Rostock. Math. Kolloq. **51**, 111–126 (1997)

Subject Classification (AMS)
03G20, 08A40

Dietlinde Lau

Die maximalen Klassen von $Pol_3\{\varrho|\varrho \in Q\}$ für $Q \subseteq \mathfrak{P}(\{0,1,2\})$, Teil I

Gewidmet den Herren Professoren
G. Maeß, H. Poppe *und* G. Wildenhain

Seien $E_3 := \{0,1,2\}$, P_3^n die Menge aller n-stelligen Funktionen, die das n-fache kartesische Produkt E_3^n in E_3 abbilden und $P_3 := \bigcup_{n\geq 1} P_3^n$. Zusammen mit den Superpositionsoperationen bildet P_3 eine Algebra, deren Trägermengen von Unteralgebren wir hier Teilklassen (oder kurz Klassen) von P_3 nennen wollen. Außerdem bezeichne $Pol_3\varrho$ die Menge aller Funktionen aus P_3, die die Relation ϱ ($\subseteq E_3^h$, $h \in I\!N$) bewahren.
Im folgenden sowie in den Teilen II und III soll eine Beschreibung der maximalen Klassen der Teilklasse

$$T_Q := Pol_3\{\varrho|\varrho \in Q\} = \bigcap_{\varrho\in Q} Pol_3\varrho$$

von P_3 für beliebiges Q mit $\emptyset \neq Q \subseteq \mathfrak{P}(\{0,1,2\})$ angegeben werden. Für die Fälle, in denen T_Q gleich P_3 ($Q = \{E_3\}$) ist oder eine maximale Klasse von P_3 beschreibt (d.h., $Q \in \{\{\{a\}\},\{\{a,b\}\}\}$, $a,b \in E_3$ ist) oder Q nur aus einelementigen Mengen besteht, sind dies Spezialfälle allgemeinerer Resultate aus [15], [16, 17], [7] und [9]
Tabelle 1 gibt eine Übersicht über die zu untersuchenden Fälle, die erhaltenen Anzahlen der maximalen Klassen und die Satznummern, unter denen man die Auflistung der maximalen Klassen finden kann. Dabei sei $\{a,b,c\} = \{0,1,2\}$ und mittels (I), (II) bzw. (III) wird auf Teil I, II bzw. Teil III verwiesen.
Es sei noch bemerkt, daß man mit Hilfe der ermittelten maximalen Klassen der Klassen T_Q leicht Vollständigkeitskriterien für die Klassen T_Q formulieren kann, aus denen sich wiederum als leichte Folgerungen notwendige und hinreichende Bedingungen für sämtliche

3-elementigen semi-primalen Algebren ergeben (siehe [17]).

Fall	Elemente von Q	Anzahl der maximalen Klassen von T_Q	Liste der maximalen Klassen in Satz
1	E_3	18	3.1(I)
2	$\{a\}$	12	3.2 (I)
3	$\{a,b\}$	15	3.3 (I)
4	$\{a\},\ \{b\}$	7	3.4 (I)
5	$\{a\},\ \{b\},\ \{c\}$	10	2(III)
6	$\{a,b\},\ \{a\}$	12	3.5 (I)
7	$\{a,b\},\ \{c\}$	11	2 (II)
8	$\{a,b\},\ \{a\},\ \{b\}$	11	3 (II)
9	$\{a,b\},\ \{a\},\ \{c\}$	11	5 (II)
10	$\{a,b\},\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\}$	13	6(III)
11	$\{a,b\},\ \{a,c\}$	14	6 (II)
12	$\{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b\}$	12	7 (II)
13	$\{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b\},\ \{c\}$	17	7(III)
14	$\{0,1\},\ \{0,2\},\ \{1,2\}$	30	8(III)

Tabelle 1

1 Grundbegriffe und Bezeichnungen

Wir verwenden bis auf geringfügige Änderungen die in [13] und [9] angegebenen und erläuterten Begriffe und Bezeichnungen. Insbesondere seien

$$P_E^n := \{f^n | f^n : E^n \longrightarrow E\},\ P_E := \bigcup_{n\geq 1} P_E^n,$$

$$E_k := \{0,1,\ldots,k-1\}\ (k\geq 2),$$

$$P_k := P_{E_k},$$

$$P_{k,l} := \bigcup_{n\geq 1}\{f^n \in P_k \mid f^n :\ E_k^n \longrightarrow E_l\},$$

$$R_E^h := \{\varrho | \varrho \subseteq E_E^h\},\ R_k^h := R_{E_k}^h$$

$$R_E := \bigcup_{h\geq 1} R_E^h,\ R_k := R_{E_k}.$$

Wenn sich die Stelligkeit der Funktion $f^n \in P_k^n$ aus dem Zusammenhang ergibt bzw. unwichtig ist, lassen wir den Index n weg.
Als Operationen über P_E seien

das Umordnen von Variablen,

das Identifizieren von Variablen,

das Hinzufügen von fiktiven Variablen und

das Einsetzen von Funktionen in Funktionen

zugelassen. Bekanntlich lassen sich diese Operationen auch mit Hilfe der sogenannten Mal'cev-Operationen ζ, τ, Δ, ∇, $\star$ (siehe [13]) beschreiben. Die Menge der aus Funktionen einer Menge M ($\subseteq P_E$) in endlich vielen Schritten konstruierbaren Funktionen - *Superpositionen über* M genannt - wird mit $[M]$ bezeichnet. Ist $M = [M]$, so heißt M *abgeschlossene Menge* (*Klasse*) oder kurz *Klasse* von P_E. Eine echte Teilklasse M von M' wird eine *maximale Klasse* von M' genannt, wenn keine Klasse M'' von P_E mit $M \subset M'' \subset M'$ existiert.
Die h-ären Relationen ϱ aus R_3^h werden von uns nachfolgend nicht in der Form $\varrho = \{(a_0, \ldots, a_{h-1}), (b_0, \ldots, b_{h-1}), \ldots\}$, sondern in Form von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & \ldots \\ a_1 & b_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{h-1} & b_{h-1} & \ldots \end{pmatrix}$$

angegeben und benutzt. Die Menge aller Funktionen aus P_E, die die Relation ϱ bewahren, bezeichnen wir wie üblich mit $Pol_E\varrho$. Anstelle von $Pol_{E_k}\varrho$ verwenden wir die Bezeichnung $Pol_k\varrho$ oder schreiben nur $Pol\varrho$. Inv_kM, wobei $M \subseteq P_k$, bezeichne die Menge aller *Invarianten* von M, d.h., die Menge all der Relationen aus R_k, die von sämtlichen Funktionen aus M bewahrt werden.
Als Operationen über Relationen verwenden wir die zweistelligen Operationen $\circ$ (Relationenprodukt, Faltung), $\times$ (kartesisches Produkt), $\cap$ (Durchschnitt) und die einstelligen Operationen ζ, τ, Δ und $pr_{\alpha_1,\ldots,\alpha_t}$ mit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\} \subseteq E_h$, die definiert sind durch

$$\zeta\varrho := \{(a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_0) \mid (a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}) \in \varrho\},$$
$$\tau\varrho := \{(a_1, a_0, a_2, \ldots, a_{h-1}) \mid (a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}) \in \varrho\},$$
$$\Delta\varrho := \{(a_1, \ldots, a_{h-1}) \mid (a_1, a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}) \in \varrho\}$$
für $h \geq 2$ und
$$pr_{\alpha_1,\ldots,\alpha_t}\varrho := \{(a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_t}) \mid \exists a_j (j \in E_h \backslash \{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}) : (a_0, \ldots, a_{h-1}) \in \varrho\},$$

wobei $\varrho \in R_k^h$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in E_h$.
Nähere Ausführungen zu diesen Operationen entnehme man [13].
Wir sagen, eine Relation ϱ' ist aus der Relation ϱ *mit Hilfe von* Inv_kT_Q *ableitbar*, wenn man sie unter Verwendung der oben definierten Relationenoperationen aus Relationen der Menge $\{\varrho\} \cup Inv_kT_Q$ erhalten kann. Wir schreiben in diesem Fall auch

$$\{\varrho\} \cup Inv_kT_Q \ \vdash \ \varrho'$$

bzw. kurz

$$\varrho \vdash \varrho'.$$

Die folgende Eigenschaft werden wir in einigen Beweisen beim Nachweis von Enthaltenseinsbeziehungen benutzen:

$$\forall \varrho, \varrho' \in R_k : (Pol\varrho \subseteq T_Q \ \wedge \ (\{\varrho\} \cup Inv_k T_Q \vdash \varrho') \Longrightarrow Pol\varrho \subseteq T_Q \cap Pol\varrho'). \qquad (1)$$

Die Funktionen $c_a^n \in P_3$ $(a \in E_3)$ mit $c_a^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$ nennen wir wie üblich *Konstanten.* Bezeichnungen für die von den Konstanten verschiedenen einstelligen Funktionen aus P_3 sind in der Tabelle 2 zusammengefaßt.

x	$j_0(x)$	$j_1(x)$	$j_2(x)$	$j_3(x)$	$j_4(x)$	$j_5(x)$	$u_0(x)$	$u_1(x)$	$u_2(x)$	$u_3(x)$	$u_4(x)$	$u_5(x)$
0	1	0	0	1	1	0	2	0	0	2	2	0
1	0	1	0	1	0	1	0	2	0	2	0	2
2	0	0	1	0	1	1	0	0	2	0	2	2
x	$v_0(x)$	$v_1(x)$	$v_2(x)$	$v_3(x)$	$v_4(x)$	$v_5(x)$	$s_1(x)$	$s_2(x)$	$s_3(x)$	$s_4(x)$	$s_5(x)$	$s_6(x)$
0	2	1	1	2	2	1	0	0	1	1	2	2
1	1	2	1	2	1	2	1	2	0	2	0	1
2	1	1	2	1	2	2	2	1	2	0	1	0

Tabelle 2

Im folgenden nicht weiter erläuterte Begriffe und Bezeichnungen entnehme man [13] oder [9].

Im nachfolgenden Abschnitt 2 werden zunächst einige öfter benötigte Hilfsaussagen zusammengestellt und bewiesen. Anschließend wird damit begonnen, die maximalen Klassen von denjenigen Klassen T_Q zu bestimmen, die nicht in der Menge aller idempotenten Funktionen

$$I := Pol_3\{0\} \cap Pol_3\{1\} \cap Pol_3\{2\}$$

enthalten sind. Aus Platzgründen werden hier nur die in Tabelle 1 angegebenen Fälle 1 - 4 und 6 behandelt. Die restlichen Fälle sind dann Gegenstand von Teil II. Für die Teilklassen der Art $T_Q \subseteq I$ verlaufen die Beweise für die Behauptungen aus Tabelle 1 nach einer anderen Grundidee, als für die bereits genannten Fälle (siehe Teil III).

Sowohl beim Beweis des Lemmas 2.6 als auch beim Beweis sämtlicher Sätze des Abschnitts 3 sowie der Sätze aus den Teilen II und III gehen wir wie folgt vor:
Zwecks Nachweis, daß die im Lemma bzw. im Satz für die Klasse T unter den Nummern

$(1), (2), \ldots, (r_T)$ angegebene Liste von Teilklassen der Klasse T sämtliche maximalen Klassen von T umfaßt, wird für eine beliebige Teilmenge A von T, die keine Teilmenge der Mengen $(1), (2), \ldots, (r_T)$ ist, $[A] = T$ gezeigt. Anschließend wird eine Tabelle mit Funktionen aus T angegeben, aus der zu entnehmen ist, in welcher Klasse (i) diese Funktionen enthalten sind (+ steht in der Tabelle für enthalten, − für nicht enthalten). Aus diesen Tabellen folgt unmittelbar, daß sämtliche Klassen $(1), (2), \ldots, (r_T)$ echte Teilklassen von T sind und daß diese Klassen untereinander bezüglich Mengeninklusion unvergleichbar sind. Damit müssen die unter $(1), (2), \ldots, (r_T)$ genannten Klassen sowohl maximale Klassen als auch die einzigen maximalen Klassen von T sein.

Aus der Bedingung, daß A keine Teilmenge der unter (i) angegebenen Klasse ist, folgt die Existenz einer Funktion $f_i \in A$, die nicht zur Klasse (i) gehört. O.B.d.A. können wir folgende Vereinbarung treffen:

(*): Ist (i) in der Form $T \cap Pol_3\varrho$ mit $\varrho := (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ beschrieben, so sei $f_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \notin \varrho$.

2 Einige Hilfsaussagen

Die ersten 3 Lemmata sind Folgerungen aus der Beschreibung sämtlicher Teilklassen von P_2 durch E. L. Post in [14] (siehe auch [2] oder [8].).

Lemma 2.1 *Bezeichne A eine beliebige Teilmenge von P_2. Dann gilt $[A] = P_2$ genau dann, wenn A keine Teilmenge der folgenden 5 Teilklassen von P_2 ist:*

$$(1)\ Pol_2\{0\},\quad (2)\ Pol_2\{1\},\quad (3)\ Pol_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad (4)\ Pol_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad (5)\ Pol_2\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&0&1&1 \\ 0&0&1&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&1&1&0&1 \\ 0&1&1&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.2 *Bezeichne A eine beliebige Teilmenge von $T_0 := Pol_2\{0\} \subset P_2$. Dann gilt $[A] = T_0$ genau dann, wenn A keine Teilmenge der folgenden 4 Teilklassen von T_0 ist:*

$$(1)\ T_0 \cap Pol_2\{1\},\quad (2)\ T_0 \cap Pol_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad (3)\ T_0 \cap Pol_2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad (4)\ T_0 \cap Pol_2\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&0&1&1 \\ 0&0&1&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&1&1&0&1 \\ 0&1&1&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.3 *Bezeichne A eine beliebige Teilmenge von $T_0 \cap T_1 := Pol_2\{0\} \cap Pol_2\{1\} \subset P_2$. Dann gilt $[A] = T_0 \cap T_1$ genau dann, wenn A keine Teilmenge der folgenden 4 Teilklassen von $T_0 \cap T_1$ ist:*

(1) $T_0 \cap T_1 \cap Pol_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (3) $T_0 \cap T_1 \cap Pol_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(2) $T_0 \cap T_1 \cap Pol_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (4) $T_0 \cap T_1 \cap Pol \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ein Spezialfall des Satzes aus [3] (siehe auch [6, 7]) ist das

Lemma 2.4 *Bezeichne A eine beliebige Teilmenge von $P_{3,2}$. Dann gilt $[A] = P_{3,2}$ genau dann, wenn A keine Teilmenge der folgenden 6 Teilklassen von $P_{3,2}$ ist:*

(1) $P_{3,2} \cap Pol_3\{0\}$,

(2) $P_{3,2} \cap Pol_3\{1\}$,

(3) $P_{3,2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(4) $P_{3,2} \cap Pol \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(5) $P_{3,2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(6) $P_{3,2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(7) $P_{3,2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Lemma 2.5 *Bezeichne A eine beliebige Teilmenge von $pr^{-1}T_0 := P_{3,2} \cap Pol_3\{0\} \subset P_3$. Dann gilt $[A] = pr^{-1}T_0$ genau dann, wenn A keine Teilmenge der folgenden 6 Teilklassen von $pr^{-1}T_0$ ist:*

(1) $pr^{-1}T_0 \cap Pol_3\{1\}$,

(2) $pr^{-1}T_0 \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(3) $pr^{-1}T_0 \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(4) $pr^{-1}T_0 \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(5) $pr^{-1}T_0 \cap Pol_3\{0, 2\}$,

(6) $pr^{-1}T_0 \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Beweis: Ergibt sich aus [7], Satz 15. ■

Lemma 2.6 *Bezeichne A eine beliebige Teilmenge von $pr^{-1}T_0 \cap T_1 := P_{3,2} \cap Pol_3\{0\} \cap Pol_3\{1\} \subset P_3$. Dann gilt $[A] = pr^{-1}T_0 \cap T_1$ genau dann, wenn A keine Teilmenge der folgenden 6 Teilklassen von $pr^{-1}T_0 \cap T_1$ ist:*

(1) $pr^{-1}T_0 \cap T_1 \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(2) $pr^{-1}T_0 \cap T_1 \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(3) $pr^{-1}T_0 \cap T_1 \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(4) $pr^{-1}T_0 \cap T_1 \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(5) $pr^{-1}T_0 \cap T_1 \cap Pol_3\{0,2\}$,

(6) $pr^{-1}T_0 \cap T_1 \cap Pol_3\{1,2\}$.

Beweis: Bezeichne f_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ eine Funktion aus $A \subseteq pr^{-1}T_0 \cap T_1$, jedoch nicht aus der Klasse (i) mit der eingangs vereinbarten Eigenschaft (*).
Dann findet man nach Lemma 2.3 zu jeder Funktion $g^m \in T_0 \cap T_1$ eine gewisse Funktion $G^m \in [\{f_1, \ldots, f_6\}]$ mit

$$\forall \mathbf{x} \in E_2^n : \; g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Speziell gibt es damit in $[A]$ eine gewisse Funktion t mit

$$t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \{0,1\}$. Im Fall $a = 0$ erhält man $f_5(t(x), x) = j_5(x) \in [A]$. Falls $a = 1$ ist, gilt $f_6(t(x), x) = j_1 \in [A]$. Also sind j_1 und j_2 Superpositionen über A.
Bezeichne nun f^n eine beliebige Funktion aus A.
Bildet man die Tupel

$$T_{\mathbf{x}} := (j_1(x_1), j_1(x_2), \ldots, j_1(x_n), j_5(x_1), j_5(x_2), \ldots, j_5(x_n))$$

für beliebige $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n) \in E_2^n$, so sieht man leicht, daß

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \implies T_{\mathbf{x}} \neq T_{\mathbf{x}'}$$

gilt. Folglich findet man wegen (2) in $[A]$ eine gewisse Funktion $F^{2 \cdot n}$ mit

$$F(j_1(x_1), j_1(x_2), \ldots, j_1(x_n), j_5(x_1), j_5(x_2), \ldots, j_5(x_n)) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

womit $[A] = pr^{-1}T_0 \cap T_1$ gezeigt ist.
Da die im Lemma genannten Klassen offenbar alle paarweise verschieden und echte Teilklassen von $pr^{-1}T_0 \cap T_1$ sind, folgt hieraus die Behauptung unseres Lemmas. ■

3 Die maximalen Klassen von T_Q in den Fällen 1 - 4 und 6

Der nachfolgende Satz wurde bereits 1958 von S. V. Jablonskij in [1] bewiesen und ergibt sich als Spezialfall aus der allgemeinen Charakterisierung der maximalen Klassen von P_k von I. G. Rosenberg ([15]):

Satz 3.1 *P_3 besitzt genau 18 maximale Klassen:*

(1) $Pol_3\{0\}$, (2) $Pol_3\{1\}$,

(3) $Pol_3\{2\}$, (4) $Pol_3\{0,1\}$,

(5) $Pol_3\{0,2\}$, (6) $Pol_3\{1,2\}$,

(7) $Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, (8) $Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(9) $Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, (10) $Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(11) $Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, (12) $Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(13) $Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, (14) $Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

(15) $Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (16) $Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(17) $Pol_3\{(a,b,c,d) \in E_3^4 \mid a+b = c+d\,(mod\,3)\}$,

(18) $Pol_3\{(a,b,c) \in E_3^3 \mid |\{a,b,c\}| \leq 2\}$.

Die folgenden zwei Sätze findet man auch in [4] Sie sind außerdem Spezialfälle eines Satzes über die maximalen Klassen von $Pol_k E$ mit $1 \leq |E| \leq k-1$ (siehe [5], [10]).

Satz 3.2 *Sei $\{a,b,c\} := E_3$. $T_a := Pol_3\{a\}$ besitzt genau 12 maximale Klassen:*

(1) $T_a \cap Pol_3\{b\}$,

(2) $T_a \cap Pol_3\{c\}$,

(3) $T_a \cap Pol_3\{a,b\}$,

(4) $T_a \cap Pol_3\{a,c\}$,

(5) $T_a \cap Pol_3\{b,c\}$,

(6) $T \cap Pol_3\begin{pmatrix} a & b & c & b & c \\ a & b & c & c & b \end{pmatrix}$,

(7) $T_a \cap Pol_3\begin{pmatrix} a & b & c & a & b & a & c \\ a & b & c & b & a & c & a \end{pmatrix}$,

(8) $T_a \cap Pol_3\begin{pmatrix} a & b & c & a & a & b \\ a & b & c & b & c & c \end{pmatrix}$,

(9) $T_a \cap Pol_3\begin{pmatrix} a & b & c & a & a & c \\ a & b & c & c & b & b \end{pmatrix}$,

(10) $Pol_3\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$,

(11) $Pol_3\begin{pmatrix} a & a & b & a & c \\ a & b & a & c & a \end{pmatrix}$,

(12) $Pol_3\begin{pmatrix} a & a & b & a & c & b & c \\ a & b & a & c & a & c & b \end{pmatrix}$.

Satz 3.3 *Sei $\{a,b,c\} := E_3$. $T_{a,b} := Pol_3\{a,b\}$ besitzt genau 15 maximale Klassen:*

(1) $T_{a,b} \cap Pol_3\{a\}$,

(2) $T_{a,b} \cap Pol_3\{b\}$,

(3) $T_{a,b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & b & b \end{pmatrix}$,

(4) $T_{a,b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$,

(5) $T_{a,b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a & b & b & a & b & b \\ a & a & b & b & a & b & a & b \\ a & b & a & a & b & b & a & b \\ a & b & b & a & a & a & b & b \end{pmatrix}$,

(6) $T_{a,b} \cap Pol_3\{c\}$,

(7) $T_{a,b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & a & b \\ 0 & 1 & 2 & b & a \end{pmatrix}$,

(8) $T_{a,b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & a & c & b & c \\ 0 & 1 & 2 & c & a & c & b \end{pmatrix}$,

(9) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$,

(10) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$,

(11) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}$,

(12) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & b \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}$,

(13) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a & c & b & c \\ a & b & a & b & c & a & c & b \end{pmatrix}$,

(14) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a & b & a & b & a & b \\ a & b & a & b & b & a & a & b \\ a & b & b & a & c & c & c & c \end{pmatrix}$,

(15) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & b & a & a & b & b & a & a & b \\ a & b & a & b & a & b & a & b & a & b \\ a & b & a & a & b & a & b & b & c & c \end{pmatrix}$.

Satz 3.4 *Sei* $\{a, b, c\} := E_3$. $T_{a;b} := Pol_3\{a\} \cap Pol_3\{b\}$ *besitzt genau 7 maximale Klassen:*

(1) $T_{a;b} \cap Pol_3\{c\}$,

(2) $T_{a;b} \cap Pol_3\{a, b\}$,

(3) $T_{a;b} \cap Pol_3\{a, c\}$,

(4) $T_{a;b} \cap Pol_3\{b, c\}$,

(5) $T_{a;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & c & a & a & b \\ a & b & c & b & c & c \end{pmatrix}$,

(6) $T_{a;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a & b & c \\ a & b & c & a & a \end{pmatrix}$,

(7) $T_{a;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} b & b & b & a & c \\ b & a & c & b & b \end{pmatrix}$.

Beweis: Ergibt sich als Spezialfall des Satzes 2.1 aus [17] bzw. [11]. ■

Satz 3.5 *Sei* $\{a, b, c\} := E_3$. $T_{a,b;a} := Pol_3\{a, b\} \cap Pol_3\{a\}$ *besitzt genau 12 maximale Klassen:*

(1) $T_{a,b;a} \cap Pol_3\{b\}$,

(2) $T_{a,b;a} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & b & b \end{pmatrix}$,

(3) $T_{a,b;a} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$,

(4) $T_{a,b;a} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a & b & b & a & b & b \\ a & a & b & b & a & b & a & b \\ a & b & a & a & b & b & a & b \\ a & b & b & a & a & a & b & b \end{pmatrix}$,

(5) $T_{a,b;a} \cap Pol_3\{c\}$,

(6) $T_{a,b;a} \cap Pol_3\{a, c\}$,

(7) $T_{a,b;a} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ a & b & c & b & a \end{pmatrix}$,

(8) $T_{a,b;a} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$,

(9) $T_{a,b;a} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}$,

(10) $T_{a,b;a} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & b \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}$,

(11) $T_{a,b;a} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & c & c & a & b \\ a & b & a & b & a & b & c & c \end{pmatrix}$,

(12) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & b & c & c \end{pmatrix}$.

Beweis: O.B.d.A. seien $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$. Mit A bezeichnen wir in diesem Beweis eine Teilmenge von $T_{0,1;0}$, die keine Teilmenge der unter (1) bis (12) aufgezählten Teilklassen von $T_{0,1;0}$ ist. Dann gehören zu $[A]$ gewisse Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_{12}$ mit der oben vereinbarten Eigenschaft (*).
Mit Hilfe von Lemma 2.2 sieht man leicht ein, daß jede Funktion aus T_0 ($\subset P_2$) die Einschränkung einer Funktion aus $[A]$ sein muß. Daher ist eine Funktion $g_1 \in \{c_0, j_2, u_2\}$ eine Superposition über A.
Falls $g_1 \in \{c_0, j_2\}$, gehört $g_1 \star g_1 = c_0$ zu $[A]$. Wenn $g = u_2$ ist, kann man mittels $f_5 \star g_1$ eine Funktion aus $\{c_0, j_2\}$ konstruieren.

Folglich gehört c_0 zu $[A]$.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß auch die restlichen einstelligen Funktionen aus $T_{0,1;0}$ und sämtliche Funktionen aus $P_{3,2} \cap Pol_3\{0\}$ Superpositionen über A sind.
Die Funktion $f_6'(x) := f_6(c_0, x) \in [A]$ gehört zu $\{j_2, j_5\}$, womit wir für diese Funktion zwei Fälle zu unterscheiden haben:
Fall 1: $f_6' = j_2$.
Sei

$$q(x, y, z) := f_7(c_0(x), j_2(x), x, y, z),$$

wobei o.B.d.A.

$$q \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt. Ist $q(1, 0, 0) = 0$, so haben wir $q(x, j_2(x), c_0) = u_2 \in [A]$. Im Fall $q(1, 0, 0) = 1$, gilt $q(x, c_0, j_2(x)) \in \{j_1, j_2\}$.

Also ist $[A] \cap \{j_1, j_2, u_2\} \neq \emptyset$. Wir haben damit folgende drei Fälle zu unterscheiden:
Fall 1.1: $u_2 \in [A]$.
Die Funktion $f'_{12}(x) := f_{12}(c_0, j_2(x), u_2(x), x) \in \{j_1, j_5\}$ gehört dann zu $[A]$. Falls $f'_{12} = j_1$ ist, können wir mit Hilfe einer gewissen Funktion $g_2 \in [A]$ mit

$$g_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$j_5(x) = g_2(c_0, j_2(x), j_1(x)) \in [A]$ erhalten.
Im Fall $f'_{12} = j_5$ gelingt der Nachweis von $j_2 \in [A]$ z.B. mit Hilfe einer Funktion $g_3 \in [A]$, für die

$$g_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt.
Im Fall 1.1 ist damit

$$A^1 \backslash \{s_1\} \subseteq [A] \tag{3}$$

gezeigt.
Fall 1.2: $j_1 \in [A]$.
Für gewisses $g_4 \in [A]$ mit

$$g_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

läßt sich dann $f'_{10}(x) := f_{10}(c_0, j_2, j_1, j_5, x) = u_2 \in [A]$ zeigen. Also gilt (1) auch im Fall 1.2.
Fall 1.3: $j_5 \in [A]$.
Mittels $g_5 \in [A]$ mit

$$g_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist dieser Fall auf den Fall 1.2 zurückführbar.
Fall 2: $f'_6 = j_5$.
Wir bilden $f'_8 \in [A]$ mit $f'_8(x) := f_8(c_0, j_5(x), x) \in \{j_2, u_2, j_1\}$.
Fall 2.1: $f'_8 = j_2$.

Weiter wie unter Fall 1.

Fall 2.2: $f_8' = u_2$.

Wegen $j_5 \star u_2 = j_2 \in [A]$ kann dieser Fall weiter wie Fall 1 bearbeitet werden.

Fall 2.3: $f_8' = j_1$.

Mit Hilfe einer gewissen Funktion $g_6 \in [A]$ mit der Eigenschaft

$$g_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist dieser Fall durch Bildung von $g_6(j_5, j_1) = j_2$ ebenfalls auf den Fall 1 zurückführbar.

Also gilt (3).

Mit Hilfe von Lemma 2.5 und den Funktionen $f_1, \ldots, f_4$ ist hieraus leicht

$$P_{3,2} \cap Pol_3\{0\} \subseteq [A]$$

zu folgern.

Als nächstes betrachten wir die Funktion

$$f_7'(x,y) := u_2(f_7(c_0(x), j_2(x), x, y, g_7(j_2(x), y))) \in [A],$$

wobei g_7 eine gewisse Funktion aus $[A]$ mit der Eigenschaft $g_7 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezeichnet.

Nach Konstruktion gilt dann $f_7' \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Es genügt, den Fall

$$f_7' \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

zu behandeln, da man für $f_7' \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Hilfe einer Funktion g_8 aus $P_{3,2} \cap Pol_3\{0\}$ mit $g_8 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu der Funktion $f_7''(x,y) := f_7'(x, g_8(x,y))$ mit $f_8'' \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ übergehen kann. Also können wir o.B.d.A. (4) annehmen und es gilt nach Konstruktion der Funktion f_7':

$$f_7' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Unter Verwendung von $g_9, g_{10} \in [A]$ mit den Eigenschaften

$$g_9 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } g_{10} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

können wir die Funktion $f_9'(x, y) := f_9(c_0, g_9(x, y), x, g_{10}(x, y), y)$ bilden, die die Eigenschaft

$$f_9' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

besitzt.
Außerdem läßt sich als Superposition über A die Funktion

$$f_{11}'(x, y) := f_{11}(c_0, j_2(x), j_2(y), g_{11}(x, y), y, f_9'(j_2(x), y), x, f_9'(j_2(y), x))$$

mit

$$f_{11}' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

konstruieren, wobei g_{11} eine gewisse Funktion aus $[A] \cap P_{3,2}$ bezeichnet, die

$$g_{11} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Nach diesen Vorbereitungen kann man wie im Beweis für Satz 3.3 (siehe [4]) zeigen, daß $[A] = T_{0,1;0}$ gilt:
Sei f^n eine beliebige Funktion aus $T_{0,1;0}$, von der wir anschließend zeigen wollen, daß sie eine Superposition über A ist. Dazu bezeichne $f_{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_r;\beta}$ ($\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_r \in E_3^n, \beta \in E_3$) eine n-stellige Funktion, für die

$$f_{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_r;\beta}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \beta & \text{für} \quad \mathbf{x} \in \{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_r\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.
Offensichtlich sind die Funktionen des Typs $f_{\widetilde{\alpha};1}$ für $\widetilde{\alpha} \in E_3^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ Superpositionen über A. Ist $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_3^n$ und $\alpha_i = 2$, so läßt sich $f_{\widetilde{\alpha};2}$ wie folgt als Superposition über A darstellen (siehe (5)):

$$f_{\widetilde{\alpha};2} = f_7'(x_i, f_{\widetilde{\alpha};1}(\mathbf{x})).$$

Außerdem gilt wegen (7):

$$f_{\widetilde{\alpha_1},\dots,\widetilde{\alpha_r};2}(\mathbf{x}) = f'_{11}(f_{\widetilde{\alpha_1};2}(\mathbf{x}), f_{\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3},\dots,\widetilde{\alpha_r};2}(\mathbf{x})).$$

Folglich sind auch die Funktionen des Typs $f_{\widetilde{\alpha_1},\dots,\widetilde{\alpha_r};2}$ für $\{\widetilde{\alpha_1},\dots,\widetilde{\alpha_r}\} \subseteq E_3^n \backslash E_2^n$ Superpositionen über A.
Die Funktion f läßt sich dann wegen (6) wie folgt als Superposition über A darstellen:

$$f(\mathbf{x}) = f'_9(f_{\widetilde{\beta_1},\dots,\widetilde{\beta_s};1}(\mathbf{x}), f_{\widetilde{\gamma_1},\dots,\widetilde{\gamma_t};2}(\mathbf{x})),$$

wobei $\widetilde{\beta}_1,\dots,\widetilde{\beta}_s$ genau diejenigen Tupel aus $E_3^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ bezeichnen, auf denen f den Wert 1 annimmt und $\{\widetilde{\gamma}_1,\dots,\widetilde{\gamma}_t\}$ die Menge aller derjenigen Tupel aus E_3^n ist, auf denen f den Wert 2 hat.
Folglich ist der Abschluß von A gleich $T_{0,1;0}$.
Hieraus und aus Tabelle 3 folgt dann die Behauptung von Satz 3.5. Die Funktionen $g_1,\dots,g_{10}$ aus Tabelle 3 sind in Tabelle 4 definiert. Für die Funktion h_1^3 und h_2^3 gelte

$$h_1(\mathbf{x}) := \begin{cases} 2 & \text{für} \quad \mathbf{x} \in E_3^3 \backslash E_2^3, \\ 1 & \text{für} \quad \mathbf{x} \in \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$h_2(\mathbf{x}) := \begin{cases} x+y+z \pmod 2 & \text{für} \quad \mathbf{x} \in E_2^3, \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

■

	c_0	j_2	u_2	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	h_1	h_2
(1)	−	−	−	−	+	−	−	+	+	+	−	+	+	+	+
(2)	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+	+	+	−
(3)	+	+	+	+	−	+	+	+	+	−	+	+	+	+	−
(4)	+	+	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	−	−	+
(5)	−	−	+	−	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+
(6)	+	−	+	+	−	−	−	−	+	+	+	−	+	+	+
(7)	+	+	+	−	−	−	−	−	+	+	+	−	+	+	+
(8)	+	−	−	−	+	−	−	+	−	+	−	−	−	−	−
(9)	+	+	+	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−
(10)	+	+	−	−	+	−	−	−	+	+	−	−	+	−	−
(11)	+	+	+	−	+	−	+	+	+	−	−	−	+	−	−
(12)	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	+	+

Tabelle 3

x_1	x_2	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	2	0	1	0	1	0	1	2	2	1	0
1	2	2	2	2	2	2	0	2	2	2	0
2	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	0
2	1	2	1	2	1	1	2	2	2	2	0
2	2	0	1	2	1	2	2	2	2	2	0

Tabelle 4

Literatur

[1] **Jablonskij, S.V.** : *Funktcional'nye postroenija v k-značnoj logike* (Russ.). Trudy Mat. Inst. Steklov. **51**, 5–142 (1958)

[2] **Jablonski, S.W., Gawrilow, G.P.** und **Kudrjawzew, W.B.** : *Boolesche Funktionen und Postsche Klassen.* Berlin 1970

[3] **Lau, D.** : *Prävollständige Klassen von $P_{k,l}$.* Elektron. Informationsverarb. Kybernet. EIK **11**, 624–626 (1975)

[4] **Lau, D.** : *Submaximale Klassen von P_3.* J. Inform. Process. Cybernet. EIK **18**, 227–243 (1982)

[5] **Lau, D.** : *Die maximalen Klassen von $Pol_k(0)$.* Rostock. Math. Kolloq. **19**, 29–47 (1982)

[6] **Lau, D.** : *Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{k,2}$.* J. Inform. Process. Cybernet. EIK **24**, 495–513 (1988)

[7] **Lau, D.** : *Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{3,2}$.* J. Inform. Process. Cybernet. EIK **24**, 561–572 (1988)

[8] **Lau, D.** : *On closed subsets of Boolean functions (A new proof for Post's Theorem).* J. Inform. Process. Cybernet. EIK **27**, 167–178 (1991)

[9] **Lau, D.** : *Ein neuer Beweis für Rosenberg's Vollständigkeitskriterium.* J. Inform. Process. Cybernet. EIK **28**, 149–195 (1992)

[10] **Lau, D.** : *Die maximalen Klassen von $Pol_k E_l$ für $2 \le l \le k-1$.* Universität Rostock, Preprint 1992

[11] **Lau, D.** : *Die maximalen Klassen von $\bigcap_{a\in Q} Pol_k\{a\}$ für $Q \subseteq E_k$ (Ein Kriterium für endliche semi-primale Algebren mit nur trivialen Unteralgebren).* Rostock. Math. Kolloq. **48**, 27–46 (1995)

[12] **Lau, D.** : *Die maximalen Klassen von $Pol_3\{\varrho|\varrho \in Q\}$ für $Q \subseteq \mathfrak{P}(\{0,1,2\})$, Teil II und III.* Eingereicht bei Rostock. Math. Kolloq.

[13] **Pöschel, R.** und **Kalužnin, L. A.** : *Funktionen- und Relationenalgebren.* Berlin 1979

[14] **Post, E. L.** : *The two-valued iterative systems of mathematical logic.* In: Ann. Math. Studies **5**, Princeton Univ. Press. 1941

[15] **Rosenberg, I.G. :** *Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken.* Rozpravy Československé Akad. Věd. Řada Mat. Přirod. Věd **80** , 3–93 (1970)

[16] **Szendrei, Á. :** *Idempotent algebras with restrictions on subalgebras.* Acta Sci. Math. (Szeged) **51**, 251–268 (1987)

[17] **Szendrei, Á. :** *A classification of strictly simple algebras with trivial subalgebras.* Demonstratio Math. **24**, 149–173 (1991)

eingegangen: 10. August 1997

Autor:

Dietlinde Lau
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
18051 Rostock
Germany