich ist der Fall 2 vollständig auf den Fall 1 zurückführbar und unser Satz bewiesen. □

Literatur

[1] **Burle, G. A.** : *Klassen der k-wertigen Logik, die alle Funktionen einer Veränderlichen enthalten (Russ.).* Diskret. Analiz **10**, 3-7 (1967)

[2] **Haddad, L.** und **Rosenberg, I. G.** : *Criterére général de complétude pour les algébras partielles finies.* C. R. cad. ci. Paris, Ser. I Math. **304**, 507-509 (1987)

[3] **Haddad, L.** : *Maximal partial clones determined by quasi-diagonal relations.* J. Inform. Process. Cybernet. EIK **24**, 7/8, 355-366 (1988)

[4] **Haddad, L.** und **Rosenberg, I. G.** : *Maximal partial clones determined by the areflexive relations.* Discrete Appl. Math. **24**, 1-3, 133-143 (1989)

[5] **Haddad, L.** und **Rosenberg, I. G.; Schweigert, D.** : *A maximal partial clone and a Słupecki-type criterion.* Acta WSci Math, (Szeged) **54**, 1 - 2, 89-98 (1990)

[6] **Haddad, L.** und **Rosenberg, I. G.** : *Partial Sheffer Functions.* Europ. Journal of Combinatorics. **12**, 9-21 (1991)

[7] **Haddad, L.** und **Rosenberg, I. G.** : *Completeness theory of finite partial algebras.* Algebra Universalis **29**, 378-401 (1991)

[8] **Lau, D.** : *Eigenschaften gewisser abgeschlossener Klassen in Postschen Algebren.* Dissertation (A). Universität Rostock 1977

[9] **Lau, D.** : *Über partielle Funktionenalgebren.* Rostock. Math. Kolloq. **33**, 23-48 (1988)

[10] **Lau, D.** : *Ein neuer Beweis für Rosenberg's Vollständigkeitskriterium.* EIK **28**, 149-195 (1992)

[11] **Lo Czukai** : *The completeness theory of partial many-valued logic functions.* Proc. XVII. Internat. Symp. on Multiple-valued Logic, pp. 118-121, Boston 1987

[12] **Pöschel, R.** und **Kalužnin, L. A.** : *Funktionen- und Relationenalgebren.* Berlin 1979

[13] **Romov, B. A.** : *Über maximale Unteralgebren der Algebra der partiellen Funktionen der mehrwertigen Logik.* (Russ.) Kibernetika **1**, 28-36 (1980)

[14] **Rosenberg, I. G.** : *Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken.* Rozpravy Československe Akad. Ved. Řada Mat. Přirod. Věd **80**, 3-93 (1970)

[15] **Rosenberg, I. G.** : *Galois theory for partial algebras.* In: Freese, R. S., and Garcia, O. C.(Eds.): Universal algebra and lattice theory. Proc. 4. Intern. Conf., Puebla 1982, Lecture Notes in Math. **1004**, pp. 257 - 272, Berlin 1983

eingegangen: 10.04.1995

Autor:

Dietlinde Lau
Fachbereich Mathematik
Universität Rostock
Universitätsplatz 1
18051 Rostock