Rostock. Math. Kolloq. **50**, 53–64 (1997)

Subject Classification (AMS)
16S15, 08A05, 08A30

J. Synnatzschke

Zur Erzeugung von Algebren durch Unteralgebren mit Quadrat Null

---

ABSTRACT. For a simple algebra $\mathcal{A}$ with unit, a condition depending on $n \in \mathbb{N}$ is given being equivalent to the possibility to generate $\mathcal{A}$ by n subalgebras having square zero and all except one of them having dimension 1. As a corollary under this condition, the algebra can be generated by two subalgebras with square zero such that one of them has dimension 1 or 2 in dependence on whether n is even or odd. In the case of the algebra $\mathcal{B}(E)$ of all continuous linear operators on a Banach space E, the condition is fulfilled if and only if E is the nth power $E = E_0^n$ of a Banach space E_0. This way by elementary considerations, not only a problem considered by W. Żelazko and afterwards by P. Šemrl is finished but also completely extended to arbitrary simple algebras with unit.

KEY WORDS. Generation of algebras by subalgebras, subalgebras with square zero, commutative subalgebras, operators in powers of Banach spaces

1 Einführung

Für eine Algebra $\mathcal{A}$ ist das Problem ihrer Erzeugung durch eine *minimale* Anzahl von Unteralgebren mit möglichst *einfacher* Struktur von auf der Hand liegendem grundsätzlichem Interesse. Wir werden in der vorliegenden Note Algebren betrachten, die letztendlich durch nur zwei Unteralgebren der Art erzeugt werden können, daß die Multiplikation in ihnen trivial und eine von ihnen nur ein- oder zwei-dimensional ist. Trotz der scheinenden Spezialisierung sind Algebren dieses Typs ganz und gar nicht „exotisch“, und die Klasse solcher Algebren ist noch hinreichend umfangreich, wie weiter unten ersichtlich sein wird.

Wir gehen davon aus, daß in der Situation der Algebra $\mathcal{B}(E)$ aller stetigen linearen Operatoren auf einem (nicht-trivialen) Banach-Raume E zwei nicht offensichtlich etwas gemeinsam habende Probleme, nämlich

- die Darstellbarkeit von E als k-te Potenz $E = E_0^k$ eines Banach-Raumes E_0, d.h. als direkte Summe $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$ paarweise zueinander isomorpher Banach-Räume $E_1, \ldots, E_k$ und
- die Erzeugung von $\mathcal{B}(E)$ durch l Unteralgebren $\mathcal{B}_i$ mit Quadrat Null, d.h. $\mathcal{B}_i^2 = \{xy : x, y \in \mathcal{B}_i\} = \{0\} \quad (i = 1, \ldots, l)$

einen gemeinsamen „Nenner" darin finden, daß folgende Bedingungen zueinander äquivalent sind (siehe [3, 6]):

(i) $E = E_0^2$

(ii) $\mathcal{B}(E)$ wird von einer Unteralgebra $\mathcal{B}_0$ und einem Operator V mit jeweils Quadrat Null erzeugt.

(iii) $\mathcal{B}(E)$ gestattet mit einer Unteralgebra $\mathcal{B}_0$ und einem Operator V mit jeweils Quadrat Null die Darstellung $\mathcal{B}(E) = \mathcal{B}_0 + V\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0 V + V\mathcal{B}_0 V$.

Genauer, im Falle $E = E_0^n$ wird $\mathcal{B}(E)$ einerseits algebraisch durch n Unteralgebren mit Quadrat Null erzeugt, die bis auf eine alle ein-dimensional sind. Andererseits kann das System der $n-1$ ein-dimensionalen Unteralgebren durch eine einzige $(n-1)$-dimensionale Unteralgebra ersetzt werden. Gewissermaßen dazwischen liegt nun die sich als Folgerung ergebende „optimale" Aussage, daß $\mathcal{B}(E_0^n)$ durch nur zwei Unteralgebren mit Quadrat Null erzeugt wird, von denen die eine nur ein- oder zwei-dimensional in Abhängigkeit davon ist, ob n gerade oder ungerade ist.

Das inverse Problem, ob im Falle der Erzeugung von $\mathcal{B}(E)$ durch n Unteralgebren mit Quadrat Null nicht $E = E_0^n$ sei, war bereits von W. Żelasko aufgeworfen und für $n = 2$ positiv [6], im allgemeinen Fall von P. Šemrl [3] aber negativ beantwortet worden (siehe auch [7] und die dort zitierte Literatur). Hier setzen wir an, und zwar werden wir die Situation $E = E_0^n$ auf naheliegende Weise mit Hilfe von Operatoren charaktrisieren und dies auf eine beliebige einfache Algebra $\mathcal{A}$ mit Eins übertragen (Abschnitt 2), dann nach einigen Hilfssätzen (Abschnitt 3) als wichtigstes Resultat zueinander äquivalente Bedingungen dafür angeben, daß $\mathcal{A}$ durch n Unteralgebren mit Quadrat Null erzeugt wird, von denen bis auf eine alle ein-dimensional sind (Abschnitt 4), und abschließend als Folgerung eine Reihe weiterer Aussagen, insbesondere für den Fall n gerade bringen (Abschnitt 5).

Interessant und überraschend in diesem Zusammenhang war, daß im Falle der Erzeugung von $\mathcal{B}(E)$ durch zwei Unteralgebren mit Quadrat Null eine von ihnen als endlich-dimensional angenommen [3] und wiederum durch eine Anzahl ein-dimensionaler Unteralgebren ersetzt werden kann – ein Fakt, der im Rahmen unserer Situation einer einfachen Algebra $\mathcal{A}$ mit Eins, wie man leicht zeigen kann, erhalten bleibt.

Wir wollen noch bemerken, daß das Problem der *algebraischen* (d.h. diskret topologischen) Erzeugung einer Algebra durch Unteralgebren mit Quadrat Null von derjenigen der (nicht-diskret) *topologischen* Erzeugung sehr verschieden ist, denn es gibt z.B. Banach-Räume E derart, daß $\mathcal{B}(E)$ durch keine Anzahl von Unteralgebren mit Quadrat Null algebraisch erzeugt werden kann [3], während im Falle $\dim E > 1$ stets eine Erzeugung in der starken Topologie durch nur zwei solche Unteralgebren möglich ist [5]. Von Interesse beim Problem der algebraischen Erzeugung ist auch ein für eine Klasse allgemeiner Algebren $\mathcal{A}$ bewiesener Fakt, der im Falle $\mathcal{B}(E)$ besagt, daß das Ideal aller endlich-dimensionalen Operatoren durch zwei Unteralgebren ein-dimensionaler Operatoren mit Quadrat Null erzeugt werden kann [4].

Ferner, Unteralgebren mit Quadrat Null sind trivialerweise kommutativ. Interessiert allgemeiner die topologische Erzeugung einer Algebra durch *kommutative* Unteralgebren, so sei für den Fall eines separablen Hilbert-Raumes H noch angeführt, daß $\mathcal{B}(H)$ in der starken Topologie durch zwei Operatoren (folglich durch zwei kommutative Unteralgebren) erzeugt werden kann, die zudem als unitär [1] oder hermitesch [2] angenommen werden können.

2 Der Begriff der n-zyklischen Zerlegung der Eins

Wir vereinbaren, bei fixiertem $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ größere Werte natürlicher Indizes immer modulo n zu verstehen und erinnern daran, daß eine Algebra $\mathcal{A}$ *einfach* heißt, wenn $x\mathcal{A}y = \{0\}$ für gewisse Elemente $x, y \in \mathcal{A}$ nur im Falle $x = 0$ oder $y = 0$ möglich ist. Einen nicht-trivialen Vektorraum X werden wir *n-te Potenz* eines Vektorraumes X_0 nennen und $X = X_0^n$ schreiben, wenn $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ mit paarweise zueinander isomorphen Vektorräumen $X_1, \ldots, X_n$ ist.

Bezeichnet $\mathcal{A} = \mathcal{L}(X)$ die Algebra aller linearen Operatoren in $X = X_0^n$, sind $F_i : X_i \to X_{i+1}$ Isomorphismen und P_i die Projektoren auf X_i, so werden durch $U_i = F_i^{-1} P_{i+1}$ und $V_i = F_i P_i$ zwei n-Tupel nicht-trivialer linearer Operatoren $(U_i)_{i=1}^n$ mit $U_i U_j = 0$ für $i \neq j - 1$ und $(V_i)_{i=1}^n$ mit $V_i V_j = 0$ für $i \neq j + 1$ definiert, die den beiden Bedingungen

(i) $V_i U_i = U_{i+1} V_{i+1}$

(ii) $U_i V_i U_i = U_i$ und $V_i U_i V_i = V_i$

genügen und für die $\sum_{i=1}^n U_i V_i = I_X$ (I_X der identische Operator in X) ist. Umgekehrt, sind in einer Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{L}(X)$ zwei n-Tupel nicht-trivialer linearer Operatoren $(U_i)_{i=1}^n$

und $(V_i)_{i=1}^n$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) gegeben, so werden durch $P_i = U_iV_i$ nicht-triviale Projektoren definiert und die durch sie bestimmten Unterräume X_i bilden eine direkte Zerlegung des Grundraumes X. Die Beziehung $P_i = (P_iU_iP_{i+1})(P_{i+1}V_iP_i)$ zeigt dabei, daß jeder Projektor P_i als Produkt von Operatoren $F_i = P_{i+1}V_iP_i : X_i \longrightarrow X_{i+1}$ und $G_i = P_iU_iP_{i+1} : X_{i+1} \longrightarrow X_i$ dargestellt werden kann, die sich mit Hilfe der obigen Eigenschaften als zueinander inverse Isomorphismen erweisen. Also ist X_i isomorph zu X_{i+1} und damit $X = X_0^n$. Diese Überlegungen geben nun Anlaß zu der folgenden

Definition 2.1 *Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Eins e und $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Unter einer n-*zyklischen Zerlegung *$(u,v)_n$ von e werden wir zwei n-Tupel nicht-trivialer Elemente $u = (u_i)_{i=1}^n$ mit $u_iu_j = 0$ für $i \neq j-1$ und $v = (v_i)_{i=1}^n$ mit $v_iv_j = 0$ für $i \neq j+1$ verstehen, die durch die beiden Bedingungen*

(i) $v_iu_i = u_{i+1}v_{i+1}$

(ii) $u_iv_iu_i = u_i$ *und* $v_iu_iv_i = v_i$

miteinander gekoppelt sind und für die zusätzlich $\sum_{i=1}^n u_iv_i = e$ gilt.

Beispiel 2.2 [1] Wir identifizieren die Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ $(2 \leq n \in \mathbb{N})$ auf natürliche Weise mit der Algebra $\mathcal{M}_{n\times n}$ aller $(n\times n)$-Matrizen $A = (a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1}^n$ und definieren Matrizen $U_i = (u_{\alpha\beta}^{(i)})_{\alpha,\beta=1}^n$ $(1 \leq i \leq n-1)$ und $U_n = (u_{\alpha\beta}^{(n)})_{\alpha,\beta=1}^n$ gemäß

$$u_{\alpha\beta}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = i, \beta = i+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad u_{\alpha\beta}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\{e_i\}_{i=1}^n$ die natürliche Basis in $\mathbb{R}^n$ und $P_i \in \mathcal{M}_{n\times n}$ der Projektor auf den von e_i erzeugten Unterraum. Dann ist $U_iV_i = P_i$ und $(U,V)_n$ mit $U = (U_i)_{i=1}^n$ und $V = (V_i)_{i=1}^n$ ist eine n-zyklische Zerlegung der Einheitsmatrix I in $\mathcal{M}_{n\times n}$.

Wir schließen für die Situation einer n-zyklischen Zerlegung der Eins einige Bemerkungen an. So ist aus $u_i = u_iu_{i+1}v_{i+1}$ und $v_i = v_iv_{i-1}u_{i-1}$ sofort klar, daß $u_iu_{i+1} \neq 0$ und $v_iv_{i-1} \neq 0$ sein muß (siehe auch Lemma 3.3). Wegen $u_iv_j = u_iu_{i+1}v_{i+1}v_j$ und $v_iu_j = v_iv_{i-1}u_{i-1}u_j$ ist auch sofort klar, daß $u_iv_j = 0$ und $v_iu_j = 0$ für $i \neq j$ sein muß und durch $p_i = u_iv_i$ paarweise zueinander orthogonale Projektoren definiert werden. Wegen unserer Vereinbarung, n übertreffende Werte von Indizes immer modulo n zu verstehen, kommen in der obigen Definition die Bedingungen $u_iu_j = 0$ für $i \neq j-1$ und $v_iv_j = 0$ für $i \neq j+1$ übrigens erst im Falle $n \geq 3$ voll zum Tragen, und man überlegt sich leicht, daß eine Algebra $\mathcal{A}$ genau dann eine 2-zyklische Zerlegung der Eins e hat, wenn es in ihr Elemente u und v mit Quadrat Null derart gibt, daß $uv + vu = e$ ist (siehe auch Theorem 5.5).

[1] Der Autor dankt dem Gutachter herzlich für dieses Beispiel.

3 Einige Hilfssätze

Im folgenden wird in einer Algebra $\mathcal{A}$ eine Konstruktion der Form

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 + \sum_{i=2}^{n}(v_i \cdots v_2)\mathcal{A}_0 + \sum_{j=2}^{n}\mathcal{A}_0(v_n \cdots v_j) + \sum_{i,j=2}^{n}(v_i \cdots v_2)\mathcal{A}_0(v_n \cdots v_j) \tag{1}$$

betrachtet werden, wobei $\mathcal{A}_0$ eine Unteralgebra mit Quadrat Null ist und die Elemente $v_2, \ldots, v_n$ insbesondere Teil einer n-zyklischen Zerlegung der Eins sein können.

Lemma 3.1 *Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, $\mathcal{A}_0$ eine Unteralgebra mit Quadrat Null sowie der Eigenschaft $\mathcal{A}_0\mathcal{A}\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_0$ und $v_i \in \mathcal{A}$ $(i = 2, \ldots, n)$ beliebige Elemente. Dann wird durch* (1) *eine Unteralgebra definiert.*

Beweis: Offensichtlich ist $\mathcal{A}_1$ ein Vektorraum und die Eigenschaft $\mathcal{A}_0\mathcal{A}\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_0$ sichert seine Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation. □

Nicht jede Unteralgebra $\mathcal{A}_0$ mit Quadrat Null erfüllt die im vorigen Lemma benutzte Eigenschaft $\mathcal{A}_0\mathcal{A}\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_0$. Wir werden als nächstes aber zeigen, daß dies stets für eine gewisse Erweiterung $\mathcal{B}_0 \supset \mathcal{A}_0$ der Fall ist (vgl. [6]).

Lemma 3.2 *Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra und $\mathcal{A}_0$ eine Unteralgebra mit Quadrat Null. Dann existiert eine Unteralgebra $\mathcal{B}_0 \supset \mathcal{A}_0$ mit Quadrat Null sowie $\mathcal{B}_0\mathcal{A}\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_0$.*

Beweis: Sowohl durch

$$\mathcal{B}_{0l} = \left\{ b \in \mathcal{A} \,\middle|\, b\mathcal{A}_0 = \{0\}, \text{ und } b'\mathcal{A}_0 = \{0\} \text{ impliziert } b'b = 0 \right\}$$

als auch

$$\mathcal{B}_{0r} = \left\{ c \in \mathcal{A} \,\middle|\, \mathcal{A}_0 c = \{0\}, \text{ und } \mathcal{A}_0 c' = \{0\} \text{ impliziert } cc' = 0 \right\}$$

wird eine Unteralgebra mit den angezeigten Eigenschaften definiert. Für die spätere Anwendung dieses Lemmas beim Beweis der Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) im Theorem 4.2 setzen wir $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_{0l} \cap \mathcal{B}_{0r}$. □

Als nächstes werden wir zeigen, daß die Konstruktion (1) im Falle einer n-zyklischen Zerlegung der Eins nicht trivial ist.

Lemma 3.3 *Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit n-zyklischer Zerlegung der Eins $\left((u_i)_{i=1}^n, (v_i)_{i=1}^n\right)$. Dann sind für $2 \le i < j \le n$ alle Produkte $v_i \cdots v_j$ mit jeweils lückenloser Indexfolge ungleich Null.*

Beweis: Wir starten mit der Beziehung $v_n = v_n u_n v_n = v_n v_{n-1} u_{n-1}$ und setzen in diese $v_{n-1} = v_{n-1} v_{n-2} u_{n-2}$ ein. Wiederholte Anwendung dieses Prinzips für fallenden Index führt zur Darstellung $v_n = (v_n \cdots v_2) v_1 (u_1 \cdots u_{n-1})$ und die Behauptung folgt $\square$

Die Überlegungen zum Beweis der folgenden Aussage sind die gleichen wie bei Lemma 3.1, und wir unterlassen deshalb irgendwelche Ausführungen.

Lemma 3.4 *Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, $\mathcal{A}_0$ eine Unteralgebra mit Quadrat Null sowie $\mathcal{A}_0\mathcal{A}\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_0$ und $v_i \in \mathcal{A}$ $(i = 2, \ldots, n)$ Elemente mit $v_i v_j = 0$ $(i \neq j+1)$ sowie $v_{i+1}\mathcal{A}_0 v_j = \{0\}$ $(2 \leq i, j \leq n-1)$. Dann ist*

$$\mathcal{A}_2 = \sum_{2 \leq i \leq n} \mathbb{R} v_i + \sum_{\substack{i>j \\ 2 \leq i,j \leq n}} \mathbb{R}(v_i \cdots v_j) + \mathcal{A}_1 \tag{2}$$

mit $\mathcal{A}_1$ gemäß (1) *gleich der von $\mathcal{A}_0$ und den Elementen v_i $(i = 2, \ldots, n)$ erzeugten Unteralgebra.*

Schließlich formulieren wir das folgende

Lemma 3.5 *Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Eins e, die von einer Unteralgebra $\mathcal{A}_0$ mit Quadrat Null sowie $\mathcal{A}_0\mathcal{A}\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_0$ und Elementen $v_i \in \mathcal{A}$ $(i = 2, \ldots, n)$ mit $v_i v_j = 0$ $(i \neq j+1)$ sowie $v_{i+1}\mathcal{A}_0 v_j = \{0\}$ $(2 \leq i, j \leq n-1)$ erzeugt wird. Dann gestattet $\mathcal{A}$ die Darstellung* (1).

Beweis: Nach Lemma 3.4 hat $\mathcal{A}$ die Form (2). Wir betrachten die ihr entsprechende Darstellung von e und bezeichnen in dieser mit e_{ij} die Elemente aus den Summanden $(v_i \cdots v_2) e_{ij} (v_n \cdots v_j)$ von (1). Multipliziert man die Darstellung von links mit v_i und von rechts mit v_{i-1} durch, so wird sich $v_i v_{i-1} = (v_i \cdots v_2) e_{(i-1)i} (v_n \cdots v_{i-1})$ $(3 \leq i \leq n)$ ergeben. Das zeigt, daß alle Summanden unter dem zweiten Summenzeichen von (2) bereits in $\mathcal{A}_1$ enthalten sind. Auf gleiche Weise können wir uns davon überzeugen, daß auch alle Summanden unter dem ersten Summenzeichen von (2) bereits in $\mathcal{A}_1$ enthalten sind und damit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ ist. $\square$

4 Das Hauptresultat

Gestattet eine Algebra $\mathcal{A}$ eine Darstellung der Form (1), so kann jedes ihrer Elemente in der Form

$$a = a_0 + \sum_{i=1}^{n} (v_i \cdots v_2) a_i' + \sum_{i=1}^{n} a_j''(v_n \cdots v_j) + \sum_{i,j=1}^{n} (v_i \cdots v_2) a_{i,j} (v_n \cdots v_j) \tag{3}$$

mit gewissen Elementen $a_0, a_i', a_j'', a_{ij} \in \mathcal{A}_0$ dargestellt werden und es steht nun noch die Frage nach deren Eindeutigkeit.

Lemma 4.1 *Es sei $\mathcal{A}$ eine einfache Algebra mit Eins, $v_i \in \mathcal{A}$ $(i = 2, \ldots, n)$ Elemente mit $v_i v_j = 0$ $(i \neq j+1)$ und $\mathcal{A}_0$ eine Unteralgebra mit Quadrat Null sowie $v_{i+1}\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0 v_j = \{0\}$ $(2 \leq i, j \leq n-1)$. Gestattet dann $\mathcal{A}$ die Darstellung (1), so sind in der entsprechenden Darstellung (3) für $a \in \mathcal{A}$ die Elemente a_0, a'_i, a''_j und a_{ij} eindeutig bestimmt.*

Beweis: Es kann $a = 0$ angenommen und muß dann $a_0 = a'_i = a''_j = a_{kl} = 0$ gezeigt werden. Dazu schreiben wir (3) in der Form

$$\sum_{i=2}^{n} (v_i \cdots v_2)\left(a'_i + \sum_{j=2}^{n} a_{ij}(v_n \cdots v_j)\right) + \left(a_0 + \sum_{j=2}^{n} a''_j (v_n \cdots v_j)\right) = 0 \qquad (4)$$

und schränken uns auf einen Hinweis dessen ein, wie die Aussage für die Elemente a_0 und a''_j im zweiten Summanden bewiesen werden kann (der Beweis für die Elemente im ersten Summanden würde analog verlaufen). Dazu bezeichnen wir den zweiten Summanden von (4) mit b und die Summe in ihm mit s und weisen nacheinander mit der gleichen Argumentation $b = 0, a_0 = 0, a''_j(v_n \cdots v_j) = 0, \ \ldots \ , a''_j v_n = 0$ und schließlich $a''_j = 0$ nach. So ist z.B. wegen $\mathcal{A}_0^2 = \{0\}$ offensichtlich $\mathcal{A}_0 b = \{0\}$ und wegen $v_{i+1}\mathcal{A}_0 = \{0\}$ ist $v_{i+1} b = 0$ für $2 \leq i \leq n$. Multipliziert man (4) von links mit v_2, so folgt auch $v_2 b = 0$. Damit ist $\mathcal{A} b = \{0\}$ und deshalb notwendig $b = 0$. □

Theorem 4.2 *Es sei $\mathcal{A}$ eine einfache Algebra mit Eins e und $v_i \in \mathcal{A}$ $(i = 2, \ldots, n)$ Elemente mit $v_i v_j = 0$ $(i \neq j+1)$. Dann sind die folgenden Bedingungen zueinander äquivalent:*

- **(i)** *Die Elemente v_i $(i = 2, \ldots, n)$ können zu einer n-zyklischen Zerlegung der Eins $\left((u_i)_{i=1}^n, (v_i)_{i=1}^n\right)$ ergänzt werden.*
- **(ii)** *Es existiert eine Unteralgebra $\mathcal{A}_0$ mit Quadrat Null und $v_{i+1}\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0 v_j = \{0\}$ $(2 \leq i, j \leq n-1)$ derart, daß $\mathcal{A}$ von $\mathcal{A}_0$ und $v_2, \ldots, v_n$ erzeugt wird.*
- **(iii)** *Es existiert eine Unteralgebra $\mathcal{A}_0$ mit Quadrat Null und $v_{i+1}\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0 v_j = \{0\}$ $(2 \leq i, j \leq n-1)$ derart, daß sich $\mathcal{A}$ in der Form (1) darstellen läßt.*

Beweis: *Die Implikation* (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\left((u_i)_{i=1}^n, (v_i)_{i=1}^n\right)$ eine n-zyklische Zerlegung der Eins e. Durch $\mathcal{A}_0 = v_1 \mathcal{A} v_1$ wird dann offensichtlich eine Unteralgebra mit $\mathcal{A}_0^2 = \{0\}$ und $v_{i+1}\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0 v_j = \{0\}$ definiert. Ferner, mit $u_{i+1}v_{i+1} = v_i u_i = v_i u_i v_i u_i = (v_i v_{i-1}) u_{i-1}(u_i)$ beginnend und hierin nacheinander $u_k = v_{k-1}u_{k-1}u_k$ $(k = i-1, \ldots, 2)$ einsetzend gelangt man zur Darstellung $u_{i+1}v_{i+1} = (v_i \cdots v_2)v_1(u_1 \cdots u_i)$. Analog, mit $u_j v_j = u_j v_j u_j v_j = (u_j u_{j+1}) v_{j+1}(v_j)$ beginnend und hierin nacheinander $v_l = u_{l+1}v_{l+1}v_l$ $(l = j+1, \ldots, n)$ einsetzend gelangt man zur Darstellung $u_j v_j = (u_j \cdots u_n u_1) v_1 (v_n \cdots v_j)$. In der trivialen Identität $a = eae$ für ein beliebiges Element $a \in \mathcal{A}$ ersetzen wir nun e links und rechts entsprechend durch die beiden Darstellungen

$$e = v_1 u_1 + \sum_{i=2}^{n} u_{i+1} v_{i+1} \qquad \text{und} \qquad e = u_1 v_1 + \sum_{j=2}^{n} u_j v_j$$

und die Summanden $u_{i+1} v_{i+1}$ und $u_j v_j$ durch deren oben erhaltene Darstellungen. Hieraus ergibt sich sofort, daß $\mathcal{A}$ von $\mathcal{A}_0$ und $v_2, \dots, v_n$ erzeugt wird.

Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii): Die Eigenschaft $v_{i+1}\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0 v_j = \{0\}$ $(2 \leq i, j \leq n-1)$ überträgt sich offensichtlich auf die im Beweis von Lemma 3.2 konstruierte Unteralgebra $\mathcal{B}_0$, so daß von Anfang an $\mathcal{A}_0 \mathcal{A} \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_0$ angenommen werden kann und Lemma 3.5 die Aussage (iii) sichert.

Die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i): Wie im vorigen Schritt kann $\mathcal{A}_0 \mathcal{A} \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_0$ und (1) angenommen werden. Sei

$$e = e_0 + \sum_{i=2}^{n} (v_i \cdots v_2) e_i' + \sum_{j=2}^{n} e_j''(v_n \cdots v_j) + \sum_{i,j=2}^{n} (v_i \cdots v_n) e_{ij} (v_n \cdots v_j) \tag{5}$$

die entsprechende Darstellung der Eins. Wir multiplizieren diese von links bzw. rechts mit v_i $(2 \leq i \leq n)$ durch. Gleichsetzung beider Resultate führt mit Hilfe von Lemma 4.1 zu

$$e = (v_n \cdots v_2) a + a (v_n \cdots v_2) + \sum_{i=2}^{n-1} (v_i \cdots v_2) a (v_n \cdots v_{i+1}) \tag{6}$$

mit einem gewissen nicht-trivialen Element $a \in \mathcal{A}_0$. Wird diese Darstellung mit v_i durchmultipliziert (gleich ob von links oder rechts), so erhält man sofort die Beziehung $v_i = (v_i \cdots v_2) a (v_n \cdots v_i)$ $(2 \leq i \leq n)$. Setzt man ferner die Darstellung (6) in $e^2 = e$ ein, so kann mit Hilfe von Lemma 4.1 auf $a(v_n \cdots v_2) a = a$ geschlossen werden. Durch

$$\begin{aligned} u_2 &= a(v_n \cdots v_3) \\ u_i &= (v_{i-1} \cdots v_2) a (v_n \cdots v_{i+1}) \qquad (3 \leq i \leq n-1) \\ u_n &= (v_{n-1} \cdots v_2) a \end{aligned}$$

werden dann Elemente $u_i \in \mathcal{A}$ $(2 \leq i \leq n)$ definiert, die zusammen mit $u_1 = v_n$ und $v_1 = u_n$ eine n-zyklische Zerlegung der Eins $\big((u_i)_{i=1}^n, (v_i)_{i=1}^n\big)$ bilden. $\square$

5 Folgerungen

Es sei $\mathcal{A}$ eine einfache Algebra mit n-zyklischer Zerlegung der Eins. Aus Theorem 4.2 ergibt sich dann einerseits auf offensichtliche Weise, daß $\mathcal{A}$ durch n Unteralgebren mit Quadrat Null erzeugt wird, die bis auf eine alle ein-dimensional sind. Andererseits kann deren Gesamtheit durch eine einzige $(n-1)$-dimensionale Unteralgebra ersetzt werden. Als in gewissem Sinne dazwischen liegendes „optimales" Resultat wird sich im folgenden noch ergeben, daß $\mathcal{A}$ durch zwei Unteralgebren $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}_0'$ mit jeweils Quadrat Null und $\dim \mathcal{A}_0' = 1$ oder $\dim \mathcal{A}_0' = 2$ in Abhängigkeit davon erzeugt wird, ob n gerade oder ungerade ist.

Definition 5.1 *Wir werden eine n-zyklische Zerlegung der Eins einer Algebra* gerade *oder* ungerade *nennen, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist.*

Lemma 5.2 *Es sei $\mathcal{A}$ eine einfache Algebra mit n-zyklischer Zerlegung der Eins. Ist $n = r \cdot s$ mit $2 \leq r, s \in \mathbb{N}$, so hat $\mathcal{A}$ auch eine r-zyklische Zerlegung der Eins.*

Beweis: Eine r-zyklische Zerlegung der Eins $\left((u_i')_{i=1}^r, (v_i')_{i=1}^r\right)$ kann sofort durch $u_i' = \sum_{l=1}^s u_{(l-1)r+i}$ und $v_i' = \sum_{l=1}^s v_{(l-1)r+i}$ $(i = 1, \ldots, r)$ angegeben werden. □

Theorem 5.3 *Eine einfache Algebra $\mathcal{A}$ mit n-zyklischer Zerlegung der Eins kann durch zwei Unteralgebren $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}_0'$ mit Quadrat Null und $\dim \mathcal{A}_0' = 1$ oder $\dim \mathcal{A}_0' = 2$ in Abhängigkeit davon erzeugt werden, ob n gerade oder ungerade ist.*

Beweis: Ist n gerade, so kann nach Lemma 5.2 $e = uv + vu$ mit $u^2 = v^2 = 0$ angenommen und $\mathcal{A}_0 = u\mathcal{A}u$ sowie $\mathcal{A}_0' = \mathbb{R}v$ gesetzt werden.

Ist dagegen n ungerade und $\left((u_i)_{i=1}^{2l+1}, (v_i)_{i=1}^{2l+1}\right)$ eine $n = (2l+1)$-zyklische Zerlegung der Eins, so werden durch $u = \sum_{i=1}^l v_{2i}$ und $v = \sum_{i=1}^l u_{2i}$ Elemente mit Quadrat Null sowie $uu_1 = u_1u = vv_1 = v_1v = 0$ und $e = uv + vu + u_1v_1$ definiert, und es kann $\mathcal{A}_0 = u\mathcal{A}u + u\mathcal{A}u_1 + u_1\mathcal{A}u + u_1\mathcal{A}u_1$ und $\mathcal{A}_0' = \mathrm{Lin}\,\{v, v_1\}$ gesetzt werden. □

Beispiel 5.4 Ausgehend vom Beispiel 2.2 für $n = 4$ liefert Lemma 5.2 eine 2-zyklische Zerlegung $UV + VU = I$ der Eins in der Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{4\times 4}$. Diese wird folglich durch die Unteralgebra

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

und die Matrix $V_0 = U_1 + U_3$ erzeugt. Dabei ist $\mathcal{A}_0^2 = \{0\}$ und $V_0^2 = 0$.

Für $n = 5$ erhalten wir $UV + VU + U_1V_1 = I$ mit $U = V_2 + V_4$ und $V = U_2 + U_4$. Die Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{5\times5}$ wird durch die Unteralgebra

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \qquad (a, b, c, d, \in \mathbb{R})$$

und die beiden Matrizen V und V_1 erzeugt. Dabei ist $\mathcal{A}_0^2 = \{0\}$ und $V^2 = 0$ sowie $V_1^2 = 0$.

Wir werden nun über Theorem 4.2 für $n = 2$ hinaus noch mehrere zueinander äquivalente Bedingungen dafür angeben, daß eine einfache Algebra eine *gerade* zyklische Zerlegung der Eins gestattet. Den mehr oder weniger auf der Hand liegenden Beweis unterlassen wir.

Theorem 5.5 *Es sei $\mathcal{A}$ eine einfache Algebra mit Eins e. Dann sind die folgenden Bedingungen zueinander äquivalent.*

(i) *Es existiert eine gerade zyklische Zerlegung der Eins.*

(ii) *Es existiert eine 2-zyklische Zerlegung der Eins.*

(iii) *Es existieren Elemente u und v mit Quadrat Null derart, daß $uv + vu = e$ ist.*

(iv) *Es existiert eine Unteralgebra $\mathcal{A}_0$ und ein Element v mit jeweils Quadrat Null derart, daß $\mathcal{A}$ von $\mathcal{A}_0$ und v erzeugt wird.*

(v) *Es existiert eine Unteralgebra $\mathcal{A}_0$ und ein Element v mit jeweils Quadrat Null derart, daß $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + v\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0 v + v\mathcal{A}_0 v$ ist.*

Beispiel 5.6 Beispiel 2.2 liefert im Falle $n = 2$ eine Matrix $V_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und durch $\mathcal{B}_0 = \mathbb{R}B_0$ mit $B_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ eine Unteralgebra mit jeweils Quadrat Null. Wegen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = cB_0 + V(aB_0) + (dB_0)V + V(bB_0)V$$

gilt dabei für die Algebra $\mathcal{A}$ die Zerlegung $\mathcal{A} = \mathcal{B}_0 + V\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0 + V\mathcal{B}_0 V$.

Ein Theorem analog zu Theorem 5.5 für Algebren $\mathcal{A}$ mit *ungerader* zyklischer Zerlegung der Eins kann nicht formuliert werden. Wir wollen aber in diesem Zusammenhang bemerken, daß $\mathcal{A}$ nach Theorem 5.3 von zwei Unteralgebren $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}_0' = \mathrm{Lin}\,\{v, v_1\}$ mit Quadrat Null sowie $\mathcal{A}_0\mathcal{A}\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_0$ erzeugt wird und $e = e_1v + ve_2 + e_3v_1$ mit $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{A}_0$ ist. Im allgemeinen Fall der Erzeugung einer beliebigen Algebra mit Eins durch zwei solche Unteralgebren ist dagegen $e = e_1v + ve_2 + e_3v_1 + v_1e_4$, also in dieser Darstellung der Eins ein zusätzlicher Summand v_1e_4 vorhanden.

Literatur

[1] **Davis, C.** : *Generators of the ring of bounded operators.* Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 970 – 972 (1955)

[2] **Nordgren, E. A., Radjabalipour, M., Radjavi, H.** und **Rosenthal, P.** : *Quadratic operators and invariant subspaces.* Studia Math. **88**, 263 – 268 (1988)

[3] **Šemrl, P.** : *On algebraic generation of $B(X)$ by two subalgebras with square zero.* Studia Math. **97**, 139 – 142 (1990)

[4] **Synnatzschke, J.** : *Zur Erzeugung des Ideals der endlichdimensionalen Elemente einer Algebra durch zwei Unteralgebren eindimensionaler Elemente mit trivialem Quadrat.* Rostock. Math. Kolloq. **45**, 21 – 24 (1991)

[5] **Żelazko, W.** : *$B(X)$ is generated in strong operator topology by two subalgebras with square zero.* Proc. Royal Irish Acad. (Sec. A) **88**, 19 – 21 (1988)

[6] **Żelazko, W.** : *Algebraic generation of $\mathcal{B}(X)$ by two subalgebras with square zero.* Studia Math. **90**, 205 – 212 (1988)

[7] **Żelazko, W.** : *Generation of $B(X)$ by two commutative subalgebras – results and open problems.* Banach Center Publ. **30**, 363 – 367 (1994)

eingegangen: 12.05.1995 **revidierte Fassung:** 1.3.1996

Autor:

J. Synnatzschke
Institut für Mathematik der Universität Leipzig
Augustuspl. 10
D – 04109 Leipzig
Germany