Rostock. Math. Kolloq. **51**, 177–182 (1997)

Subject Classification (AMS)
51M25, 03E15, 00A35

Klaus-Dieter Drews

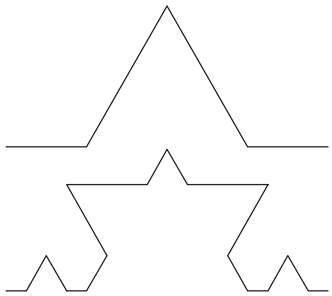
Zu zwei Aufgaben aus Anfangsgründen der fraktalen Geometrie

Gewidmet den Herren Professoren
G. Maeß, H. Poppe *und* G. Wildenhain

Verfolgt man Zeitschriften zur Elementarmathematik bzw. Didaktik der Mathematik, so findet man auch dort Darstellungen von Grundgedanken aus der in jüngerer Zeit hervorgetretenen fraktalen Geometrie. Manche bekannten Kurven oder Mengen beispielsweise ordnen sich hier ein, erscheinen unter neuem Gesichtspunkt, geben Anlaß zu geänderten Betrachtungsweisen. Dem Einstieg in das genannte Teilgebiet sind die im vorigen Jahr erschienen Artikel [1] und [2] von Herrn H. Zeitler gewidmet. Aus diesen Artikeln werden nachfolgend zwei Aufgaben vorgestellt, und Anliegen der weiteren Ausführungen dazu ist es, modifizierte Lösungswege zu beschreiten, die teilweise auch zu verbesserten Ergebnissen führen.

1 Variierte Koch-Schneeflocke

Die Konstruktion zunächst der variierten Koch-*Kurve* ([1], S. 34) beginnt mit einer Strecke der Länge 1. Über ihrer symmetrisch zum Mittelpunkt gelegenen Teilstrecke halber Länge wird ein gleichseitiges Dreieck errichtet und dann dessen Grundlinie herausgenommen.



In jedem weiteren Schritt wird auf jede Strecke a des bisher konstruierten Polygons derselbe Prozeß angewendet, d. h., die beiden mittleren Viertel von a werden durch zwei Seiten des über ihnen (stets nach 'außen') errichteten gleichseitigen Dreiecks ersetzt, kurz: der Seite a wird dieses Dreieck *hinzugefügt.*

Die Schritte werden unbeschränkt oft wiederholt, in der Grenzlage ergibt sich die variierte Koch-Kurve.

Setzt man variierte Koch-Kurven an die Stelle der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks (nach außen 'gestülpt'), so erhält man die in Rede stehende variierte KOCH-Schneeflocke. Der Umfang dieser Kurve ist unbeschränkt, nochmals bestimmt werden soll im Anschluß ihr Inhalt.

(Bei der 'ursprünglichen' KOCH-Kurve erfolgt die Zerlegung der Strecken in *drei* gleich lange Teile, und über dem mittleren wird jeweils ein gleichseitiges Dreieck errichtet – Inhalt der zugehörigen KOCH-Schneeflocke ist $\frac{2}{5}\sqrt{3}$.)

Zuerst der Inhalt unter einer variierten KOCH-*Kurve*: Im 0. Konstruktionsschritt wird der Ausgangsstrecke ein gleichseitiges Dreieck mit dem Inhalt F_0 hinzugefügt:

$$F_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3}\,.$$

Sei nun im $(n-1)$-ten Schritt $(n-1 \geq 0)$ einer (beliebig herausgegriffenen) Seite a des vorher entstandenen Polygons ein Dreieck des Inhalts f_a hinzugefügt worden, wodurch sich in der Summe über alle Seiten der Gesamtinhalt unter dem Polygon um F_{n-1} vergrößert haben möge.

Nach dem n-ten Schritt (also nach zwei durchgeführten Schritten) sind dann der ursprünglichen Seite a neben dem erwähnten Dreieck noch vier weitere Dreiecke hinzugefügt worden, die zusammen folgenden Inhalt f_a^* haben:

$$f_a^* = 2 \cdot \frac{f_a}{2^2} + 2 \cdot \frac{f_a}{4^2} = \frac{5}{8} \cdot f_a\,.$$

Für die gesamte im n-ten Schritt hinzukommende Fläche F_n gilt daher

$$F_n = \frac{5}{8}F_{n-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^n F_0\,,$$

und die Fläche unter der variierten KOCH-Kurve ergibt sich als Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n F_0 = \frac{8}{3}F_0\,.$$

Infolgedessen erhält man für den gesuchten Inhalt der oben beschriebenen variierten KOCH-*Schneeflocke* das Ergebnis

$$\frac{1}{4}\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{8}{3}F_0 = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,.$$

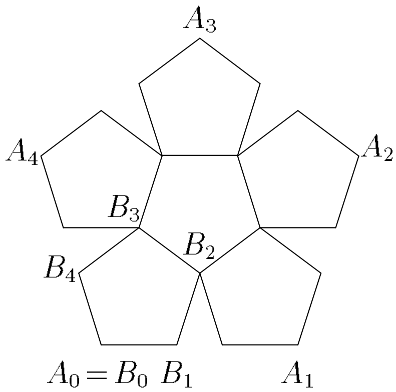
Dieser Wert korrigiert den in [1] irrtümlicherweise angegebenen.

Eine analoge Behandlung des allgemeinen Konstruktionsprozesses, bei dem Polygonseiten in N (≥ 3) gleich lange Teile geteilt und die symmetrisch zum Mittelpunkt gelegenen Strecken aus $N-2$ solchen Teilstücken jeweils durch zwei Seiten des über ihnen errichteten gleichseitigen Dreiecks ersetzt werden, bringt kein weiteres Resultat, da es – im Gegensatz zu den Fällen $N = 3, 4$ – bereits für $N = 5$ zu unerwünschten Überlappungen von hinzugefügten Dreiecken kommt, wie schon eine Skizze anzeigt, ein Nachrechnen bestätigt.

2 N-Eck Cantor-Staub

Die Konstruktion geht aus von der abgeschlossenen Fläche $\boldsymbol{P}$ eines regulären N-Ecks mit den Eckpunkten $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ ($N \geq 3$, aber auch $N = 2$ kann sinngemäß zugelassen werden). Dieses N-Eck werde im ersten Schritt durch N simultane zentrische Strekungen an jedem seiner Eckpunkte A_i mit festem Streckungsfaktor μ ($0 < \mu < 1$) in N verkleinerte N-Ecke $\boldsymbol{P}_i^{(1)}$ abgebildet, die $\boldsymbol{P}_i^{(1)}$ bleiben stehen ($i = 0, 1, \ldots, N-1$), alles andere wird herausgewischt.

Im n-ten Schritt ($n \geq 2$) wird mit jedem bisher stehen gebliebenen N-Eck auf gleiche Weise verfahren, in der Grenze $n \to \infty$ entsteht die Punktmenge N-Eck Cantor-Staub ([2], S. 21); $N = 2$, $\mu = 1/3$ liefert die traditionelle Cantorsche Menge.

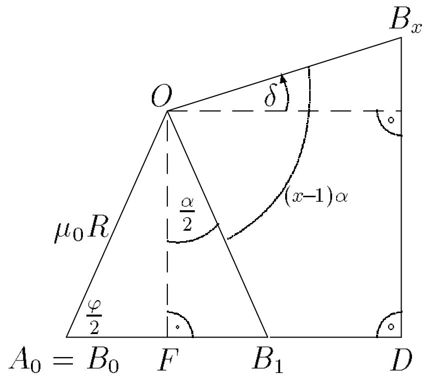


Bei dem Prozeß sei μ stets so gewählt, daß es zu keinen Überlappungen der $\boldsymbol{P}_i^{(1)}$ komme und diese darüber hinaus nicht ganz $\boldsymbol{P}$ ausfüllen. Gesucht ist nun der maximale Wert μ_0 von μ, für den dies noch eintritt, Formeln für ihn wurden in [2] („mit erheblichem Aufwand“) gewonnen, und Herr Zeitler stellte in dem Zusammenhang die Frage nach einer einfacheren Herleitung. Eine solche wird im folgenden gegeben.

Das Ausgangs-N-Eck $\boldsymbol{P}$ habe den Umkreisradius R, den Innenwinkel φ, den Zentriwinkel α ($= 2\pi/N =$ Supplement von φ), das kleinere N-Eck $\boldsymbol{P}_0^{(1)}$ die Eckpunkte $B_0 (= A_0)$, $B_1, \ldots, B_{N-1}$ (in gleicher Orientierung wie $\boldsymbol{P}$) sowie den Mittelpunkt O.

Nun hat die Seite $B_i B_{i+1}$ von $\boldsymbol{P}_0^{(1)}$ den Anstiegswinkel $i\alpha$ gegenüber $A_0 A_1$, und bei Verwendung des Maximalwertes μ_0 für den Streckungsfaktor μ findet im Punkt B_x ($x \geq 1$) eine Berührung mit $\boldsymbol{P}_1^{(1)}$ statt, falls $(x-1)\alpha \leq \frac{\pi}{2} \leq x\alpha$ ist.

Sei noch δ der (orientierte) Anstiegswinkel von OB_x gegenüber $A_0 A_1$, D der Mittelpunkt von $A_0 A_1$, F der Mittelpunkt von $B_0 B_1$. Dann wird $\delta = \frac{\alpha}{2} + (x-1)\alpha - \frac{\pi}{2}$, und $|A_0 F| + |FD| = |A_0 D|$ liefert



$$\mu_0 R\cos\frac{\varphi}{2} + \mu_0 R\cos\delta = R\cos\frac{\varphi}{2}\,,$$
$$\mu_0 = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\delta} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\delta}\,.$$

Die Werte $\cos\delta$ bestimmen sich dann noch durch folgende Tabelle ($k \in \mathbb{N},\ N \geq 2$):

N		x	δ	$\cos\delta$
$4k$	$k\alpha = \frac{\pi}{2}$	$k+1$	$\frac{\alpha}{2}+k\alpha-\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha}{2}-0$	$\cos\frac{\alpha}{2}$
$4k+1$	$\left(k+\frac{1}{4}\right)\alpha = \frac{\pi}{2}$	$k+1$	$\frac{\alpha}{2}+k\alpha-\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{4}$	$\cos\frac{\alpha}{4}$
$4k+2$	$\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha = \frac{\pi}{2}$	$k+1$	$\frac{\alpha}{2}+k\alpha-\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}$	1
$4k+3$	$\left(k+\frac{3}{4}\right)\alpha = \frac{\pi}{2}$	$k+1$	$\frac{\alpha}{2}+k\alpha-\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha}{2}-\frac{3\alpha}{4} = -\frac{\alpha}{4}$	$\cos\frac{\alpha}{4}$.

Damit sind zu den Fällen $N = 4k$ sowie $N = 4k+2$ die Formeln aus [2] wiedergewonnen, die beiden übrigen Ergebnisse beinhalten jedoch Korrekturen. Aber Nachfolgendes muß zudem bedacht werden:

Im speziellen Fall $N = 4$ (auch $N = 2$) ist der soeben bestimmte vermeintliche Maximalwert $1/2$ nicht verwendbar, da dann die $\boldsymbol{P}_i^{(1)}$ ganz $\boldsymbol{P}$ ausfüllen würden, nichts herausgewischt werden könnte, aber Cantor-Staub entsteht bei $0 < \mu < 1/2$ (s. hierzu auch die Betrachtungen am Ende), ein Maximalwert für seine Erzeugung existiert in diesen beiden Fällen nicht.

Für $N = 3$ ist hingegen $\mu_0 = 1/2$ der korrekte Maximalwert.

In allen Fällen $N > 4$ berühren sich für $\mu = \mu_0$ aus Symmetriegründen je zwei beliebige *benachbarte* unter den $\boldsymbol{P}_i^{(1)}$ ebenso wie $\boldsymbol{P}_0^{(1)}$ und $\boldsymbol{P}_1^{(1)}$, und weil obige Formeln

$$\mu_0 = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\delta} \leq \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1+\cot\frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{2}\,.$$

liefern, liegt der Mittelpunkt von $\boldsymbol{P}$ außerhalb sämtlicher Umkreise der verkleinerten N-Ecke $\boldsymbol{P}_i^{(1)}$. Somit existiert um diesen Mittelpunkt herum ein Gebiet positiven Inhalts außerhalb aller $\boldsymbol{P}_i^{(1)}$, und auch zwei beliebige unter ihnen, *die nicht benachbart sind*, überlappen sich demnach nicht. Hierdurch wird erhärtet, daß der hergeleitete Wert μ_0 korrekter Maximalwert ist.

Abschließend sei nochmals und etwas detaillierter die Konstruktion eines N-Eck CANTOR-Staubs betrachtet, er werde mit $\boldsymbol{C}_N$ bezeichnet, μ sei der verwendete zugelassene Streckungsfaktor.

Im 1. Schritt werden aus dem N-Eck $\boldsymbol{P}$ vom Inhalt 1 (als Maßeinheit) N untereinander kongruente N-Ecke vom Typ $\boldsymbol{P}^{(1)}$ erzeugt, jedes von ihnen denke man sich mit einer der Marken $0, 1, \ldots, N-1$ versehen, entsprechend dem durch $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ gegebenen Muster; f sei der Inhalt eines jeden von ihnen, dabei ist $f = \mu^2$ für $N \geq 3$ ($f = \mu$ für $N = 2$) und stets $Nf < 1$.

Liegen nach dem $(n-1)$-ten Schritt $(n-1 \geq 1)$ N^{n-1} Exemplare $\boldsymbol{P}^{(n-1)}$ vor, jedes vom Inhalt f^{n-1}, so entstehen im n-ten Schritt aus jedem (festen) $\boldsymbol{P}^{(n-1)}$ neue N Exemplare des Typs $\boldsymbol{P}^{(n)}$, die wir uns analog jeweils mit einer der Marken $0, 1, \ldots, N-1$ versehen denken und die einzeln vom Inhalt f^n sind.

Hieraus kann dreierlei abgelesen werden:

1) Im Konstruktionsprozeß entstehen Folgen von ineinandergeschachtelten abgeschlossenen N-Ecken, deren Durchmesser gegen Null streben, die somit jeweils genau einen 'innersten' Punkt enthalten: $\boldsymbol{C}_N$ existiert als nicht leere Menge dieser innersten Punkte. (Für $N > 2$, im 2-Dimensionalen, hat man nach Projektion auf orthogonale Koordinatenachsen zwei Intervallschachtelungen.)

2) Jede dieser N-Eck-Folgen ist charakterisiert durch eine Folge der vergebenen Marken, die Elemente von $\boldsymbol{C}_N$ entsprechen daher eineindeutig den Folgen aus $0, 1, \ldots, N-1$, und alle möglichen solchen treten im Prozeß auf: $\boldsymbol{C}_N$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

   (Die Teilmenge der Folgen ohne Periode $N-1$, als Nachkommateile der Darstellung reeller Zahlen im Positionssystem der Basis N gedeutet, stellt die Zahlen des halboffenen Intervalls $[0, 1[$ dar.)

3) Nach dem n-ten Konstruktionsschritt ist $\boldsymbol{C}_N$ enthalten in der Vereinigung von N^n Exemplaren des N-Eck-Typs $\boldsymbol{P}^{(n)}$ vom Gesamtinhalt $N^n f^n$, und dabei gilt $(Nf)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$: $\boldsymbol{C}_N$ hat den Inhalt 0.

Die Menge $\boldsymbol{C}_N$ ist gleichmächtig zum vollen Ausgangs-N-Eck $\boldsymbol{P}$ und zerfällt in flächenlosen (oder längenlosen) 'Staub'! Diese dem Kenner geläufigen aber gleichwohl staunenswerten Bewandtnisse vergönnen einen Blick in die Mengenlehre des Unendlichen, ins „Paradies, das CANTOR uns geschaffen“ (D. HILBERT 1925, Math. Annalen 95).

Literatur

[1] **Zeitler, H. :** *Symmetrische Fraktale.* Der Mathematikunterricht **42**/2, 30–45 (1996)

[2] **Zeitler, H. :** *Chaosspiel und Cantor-Staub.* Zentralbl. Did. Math. **96**/1, 17–24 (1996)

eingegangen: 13. August 1997

Autor:

Klaus-Dieter Drews
Fachbereich Mathematik
Universität Rostock
Universitätsplatz 1
18051 Rostock
Germany