Rostock. Math. Kolloq. **51**, 141–158 (1997)

Subject Classification (AMS)
54A05, 54A20, 54C35, 54D45, 54D50, 54E15

Gerhard Preuß

Was ist der geeignete Rahmen zur Behandlung topologischer Probleme?

Gewidmet den Herren Professoren
G. Maeß, H. Poppe *und* G. Wildenhain

ABSTRACT. At first several desirable properties of a concept of 'space' in Topology are considered. Unfortunately, the usual concept of topological space does not fulfill any of them. Also uniform spaces do not behave much better. Thus, some improvements of the concept of space are discussed such as limit spaces or uniform limit spaces. But even these spaces do not have all the mentioned properties. Then a satisfactory and simple solution is presented by introducing semiuniform convergence spaces, whose systematic study has been begun by the author [29] in 1995.

KEY WORDS. Topological spaces, uniform spaces, limit spaces, uniform limit spaces, natural function spaces, hereditary quotients, productivity of quotients, local (pre-) compactness, semiuniform convergence spaces.

1 Einführung

Man betrachte folgende Probleme topologischer Art:

(1) Entfernt man aus dem „Raum“ $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen den Punkt 0 oder das abgeschlossene Einheitsintervall $[0,1]$, so sind die entstehenden „Räume“ nicht isomorph.

(2) (a) Auf der Menge $C(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},[0,1])$ aller „stetigen“ Abbildungen des „Raumes“ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen reeller Zahlen in das abgeschlossene Einheitsintervall $[0,1]$ gibt es eine gröbste „Raumstruktur“ derart, daß die Auswertungsabbildung $ev : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times C(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},[0,1]) \longrightarrow [0,1]$, definiert durch $ev((x_n),f) = f((x_n))$ „stetig“ ist.

(b) Eng zusammen mit (a) hängt die folgende allgemeine Formulierung:
Für jedes Paar (X, Y) von „Räumen" gibt es einen *natürlichen Funktionenraum* Y^X, dem die Menge $C(X, Y)$ der „stetigen" Abbildungen von X nach Y zugrundeliegt, d. h., die Menge $C(X, Y)$ kann so mit einer „Raumstruktur" versehen werden, daß gelten:

α) Die Auswertungsabbildung $ev : X \times Y^X \longrightarrow Y$ ist „stetig".

β) Für jeden „Raum" Z und jede „stetige" Abbildung $h : X \times Z \longrightarrow Y$ ist die Abbildung $h^* : Z \longrightarrow Y^X$, definiert durch $(h^*(z))(x) = h(x, z)$ „stetig".

(3) Jede Quotientenabbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen „Räumen" X und Y ist erblich, d. h., für jedes $Z \subset Y$ ist die Abbildung $f|_{f^{-1}[Z]} : f^{-1}[Z] \longrightarrow Z$ eine Quotientenabbildung.

(4) Produkte von Quotienten(abbildungen) sind Quotienten(abbildungen).

(5) Gleichmäßigkeitsbegriffe wie gleichmäßige Stetigkeit, gleichmäßige Konvergenz, Cauchy–Folgen (bzw. Cauchy–Filter), Cauchy–Stetigkeit und Vollständigkeit sind beschreibbar.

(6) (a) Kompakt–erzeugte „Räume" sind durch geeignete Axiome beschreibbar.

(b) Für jedes Paar (X, Y) kompakt–erzeugter „Räume" gibt es einen natürlichen Funktionenraum Y^X, der kompakt–erzeugt ist, selbst dann, wenn „kompakt" nicht die Hausdorff–Eigenschaft impliziert.

Versteht man unter „Raum" einen topologischen Raum, so ist keine der Aussagen (1)–(5) richtig; bezüglich (6)(a) ist keine Lösung bekannt und (6)(b) ist richtig, wenn ein kompakter Raum gleichzeitig ein Hausdorff–Raum ist (vgl. [35; 5.1 (a)]), jedoch falsch, wenn das nicht der Fall ist (vgl. [4]).

(1) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ sind als Unterräume des üblichen topologischen Raumes $\mathbb{R}_t$ der reellen Zahlen homöomorph (= isomorph).

(2) (a) Bereits 1946 hat Arens [1; Satz 2] gezeigt, daß es auf $C(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, [0, 1])$ keine gröbste Topologie gibt, so daß die Auswertungsabbildung
$ev : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times C(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, [0, 1]) \longrightarrow [0, 1]$ stetig ist, während die entsprechende Frage für den $\mathbb{R}^n$ anstelle von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ positiv beantwortet werden kann; die natürliche Funktionenraumstruktur ist dann die Struktur der *stetigen Konvergenz*, die von Hahn [14] im Jahre 1921 in die Analysis eingeführt worden ist.

(b) Wie man leicht sieht, folgt aus dem Nichterfülltsein von (a) auch das Nichterfülltsein von (b).

(3) Im Jahre 1963 hat Arhangel'skii [2] die erblichen Quotientenabbildungen als die pseudo–offenen Abbildungen charakterisiert, wobei eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y pseudo–offen heißt, wenn sie surjektiv und stetig ist und, falls y ein Punkt von Y und U eine Umgebung von $f^{-1}(y)$ ist, stets y zum Inneren von $f^{-1}[U]$ gehört. Auch ist ein einfaches Gegenbeispiel in [15; Thm. 2] angegeben.

(4) Im Rahmen topologischer Räume sind Quotientenabbildungen i. allg. nicht einmal endlich produkttreu (vgl. etwa [10; 2.4.20]).

(5) Daß Gleichmäßigkeitsbegriffe im Rahmen topologischer Räume nicht erklärbar sind, hängt damit zusammen, daß Umgebungen verschiedener Punkte nicht der Größe nach verglichen werden können wie etwa in metrischen Räumen, in denen ϵ–Umgebungen verschiedener Punkte als gleich groß angesehen werden können.

Versteht man unter „Raum“ einen uniformen Raum etwa im Sinne von Weil [36], und unter „stetiger Abbildung“ eine gleichmäßig stetige Abbildung, so sind (1), (4) und (5) richtig:

(1) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ aufgefaßt als Unterraum des üblichen uniformen Raumes $\mathbb{R}_u$ der reellen Zahlen ist uniform zusammenhängend, während $\mathbb{R}\setminus[0\,,1]$ als Unterraum von $\mathbb{R}_u$ zwei uniforme Zusammenhangskomponenten besitzt.

(4) Im Jahre 1978 haben Hušek und Rice [18] gezeigt, daß (4) im Rahmen uniformer Räume richtig ist.

(5) Die Richtigkeit von (5) im Rahmen uniformer Räume ist bekannt; sie wurden gerade zu diesem Zweck eingeführt.

Auf der anderen Seite gibt es auch im Rahmen uniformer Räume keine natürlichen Funktionenräume, z. B. gibt es bereits auf der Menge $U(\mathbb{R}_u, \mathbb{R}_u)$ der gleichmäßig stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}_u$ nach $\mathbb{R}_u$ keine natürliche Funktionenraumstruktur (vgl. [3]). Auch sind Quotientenabbildungen zwischen uniformen Räumen i. allg. nicht erblich (vgl. [16]). Hinzu kommt, daß die Klasse der uniformen Räume nicht groß genug ist, um als Ersatz für die Klasse der topologischen Räume zu dienen.
Verschiedene Verallgemeinerungen sowohl topologischer Räume als auch uniformer Räume sind studiert worden, die die oben genannten strukturellen Defekte teilweise beheben. In diesem Zusammenhang sind die von Kowalsky [20] und Fischer [11] unabhängig voneinander eingeführten Limesräume als Verallgemeinerung topologischer Räume zu nennen; sie erfüllen die Bedingungen (2), (3), (4) und (6) (vgl. [17] und [12]). Die natürliche Funktionenraumstruktur im Rahmen von Limesräumen ist die Struktur der stetigen Konvergenz. Da auch in Limesräumen keine Gleichmäßigkeitsbegriffe erklärt werden können, stellt sich

die Frage nach Verbesserungen durch Erweiterung der Klasse der uniformen Räume. Eine solche Erweiterung ist die Klasse der uniformen Limesräume, die auf Cook und Fischer [8] zurückgehen. Allerdings erfüllen die uniformen Limesräume nicht die Bedingung (2); diese ist erst erfüllt, wenn eine geringfügige Veränderung der Definition eines uniformen Limesraumes vorgenommen wird, die auf Wyler [37] zurückgeht (vgl. [21]). Aus diesem Grunde wird heutzutage die Wyler'sche Definition verwandt und die uniformen Limesräume im Sinne von Cook und Fischer heißen Cook–Fischer–Räume. Aber auch die uniformen Limesräume im Sinne von Wyler erfüllen nicht die Bedingung (3) (vgl. [3]). Es bleibt also die Frage nach einem geeigneten Raumbegriff zu klären, mit dessen Hilfe die Probleme (1)–(6) gelöst werden können. Durch einen solchen Raumbegriff sollten sowohl Konvergenzstrukturen (wie etwa Limesraumstrukturen) als auch uniforme Konvergenzstrukturen (wie etwa uniforme Limesraumstrukturen) beschreibbar sein. Außerdem sollte die genannte Raumklasse nicht zu groß sein, aber groß genug, um alle bisher bekannten Ergebnisse über topologische Räume (allgemeiner: Limesräume) und uniforme Räume (allgemeiner: uniforme Limesräume) als Spezialfälle zu erhalten.
Die im folgenden näher betrachteten semiuniformen Konvergenzräume, deren systematische Untersuchung 1995 von Preuß [29] begonnen worden ist, lösen das Problem.

Vereinbarung: Ein Filter soll die leere Menge nicht enthalten.

2 Strukturelle Eigenschaften semiuniformer Konvergenzräume

Definition 2.1 1) *Ein* semiuniformer Konvergenzraum *ist ein Paar* $(X, \mathcal{J}_X)$, *wobei* X *eine Menge und* $\mathcal{J}_X$ *eine Menge von Filtern auf* $X \times X$ *ist derart, daß gelten:*

UC$_1$) $\dot{x} \times \dot{x} \in \mathcal{J}_X$ *für jedes* $x \in X$, *wobei* $\dot{x} \times \dot{x} = \{A \subset X \times X : (x,x) \in A\}$,

UC$_2$) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$, *sofern* $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$ *und* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$,

UC$_3$) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ *impliziert* $\mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1} : F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X$,
wobei $F^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in F\}$.

2) *Ein semiuniformer Konvergenzraum* $(X, \mathcal{J}_X)$ *heißt* semiuniformer Limesraum, *falls gilt:*

UC$_4$) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ *und* $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$ *implizieren* $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

3) *Ein semiuniformer Limesraum* $(X, \mathcal{J}_X)$ *heißt* uniformer Limesraum, *falls gilt:*

UC$_5$) *$\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$ implizieren $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$, sofern $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ existiert ($\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ wird erzeugt von der Filterbasis $\{F \circ G : F \in \mathcal{F},\ G \in \mathcal{G}\}$ und existiert, wenn $F \circ G = \{(x,y) : \exists z \in X$ mit $(x,z) \in G$ und $(z,y) \in F\} \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F},\ G \in \mathcal{G}$).*

4) *Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{J}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{J}_Y)$ zwischen semiuniformen Konvergenzräumen heißt* gleichmäßig stetig, *wenn $f \times f(\mathcal{J}_X) \subset \mathcal{J}_Y$, d. h. $f \times f(\mathcal{F}) \in \mathcal{J}_Y$ für alle $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$.*

5) *Die Kategorie der semiuniformen Konvergenzräume (und gleichmäßig stetigen Abbildungen) wird mit* **SUConv** *bezeichnet.*

Bemerkungen 2.2

1) Ist X eine Menge und sind $\mathcal{J}_X$ und $\mathcal{J}_{X'}$ semiuniforme Konvergenzstrukturen auf X, so heißt $\mathcal{J}_X$ *feiner* als $\mathcal{J}_{X'}$ (bzw. $\mathcal{J}_{X'}$ *gröber* als $\mathcal{J}_X$), wenn $\mathcal{J}_X \subset \mathcal{J}_{X'}$ gilt (oder äquivalent dazu: $1_X : (X, \mathcal{J}_X) \longrightarrow (X', \mathcal{J}_{X'})$ ist gleichmäßig stetig).

2) Ist X eine Menge, $((X_i, \mathcal{J}_{X_i}))_{i \in I}$ eine Familie semiuniformer Konvergenzräume, $(f_i : X \longrightarrow X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen sowie $F(X \times X)$ die Menge aller Filter auf $X \times X$, so ist

$$\mathcal{J}_X = \{\mathcal{F} \in F(X \times X) : (f_i \times f_i)(\mathcal{F}) \in \mathcal{J}_{X_i} \text{ für alle } i \in I\}$$

die gröbste semiuniforme Konvergenzstruktur auf X, bezüglich der alle f_i gleichmäßig stetig sind; diese heißt die *initiale semiuniforme Konvergenzstruktur* bez. der gegebenen Daten. Genauso wie in der Theorie topologischer Räume lassen sich mit Hilfe initialer Strukturen Unterräume und Produkte definieren.

3) Ist X eine Menge, $((X_i, \mathcal{J}_{X_i}))_{i \in I}$ eine Familie semiuniformer Konvergenzräume und $(f_i : X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen, so ist

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_X = \{\mathcal{F} \in F(X \times X) :\ & \text{es existiert ein } i \in I \text{ und ein } \mathcal{F}_i \in \mathcal{J}_{X_i} \text{ mit} \\ & (f_i \times f_i)(\mathcal{F}_i) \subset \mathcal{F}\} \cup \{\dot{x} \times \dot{x} : x \in X\}\end{aligned}$$

die feinste semiuniforme Konvergenzstruktur bez. der alle f_i gleichmäßig stetig sind; diese heißt die *finale semiuniforme Konvergenzstruktur* bez. der gegebenen Daten. Falls $X = \bigcup\limits_{i \in I} f_i[X_i]$ ist, vereinfacht sich $\mathcal{J}_X$ wie folgt:

$$\mathcal{J}_X = \{\mathcal{F} \in F(X \times X) : \text{es existiert ein } i \in I \text{ und ein } \mathcal{F}_i \in \mathcal{J}_{X_i} \text{ mit } (f_i \times f_i)(\mathcal{F}_i) \subset \mathcal{F}\}.$$

Genauso wie in der Theorie topologischer Räume lassen sich mit Hilfe finaler Strukturen Quotientenräume und Summenräume (= Coprodukte) definieren.

Satz 2.3 *Sind* $\mathbf{X} = (X, \mathcal{J}_X)$ *und* $\mathbf{Y} = (Y, \mathcal{J}_Y)$ *semiuniforme Konvergenzräume, so gibt es einen natürlichen Funktionenraum* $\mathbf{Y^X}$ *in* **SUConv**, *dessen zugrundeliegende Menge die Menge* $[\mathbf{X},\mathbf{Y}]_{\mathbf{SUConv}}$ *aller gleichmäßig stetigen Abbildungen von* $\mathbf{X}$ *nach* $\mathbf{Y}$ *ist und dessen semiuniforme Konvergenzstruktur* $\mathcal{J}_{X,Y}$ *gegeben ist durch*

$$\mathcal{J}_{X,Y} = \{\Phi \in F([\mathbf{X},\mathbf{Y}]_{\mathbf{SUConv}} \times [\mathbf{X},\mathbf{Y}]_{\mathbf{SUConv}}) : \Phi(\mathcal{F}) \in \mathcal{J}_Y \textit{ für alle } \mathcal{F} \in \mathcal{J}_X\},$$

sofern $\Phi(\mathcal{F})$ *den von der Filterbasis* $\{A(F) : A \in \Phi,\ F \in \mathcal{F}\}$ *erzeugten Filter bezeichnet und* $A(F) = \{(f(a), g(b)) : (f,g) \in A,\ (a,b) \in F\}$ *ist.*

Beweis:

1) $\mathcal{J}_{X,Y}$ ist eine semiuniforme Konvergenzstruktur:

UC$_1$) $\dot{f} \times \dot{f} \in \mathcal{J}_{X,Y}$ für jedes $f \in$ **SUConv**, weil $\dot{f} \times \dot{f}(\mathcal{F}) = (f \times f)(\mathcal{F}) \in \mathcal{J}_Y$ für jedes $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ gilt.

UC$_2$) folgt sofort aus $\Phi(\mathcal{F}) \subset \Theta(\mathcal{F})$ für alle $\Phi, \Theta \in F([\mathbf{X},\mathbf{Y}]_{\mathbf{SUConv}} \times [\mathbf{X},\mathbf{Y}]_{\mathbf{SUConv}})$ mit
$\Phi \subset \Theta$ und alle $\mathcal{F} \in F(X \times X)$.

UC$_3$) Sei $\Phi \in \mathcal{J}_{X,Y}$. Dann gilt $\Phi^{-1}(\mathcal{F}) = (\Phi(\mathcal{F}^{-1}))^{-1}$ für jedes $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$. Da $\mathcal{F}^{-1} \in \mathcal{J}_X$, ist $\Phi(\mathcal{F}^{-1}) \in \mathcal{J}_Y$. Folglich gilt $(\Phi(\mathcal{F}^{-1}))^{-1} \in \mathcal{J}_Y$, weil $\mathbf{Y}$ die Bedingung **UC**$_3$) erfüllt. Somit ist $\Phi^{-1} \in \mathcal{J}_{X,Y}$.

2) α) Die Auswertungsabbildung $ev : \mathbf{X} \times \mathbf{Y^X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ ist gleichmäßig stetig, weil $ev \times ev\,(\mathcal{F} \times \Phi) = \Phi(\mathcal{F})$ gilt.

β) Sei $\mathbf{Z} = (Z, \mathcal{J}_Z)$ ein semiuniformer Konvergenzraum sowie $f : \mathbf{X} \times \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Y}$ eine gleichmäßig stetige Abbildung. Dann ist $\overline{f} : \mathbf{Z} \longrightarrow ([\mathbf{X},\mathbf{Y}]_{\mathbf{SUConv}}, \mathcal{J}_{X,Y})$, definiert durch $\overline{f}(z)(x) = f(x,z)$ für alle $x \in X$ und $z \in Z$ ebenfalls eine gleichmäßig stetige Abbildung, weil nach Voraussetzung $(\overline{f} \times \overline{f})(\mathcal{G})(\mathcal{F}) = (f \times f)(\mathcal{F} \times \mathcal{G}) \in \mathcal{J}_Y$ für alle $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_Z$ und alle $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$, d. h. $(\overline{f} \times \overline{f})(\mathcal{G}) \in \mathcal{J}_{X,Y}$ für alle $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_Z$.

Definition 2.4 *Eine* partielle gleichmäßig stetige Abbildung *von einem semiuniformen Konvergenzraum* $(X, \mathcal{J}_X)$ *in einen semiuniformen Konvergenzraum* $(Y, \mathcal{J}_Y)$ *ist eine gleichmäßig stetige Abbildung* $f : (Z, \mathcal{J}_Z) \longrightarrow (Y, \mathcal{J}_Y)$, *die von einem Unterraum* $(Z, \mathcal{J}_Z)$ *von* $(X, \mathcal{J}_X)$ *ausgeht.*

Satz 2.5 *Jeder semiuniforme Konvergenzraum $(Y, \mathcal{J}_Y)$ besitzt eine Einpunkt–Erweiterung $(Y^*, \mathcal{J}_{Y^*}) \in |\,\mathbf{SUConv}\,|$, d. h., jedes $(Y, \mathcal{J}_Y) \in |\,\mathbf{SUConv}\,|$ kann durch Hinzufügung eines einzelnen Punktes ∞_Y in einen semiuniformen Konvergenzraum $(Y^*, \mathcal{J}_{Y^*})$ eingebettet werden derart, daß für jede partielle gleichmäßig stetige Abbildung $f : (Z, \mathcal{J}_Z) \longrightarrow (Y, \mathcal{J}_Y)$ von $(X, \mathcal{J}_X) \in |\,\mathbf{SUConv}\,|$ nach $(Y, \mathcal{J}_Y) \in |\,\mathbf{SUConv}\,|$ die Abbildung $f^* : (X, \mathcal{J}_X) \longrightarrow (Y^*, \mathcal{J}_{Y^*})$, definiert durch*

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in Z \\ \infty_Y & \text{für } x \notin Z \end{cases} \quad ,$$

gleichmäßig stetig ist.

Beweis: Sei $(Y, \mathcal{J}_Y) \in |\,\mathbf{SUConv}\,|$. Man setze $Y^* = Y \cup \{\infty_Y\}$ mit $\infty_Y \notin Y$. Für jedes $M \subset Y^* \times Y^*$ sei $M^* = M \cup (Y^* \times \{\infty_Y\}) \cup (\{\infty_Y\} \times Y^*)$. Für jedes $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_Y$ betrachte man den Filter $\mathcal{F}^* = \{F^* : F \in \mathcal{F}\}$ auf $Y^* \times Y^*$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{Y^*} = \{\mathcal{H} \in F(Y^* \times Y^*) : \text{ es existiert ein } \mathcal{F} \in \mathcal{J}_Y \text{ mit } \mathcal{F}^* \subset \mathcal{H} \text{ oder} \\ \{(\infty_Y, \infty_Y)\}^* \in \mathcal{H}\} \cup \{\dot{\infty}_Y \times \dot{\infty}_Y\} \end{aligned}$$

eine semiuniforme Konvergenzstruktur auf Y^*, die, wie man leicht nachprüft, die gewünschten Eigenschaften hat.

Definition 2.6 1) *Eine Familie $(f_i : (X_i, \mathcal{J}_{X_i}) \longrightarrow (X, \mathcal{J}_X))_{i \in I}$ gleichmäßig stetiger Abbildungen $f_i : (X_i, \mathcal{J}_{X_i}) \longrightarrow (X, \mathcal{J}_X)$ zwischen semiuniformen Konvergenzräumen heißt* finale Senke *(in* **SUConv***), wenn $\mathcal{J}_X$ die finale* **SUConv***–Struktur bez. der gegebenen Daten ist.*

2) *Eine finale Senke $(f_i : (X_i, \mathcal{J}_{X_i}) \longrightarrow (X, \mathcal{J}_X))_{i \in I}$ in* **SUConv** *heißt* erblich*, wenn folgendes gilt: Ist $(Y, \mathcal{J}_Y)$ ein Unterraum von $(X, \mathcal{J}_X)$ und $(Y_i, \mathcal{J}_{Y_i})$ ein Unterraum von $(X_i, \mathcal{J}_{X_i})$ mit $Y_i = f_i^{-1}[Y]$, so ist $(f_i|_{Y_i} : (Y_i, \mathcal{J}_{Y_i}) \longrightarrow (Y, \mathcal{J}_Y))_{i \in I}$ ebenfalls eine finale Senke in* **SUConv**.

Korollar 2.7 *Finale Senken in* **SUConv** *sind erblich.*

Beweis: Die Behauptung ist eine Folgerung aus Satz 2.5 (vgl. [16 ; Thm. 1]), kann aber auch direkt nachgewiesen werden.

Bemerkung 2.8 Da eine Quotientenabbildung $f : (X, \mathcal{J}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{J}_Y)$ zwischen semiuniformen Konvergenzräumen eine surjektive Abbildung ist derart, daß $\mathcal{J}_Y$ die finale Struktur bez. f ist, folgt aus Korollar 2.7, daß *in* **SUConv** *Quotienten(abbildungen) erblich* sind.

Satz 2.9 *Ist* $(f_i : (X_i, \mathcal{J}_{X_i}) \longrightarrow (Y_i, \mathcal{J}_{Y_i}))_{i\in I}$ *eine Familie von Quotientenabbildungen in* **SUConv**, *so ist auch* $\prod f_i : \prod(X_i, \mathcal{J}_{X_i}) \longrightarrow \prod(Y_i, \mathcal{J}_{Y_i})$, *definiert durch* $(\prod f_i)((x_i)) = (f_i(x_i))$, *eine Quotientenabbildung in* **SUConv**.

Beweis: s. [28; 3.2].

3 Zusammenhang mit Konvergenzstrukturen und uniformen Konvergenzstrukturen

Lemma 3.1 1) *Sei* $(X, \mathcal{W})$ *ein uniformer Raum (im Sinne von Weil). Dann ist* $[\mathcal{W}] = \{\mathcal{F} \in F(X \times X) : \mathcal{F} \supset \mathcal{W}\}$ *eine uniforme Limesraumstruktur auf* X.

2) *Ist* $(X, \mathcal{J}_X)$ *ein uniformer Limesraum und existiert ein* $\mathcal{W} \in \mathcal{J}_X$ *mit* $\mathcal{J}_X = [\mathcal{W}]$, *so ist* $(X, \mathcal{W})$ *ein uniformer Raum (im Sinne von Weil).*

3) *Eine Abbildung* $f : (X, \mathcal{W}) \longrightarrow (Y, \mathcal{R})$ *zwischen uniformen Räumen ist gleichmäßig stetig genau dann, wenn* $f : (X, [\mathcal{W}]) \longrightarrow (Y, [\mathcal{R}])$ *gleichmäßig stetig ist.*

Bemerkung 3.2 Aufgrund von 3.1 braucht man zwischen uniformen Räumen und uniformen Hauptlimesräumen, d. h. uniformen Limesräumen $(X, \mathcal{J}_X)$, für die ein $\mathcal{W} \in \mathcal{J}_X$ existiert mit $\mathcal{J}_X = [\mathcal{W}]$, nicht zu unterscheiden.

Lemma 3.3 *Ist* $(f_i : (X, \mathcal{J}_X) \longrightarrow (X_i, \mathcal{J}_{X_i}))_{i\in I}$ *eine initiale Quelle in* **SUConv**, *d. h.* $\mathcal{J}_X$ *ist die initiale* **SUConv**–*Struktur bez. der gegebenen Daten, und sind alle* $(X_i, \mathcal{J}_{X_i})$ *uniforme Räume, so ist auch* $(X, \mathcal{J}_X)$ *ein uniformer Raum.*

Korollar 3.4 *Die in* **SUConv** *gebildeten Unterräume und Produkte uniformer Räume sind uniforme Räume.*

Definition 3.5 1) *Ein* Filterraum *ist ein Paar* (X, γ), *wobei* X *eine Menge und* γ *eine Menge von Filtern auf* X *ist derart, daß gelten:*

Fil$_1$) $\dot{x} \in \gamma$ *für jedes* $x \in X$, *wobei* $\dot{x} = \{A \subset X : x \in A\}$,

Fil$_2$) $\mathcal{F} \in \gamma$, *sofern* $\mathcal{G} \in \gamma$ *und* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Ist (X, γ) *ein Filterraum, so heißen die Elemente von* γ Cauchy–Filter.

2) *Eine Abbildung* $f : (X, \gamma) \longrightarrow (X', \gamma')$ *zwischen Filterräumen heißt* Cauchy–stetig, *wenn* $f(\mathcal{F}) \in \gamma'$ *für jedes* $\mathcal{F} \in \gamma$ *gilt.*

3) *Die Kategorie der Filterräume (und Cauchy–stetigen Abbildungen) wird mit* **Fil** *bezeichnet.*

Beispiele 3.6

1) Ist $(X, \mathcal{J}_X)$ ein semiuniformer Konvergenzraum, so ist $(X, \gamma_{\mathcal{J}_X})$ ein Filterraum, falls

$$\gamma_{\mathcal{J}_X} = \{\mathcal{F} \in F(X) : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \in \mathcal{J}_X\}$$

und $F(X)$ die Menge aller Filter auf X bezeichnet. $(X, \gamma_{\mathcal{J}_X})$ heißt der *unterliegende Filterraum* von $(X, \mathcal{J}_X)$; die Elemente von $\gamma_{\mathcal{J}_X}$ heißen auch $\mathcal{J}_X$*–Cauchy–Filter*.

2) Ist (X, γ) ein Filterraum, so ist $(X, \mathcal{J}_\gamma)$ ein semiuniformer Konvergenzraum, falls

$$\mathcal{J}_\gamma = \{\mathcal{F} \in F(X \times X) : \exists\, \mathcal{G} \in \gamma \text{ mit } \mathcal{F} \supset \mathcal{G} \times \mathcal{G}\};$$

der unterliegende Filterraum von $(X, \mathcal{J}_\gamma)$ ist gerade (X, γ).

Definition 3.7 *Ein semiuniformer Konvergenzraum $(X, \mathcal{J}_X)$ heißt* **Fil**–bestimmt*, wenn $\mathcal{J}_X = \mathcal{J}_{\gamma_{\mathcal{J}_X}}$ gilt, d. h. wenn er von seinen Cauchy–Filtern „erzeugt" wird.*

Satz 3.8 1) *Ist $(f_i : (X_i, \mathcal{J}_{X_i}) \longrightarrow (X, \mathcal{J}_X))_{i \in I}$ eine finale Senke in* **SUConv** *und sind alle $(X_i, \mathcal{J}_{X_i})$* **Fil***–bestimmt, so ist auch $(X, \mathcal{J}_X)$* **Fil***–bestimmt.*

2) *Ist $(f_i : (X, \mathcal{J}_X) \longrightarrow (X_i, \mathcal{J}_{X_i}))_{i \in I}$ eine initiale Quelle in* **SUConv** *und sind alle $(X_i, \mathcal{J}_{X_i})$* **Fil***–bestimmt, so ist auch $(X, \mathcal{J}_X)$* **Fil***–bestimmt.*

Bemerkung 3.9 Bezeichnet **Fil–D–SUConv** die Kategorie der **Fil**–bestimmten semiuniformen Konvergenzräume (und gleichmäßig stetigen Abbildungen), so ist **Fil** konkret isomorph zu **Fil–D–SUConv**, wie man leicht nachprüft, d. h. *zwischen* **Fil***–bestimmten semiuniformen Konvergenzräumen und Filterräumen braucht man nicht zu unterscheiden.*

Definition 3.10 1) *Ein* verallgemeinerter Konvergenzraum *ist ein Paar (X, q), wobei X eine Menge und $q \subset F(X) \times X$ derart, daß gelten:*

C$_1$) $(\dot{x}, x) \in q$ *für alle* $x \in X$

C$_2$) $(\mathcal{F}, x) \in q$*, falls* $(\mathcal{G}, x) \in q$ *und* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Anstelle von $(\mathcal{F}, x) \in q$ schreibt man auch $\mathcal{F} \xrightarrow{q} x$ oder kurz $\mathcal{F} \longrightarrow x$ und sagt $\mathcal{F}$ konvergiert gegen x.

2) *Ein verallgemeinerter Konvergenzraum* (X,q) *heißt*

   a) *ein* Kent–Konvergenzraum*, falls folgendes gilt:*

   C$_3$) $(\mathcal{F}\cap\dot{x},x)\in q$*, sofern* $(\mathcal{F},x)\in q$ *ist,*

   b) *ein* Limesraum*, falls folgendes gilt:*

   C$_4$) $(\mathcal{F}\cap\mathcal{G},x)\in q$*, sofern* $(\mathcal{F},x)\in q$ *und* $(\mathcal{G},x)\in q$ *sind.*

3) *Ein verallgemeinerter Konvergenzraum* (X,q) *heißt* symmetrisch*, wenn gilt:*

(S) $$(\mathcal{F},x)\in q \text{ und } y\in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \text{ implizieren } (\mathcal{F},y)\in q\ .$$

Beispiele 3.11

1) Ist $(X,\mathcal{J}_X)$ ein semiuniformer Konvergenzraum, so ist $(X,q_{\gamma_{\mathcal{J}_X}})$ ein symmetrischer *Kent–Konvergenzraum*, sofern

$$(\mathcal{F},x)\in q_{\gamma_{\mathcal{J}_X}} \iff \mathcal{F}\cap\dot{x}\in\gamma_{\mathcal{J}_X}$$

gilt.

2) Ist $(X,\mathcal{X})$ ein topologischer Raum und definiert man $q_{\mathcal{X}}\subset F(X)\times X$ durch

$$(\mathcal{F},x)\in q_{\mathcal{X}} \iff \mathcal{F}\supset\mathcal{U}(x),$$

wobei $\mathcal{U}(x)$ den Umgebungsfilter von $x\in X$ in $(X,\mathcal{X})$ bezeichnet, so ist $(X,q_{\mathcal{X}})$ ein Limesraum.

3) Ist (X,q) ein verallgemeinerter Konvergenzraum, so ist (X,γ_q) ein Filterraum, sofern

$$\gamma_q = \{\mathcal{F}\in F(X):\ \exists\, x\in X \text{ mit } (\mathcal{F},x)\in q\}$$

ist.

Definition 3.12 1) *Ist* $(X,\mathcal{J}_X)$ *ein semiuniformer Konvergenzraum, so heißt* $(X,q_{\gamma_{\mathcal{J}_X}})$ der zugrundeliegende (symmetrische) Kent–Konvergenzraum.

2) *Ein semiuniformer Konvergenzraum* $(X,\mathcal{J}_X)$ *heißt* Konvergenzraum*, wenn*

$$\mathcal{J}_X = \{\mathcal{F}\in F(X):\ \text{ es gibt ein } (\mathcal{G},x)\in q \text{ mit } \mathcal{F}\supset\mathcal{G}\times\mathcal{G}\}$$

gilt, d.h., wenn er von seinen konvergenten Filtern „erzeugt“ wird.

3) *Ein semiuniformer Konvergenzraum* $(X,\mathcal{J}_X)$ *heißt* vollständig*, wenn jeder* $\mathcal{J}_X$*–Cauchy–Filter im zugrundeliegenden Kent–Konvergenzraum konvergiert.*

Bemerkung 3.13 Die Kategorie **Conv** der Konvergenzräume (und gleichmäßig stetigen Abbildungen) ist konkret isomorph zur Kategorie $\mathbf{KConv_s}$ der symmetrischen Kent–Konvergenzräume (und stetigen Abbildungen), wie man leicht nachprüft; d. h., *zwischen Konvergenzräumen und symmetrischen Kent–Konvergenzräumen braucht man nicht zu unterscheiden.*

Satz 3.14 *Ein semiuniformer Konvergenzraum ist genau dann ein Konvergenzraum, wenn er vollständig und* **Fil**–*bestimmt ist.*

Beweis: s. [29 ; 3.8] .

Satz 3.15 *Ist* $(f_i : (X_i, \mathcal{J}_{X_i}) \longrightarrow (X, \mathcal{J}_X))_{i\in I}$ *eine finale Senke in* **SUConv** *und sind alle* $(X_i, \mathcal{J}_{X_i})$ *Konvergenzräume, so ist auch* $(X, \mathcal{J}_X)$ *ein Konvergenzraum.*

Lemma 3.16 *Ist* (X, q) *ein verallgemeinerter Konvergenzraum, so wird ein Hüllenoperator* $cl_q : \mathfrak{P}(X) \longrightarrow \mathfrak{P}(X)$ *(im Sinne von Čech [6]) definiert durch*

$$cl_q(A) = \{x \in X : \text{ es gibt ein } \mathcal{G} \in F(X) \text{ mit } (\mathcal{G}, x) \in q \text{ und } A \in \mathcal{G}\}$$

für alle $A \subset X$.

Satz 3.17 1) *Wenn* $(X, \mathcal{J}_X)$ *ein Konvergenzraum ist und* $A \subset X$ *eine abgeschlossene Teilmenge ist (d. h.* $A = cl_{q_{\gamma_{\mathcal{J}_X}}} A$*), so ist* $(A, \mathcal{J}_A)$ *ein Konvergenzraum, falls* $\mathcal{J}_A$ *die initiale* **SUConv**–*Struktur bez. der Inklusionsabbildung* $i : A \longrightarrow X$ *ist; kurz: Abgeschlossene Unterräume von Konvergenzräumen sind Konvergenzräume.*

2) *Sei* $((X_i, \mathcal{J}_{X_i}))_{i\in I}$ *eine Familie von nicht–leeren semiuniformen Konvergenzräumen. Dann ist der Produktraum* $(\prod X_i, \mathcal{J}_{\Pi X_i})$ *(gebildet in* **SUConv***) genau dann vollständig, wenn alle* $(X_i, \mathcal{J}_{X_i})$ *vollständig sind.*

Definition 3.18 1) *Ein verallgemeinerter Konvergenzraum* (X, q) *heißt* topologisch, *wenn es eine Topologie* $\mathcal{X}$ *auf* X *gibt, so daß* $q = q_{\mathcal{X}}$ *gilt.*

2) *Ein semiuniformer Konvergenzraum* $(X, \mathcal{J}_X)$ *heißt* topologisch, *wenn er Konvergenzraum ist und der zugehörige (symmetrische) Kent–Konvergenzraum* $(X, q_{\gamma_{\mathcal{J}_X}})$ *topologisch ist.*

3) *Die Kategorie der topologischen semiuniformen Konvergenzräume (und gleichmäßig stetigen Abbildungen) wird mit* **T–SUConv** *bezeichnet.*

Satz 3.19 1) *Abgeschlossene Unterräume (gebildet in* **SUConv***) topologischer semiuniformer Konvergenzräume sind topologisch.*

2) *Produkte (gebildet in* **SUConv***) topologischer semiuniformer Konvergenzräume sind topologisch.*

Bemerkungen 3.20

1) Die Kategorie **T–SUConv** ist konkret isomorph zur Kategorie $\mathbf{R}_0$–**Top** der R_0–topologischen Räume (und stetigen Abbildungen), wobei ein topologischer Raum $(X, \mathcal{X})$ ein R_0–Raum ist genau dann, wenn für jedes Paar $(x, y) \in X \times X$ aus $x \in \overline{\{y\}}$ stets $y \in \overline{\{x\}}$ folgt; z. B. sind alle T_1–Räume und alle T_3–Räume R_0–Räume. *Man braucht also zwischen R_0–topologischen Räumen und topologischen semiuniformen Konvergenzräumen nicht zu unterscheiden.*

2) Betrachten wir noch einmal das Problem (1). Die Aussage (1) war richtig für uniforme Räume, aber falsch für topologische Räume. *Der Grund, warum sich uniforme Räume hinsichtlich der Bildung von Unterräumen besser verhalten als topologische Räume, wird im Rahmen semiuniformer Konvergenzräume deutlich*: *Unterräume uniformer Räume sind uniform, Unterräume topologischer Räume sind nicht notwendig topologisch* ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ sind als offene Unterräume von $\mathbb{R}_t$ nicht topologisch, weil sie nicht vollständig sind!).

4 Lokale Kompaktheit und lokale Präkompaktheit

Definition 4.1 *Ein semiuniformer Konvergenzraum $(X, \mathcal{J}_X)$ heißt*

1) präkompakt *(oder* total beschränkt*), falls jeder Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf X ein $\mathcal{J}_X$–Cauchy–Filter ist,*

2) kompakt*, falls jeder Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf X in $(X, q_{\gamma_{\mathcal{J}_X}})$ konvergiert,*

3) lokal präkompakt *(bzw.* lokal kompakt*), falls jedes $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ eine präkompakte (bzw. kompakte) Teilmenge des Produktraumes $(X, \mathcal{J}_X) \times (X, \mathcal{J}_X)$ enthält, wobei eine Teilmenge eines semiuniformen Konvergenzraumes präkompakt (bzw. kompakt) heißt, wenn sie als Unterraum präkompakt (bzw. kompakt) ist.*

4) diagonal*, falls der von der Diagonalen Δ_X von $X \times X$ erzeugte Filter (Δ_X) zu $\mathcal{J}_X$ gehört.*

5) t–regulär, *falls für jedes* $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ *der Unterfilter* $\overline{\mathcal{F}}^t$, *der von allen abgeschlossenen Elementen von* $\mathcal{F}$ *(d.h. von allen* $F \in \mathcal{F}$ *mit* $F = cl_{q_{\gamma_{\mathcal{J}_X}}} F$*) erzeugt wird, zu* $\mathcal{J}_X$ *gehört.*

4.2 Zwischen den in 4.1 genannten Begriffen bestehen die im folgenden Implikationsschema dargestellten Zusammenhänge (vgl. [31]) :

$$\begin{tikzcd}
\textbf{lokal präkompakt} \arrow[r, Rightarrow, shift left, "\text{diagonal}"] \arrow[d, Rightarrow, shift left, "\substack{\text{t–regulär}\\ \text{und}\\ \text{vollständig}}"] & \textbf{präkompakt} \arrow[l, Rightarrow, shift left] \arrow[d, Rightarrow, shift left, "\text{vollständig}"] \\
\textbf{lokal kompakt} \arrow[u, Rightarrow, shift left] \arrow[r, Rightarrow, shift left, "\text{diagonal}"] & \textbf{kompakt} \arrow[l, Rightarrow, shift left] \arrow[u, Rightarrow, shift left]
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 4.3 Ein diagonaler semiuniformer Limesraum heißt auch *Cook–Fischer–Raum*; speziell ist jeder uniforme Raum ein Cook–Fischer–Raum. Insbesondere ist *die Lokalisation der Präkompaktheit oder Kompaktheit mehr ein topologisches Prozedere als ein uniformes*, weil aufgrund von 4.2 in uniformen Räumen Präkompaktheit (bzw. Kompaktheit) mit lokaler Präkompaktheit (bzw. lokaler Kompaktheit) übereinstimmt, während in regulären topologischen Räumen lokale Präkompaktheit lokale Kompaktheit bedeutet, die von Kompaktheit (= Präkompaktheit) verschieden ist (man beachte: Jeder reguläre topologische Raum ist ein R_0–Raum, also ein topologischer semiuniformer Konvergenzraum, der t–regulär und vollständig ist).

Satz 4.4 1) *Ein semiuniformer Konvergenzraum* $(X, \mathcal{J}_X)$ *ist genau dann lokal kompakt, wenn er kompakt–erzeugt ist, d.h. wenn* $\mathcal{J}_X$ *die finale* **SUConv**–*Struktur bezüglich der Familie* $(j_i : (K_i, \mathcal{J}_{K_i}) \longrightarrow (X, \mathcal{J}_X))$ *der Inklusionen aller kompakten Unterräume von* $(X, \mathcal{J}_X)$ *ist.*

2) *Ein semiuniformer Konvergenzraum* $(X, \mathcal{J}_X)$ *ist genau dann lokal präkompakt, wenn er präkompakt–erzeugt ist, wobei präkompakt–erzeugt analog zu kompakt–erzeugt definiert wird.*

Beweis: s. [30 ; 3.12] und [31 ; 3.15] .

Satz 4.5 *Ein Hausdorff'scher topologischer Raum* $(X, \mathcal{X})$ *ist genau dann ein k–Raum, wenn er unterliegender topologischer Raum eines lokal kompakten semiuniformen Konvergenzraumes* $(X, \mathcal{J}_X)$ *ist, d.h. wenn die abgeschlossenen Mengen in* $(X, \mathcal{X})$ *genau die abgeschlossenen Mengen in* $(X, q_{\gamma_{\mathcal{J}_X}})$ *sind.*

Beweis: s. [30 ; 3.15. 3) a)] .

Satz 4.6 *Bezeichnet* **LC–SUConv** *(bzw.* **LPC–SUConv***) die Kategorie der lokal kompakten (bzw. lokal präkompakten) semiuniformen Konvergenzräume (und gleichmäßig stetigen Abbildungen), so gibt es zu jedem Paar* $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ *von lokal kompakten (bzw. lokal präkompakten) semiuniformen Konvergenzräumen einen natürlichen Funktionenraum* $\mathbf{Y}^{\mathbf{X}}$ *in* **LC–SUConv** *(bzw.* **LPC–SUConv***), dessen unterliegende Menge die Menge* $[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ *der gleichmäßig stetigen Abbildungen von* $\mathbf{X}$ *nach* $\mathbf{Y}$ *ist und dessen* **LC–SUConv***-Struktur (bzw.* **LPC–SUConv***-Struktur)* $(\mathcal{J}_{X,Y})_{LC}$ *(bzw.* $(\mathcal{J}_{X,Y})_{LPC}$*) aus der natürlichen Funktionenraumstruktur* $\mathcal{J}_{X,Y}$ *in* **SUConv** *wie folgt gebildet wird:*

$$(\mathcal{J}_{X,Y})_{LC} = \{\Phi \in \mathcal{J}_{X,Y} : \text{ zu } \Phi \text{ gehört eine kompakte Teilmenge von } ([\mathbf{X},\mathbf{Y}],\mathcal{J}_{X,Y}) \times ([\mathbf{X},\mathbf{Y}],\mathcal{J}_{X,Y})\,\}$$

$$((\mathcal{J}_{X,Y})_{LPC} = \{\Phi \in \mathcal{J}_{X,Y} : \text{ zu } \Phi \text{ gehört eine präkompakte Teilmenge von } ([\mathbf{X},\mathbf{Y}],\mathcal{J}_{X,Y}) \times ([\mathbf{X},\mathbf{Y}],\mathcal{J}_{X,Y})\,\})\ .$$

Beweis: s. [30 ; 3.9] (bzw. [31 ; 3.12]) .

5 Schlußbemerkungen

1) Im Rahmen semiuniformer Konvergenzräume kann auch *die Struktur der gleichmäßigen Konvergenz* beschrieben werden. Bezeichnet nämlich Δ–**SUConv** die Kategorie der diagonalen semiuniformen Konvergenzräume (und gleichmäßig stetigen Abbildungen), so heißt für jede Menge X und jeden diagonalen semiuniformen Konvergenzraum $(Y,\mathcal{J}_Y)$ die Δ–**SUConv**–Struktur

$$\mathcal{J}^u_{Y^X} = \{\Phi \in F(Y^X \times Y^X) : \Phi((\Delta_X)) \in \mathcal{J}_Y\,\}$$

die *Struktur der gleichmäßigen Konvergenz* auf Y^X. Sie stimmt für uniforme Räume mit der üblichen Struktur der uniformen Konvergenz überein (s. z. B. [33 ; S. 137]). Außerdem ergibt sie sich mit Hilfe der natürlichen Funktionenräume in **SUConv** wie folgt: Versieht man die Menge X mit der diskreten Δ–**SUConv**–Struktur $[(\Delta_X)] = \{\mathcal{F} \in F(X \times X) : \mathcal{F} \supset (\Delta_X)\}$, so ist $[(X,[(\Delta_X)]),(Y,\mathcal{J}_Y)]_{\Delta-\mathbf{SUConv}}$ $= [(X,[(\Delta_X)]),(Y,\mathcal{J}_Y)]_{\mathbf{SUConv}} = Y^X$ und die natürliche Funktionenraumstruktur $\mathcal{J}_{X,Y}$ (s. 2.3) stimmt mit der Struktur der gleichmäßigen Konvergenz überein.

2) Aus der Struktur der natürlichen Funktionenräume in **SUConv** kann auch *die Struktur der stetigen Konvergenz* gewonnen werden: Sind (X, q) und (X', q') symmetrische Limesräume und $(X, \mathcal{J}_X)$ sowie $(X', \mathcal{J}_{X'})$ die zugehörigen semiuniformen Konvergenzräume (d. h. $\mathcal{J}_X = \{\mathcal{F} \in F(X) : \exists (\mathcal{G}, x) \in q \text{ mit } \mathcal{F} \supset \mathcal{G} \times \mathcal{G}\}$ und $\mathcal{J}_Y = \{\mathcal{F} \in F(X) : \exists (\mathcal{G}, x) \in q' \text{ mit } \mathcal{F} \supset \mathcal{G} \times \mathcal{G}\}$), so ist der dem natürlichen Funktionenraum $([(X, \mathcal{J}_X), (X', \mathcal{J}_{X'})]_{\mathbf{SUConv}}, \mathcal{J}_{X,X'})$ in **SUConv** zugrundeliegende symmetrische Kent–Konvergenzraum ein Limesraum, dessen zugrundeliegende Menge die Menge der stetigen Abbildungen von (X, q) nach (X', q') ist und dessen Limesraumstruktur die Struktur der stetigen Konvergenz ist (vgl. [29 ; 7.2]).

3) Schließlich kann auf elegante Art auch der Begriff der *(gleichmäßig) gleichgradigen Stetigkeit* mit Hilfe der natürlichen Funktionenräume in **SUConv** gewonnen werden: Sind $\mathbf{X} = (X, \mathcal{J}_X)$ und $\mathbf{Y} = (Y, \mathcal{J}_Y)$ semiuniforme Konvergenzräume, so heißt eine Menge $M \subset [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{\mathbf{SUConv}}$ gleichmäßig gleichgradig stetig, wenn $(\Delta_M) \in \mathcal{J}_{X,Y}$ gilt. Ist $\mathbf{X}$ ein topologischer semiuniformer Raum (= R_0–Raum) und $\mathbf{Y}$ ein uniformer Raum, so bedeutet „gleichmäßig gleichgradig stetig“ gerade „gleichgradig stetig“ im üblichen Sinne. Damit stellt sich die Frage, ob der aus der Analysis bekannte *Satz von Ascoli* auf semiuniforme Konvergenzräume verallgemeinert werden kann. Sie ist vom Autor in [32] positiv beantwortet worden. In den letzten drei Jahrzehnten haben viele Autoren auf dem Gebiet der Verallgemeinerung des Ascoli–Satzes gearbeitet. Unter ihnen sind (in chronologischer Reihenfolge): Cook und Fischer [7], Poppe ([23], [24], [25], [26] und [27]), Dubuc [9], Kneis [19], Gähler [13], Wyler [38], Bentley und Herrlich [5], McKennon [22] sowie Sonck [34].

Literatur

[1] **Arens, R.F. :** *A topology for spaces of transformations.* Ann.Math. **47**, 480–495 (1946)

[2] **Arhangel'skii, A.V. :** *Some types of factor mappings and the relation between classes of topological spaces.* Dokl. Akad. Nauk SSSR **153**, 743–746 (1963); (= Soviet Math. Dokl. **4** 1726–1729 (1963))

[3] **Behling, A. :** *Einbettung uniformer Räume in topologische Universen.* Doktorarbeit, Freie Universität, Berlin 1992

[4] **Breger, H. :** *Die Kategorie der kompakt–erzeugten Räume als in* **Top** *coreflektive Kategorie mit Exponentialgesetz.* Diplomarbeit, Universität Heidelberg 1971

[5] **Bentley, H.L.** und **Herrlich, H.** : *Ascoli's theorem for a class of merotopic spaces.* Convergence Structures (Proc. Conf. Convergence, Bchyně), 47–53, Mathematical Research **24**, Berlin 1984

[6] **Čech, E.** : *Topological spaces.* Interscience Publishers, London–New York–Sydney 1966

[7] **Cook, C. H.** und **Fischer, H.R.** : *On equicontinuity and continous convergence.* Math. Ann. **159**, 94–104 (1965)

[8] **Cook, C.H.** und **Fischer, H.R.** : *Uniform convergence spaces.* Math. Ann. **173**, 290–306 (1967)

[9] **Dubuc, E.J.** : *Concrete quasitopoi.* In: *Applications of Sheaves.* Proc. Durham Conf. 1977. Lecture Notes in Math. **753**, 239–254, Berlin 1979

[10] **Engelking, R.** : *General Topology.* PWN–Polish Scientific Publ., Warsaw 1977

[11] **Fischer, H. R.** : *Limesräume.* Math. Ann. **137**, 269–303 (1959)

[12] **Frölicher, A.** : *Kompakt erzeugte Räume und Limesräume.* Math. Z. **129**, 57–63 (1972)

[13] **Gähler, W.** : *Grundstrukturen der Analysis.* Band 1 und 2, Basel 1977/78

[14] **Hahn, H.** : *Theorie der reellen Funktionen.* Berlin 1921

[15] **Herrlich, H.** : *Are there convenient subcategories of* **Top**?. Topology Appl. **15**, 263–271 (1983)

[16] **Herrlich, H.** : *Hereditary topological constructs.* In: Frolik, Z. (ed.): *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra VI*, pp. 249–262, Berlin 1988

[17] **Herrlich, H.** und **Hušek, M.** : *Categorical Topology.* In: Hušek, M. und van Mills, J. (ed.): *Recent Progress in General Topology.* Amsterdam 1992

[18] **Hušek, M.** und **Rice, M. D.** : *Productivity of coreflective subcategories of uniform spaces.* Gen. Topology Appl. **9**, 295–306 (1978)

[19] **Kneis, G.** : *Zum Satz von Arzelà–Ascoli in pseudouniformen Räumen.* Math. Nachr. **79**, 49–54 (1977)

[20] **Kowalsky, H.-J.** : *Limesräume und Komplettierung.* Math. Nachr. **12**, 301–340 (1954)

[21] **Lee, R. S.** : *The category of uniform convergence spaces is cartesian closed.* Bull. Austral. Math. Soc. **15**, 461–465 (1976)

[22] **McKennon, M. :** *Ascoli's theorem and the pure states of a C^*–algebra.* Kyungpook Math. J. **28** (1), 23–34 (1988)

[23] **Poppe, H. :** *Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà.* Math. Nachr. **30**, 87–122 (1965)

[24] **Poppe, H. :** *Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà II.* Monatsber. DAW zu Berlin **8** (4), 259–264 (1966)

[25] **Poppe, H. :** *Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà III, IV, V, VI.* Proc. Japan. Acad. **44**, 234–239, 240–242, 318–321, 322–324 (1968)

[26] **Poppe, H. :** *Zum Satz von Ascoli und Arzelà.* Math. Ann. **171**, 46–53 (1967)

[27] **Poppe, H. :** *Compactness in General Function Spaces.* Berlin 1974

[28] **Preuß, G. :** *Cauchy spaces and generalizations.* Math. Japon. **38**, 803–812 (1993)

[29] **Preuß, G. :** *Semiuniform convergence spaces.* Math. Japon. **41**, 465–491 (1995)

[30] **Preuß, G. :** *Local compactness in semiuniform convergence spaces.* Quaestiones Math. **19**, 453–466 (1966)

[31] **Preuß, G. :** *The topological universe of locally precompact semiuniform convergence space.* Topology Appl. **20**, 1–10 (1997)

[32] **Preuß, G. :** *Precompactness and compactness in the natural function spaces of the category of semiuniform convergence spaces.* Q & A in Gen. Top. **15** (erscheint 1997)

[33] **Schubert, H. :** *Topologie.* Stuttgart 1964

[34] **Sonck, G. :** *On the existence of nice function space structures and applications to Ascoli theorems.* Thesis, Vrije Universiteit Brussel, Brüssel 1997

[35] **Vogt, R. M. :** *Convenient categories of topological spaces for homotopy theory.* Arch. Math. **22**, 545–555 (1971)

[36] **Weil, A. :** *Sur les espaces à structures uniformes et sur la topologie générale.* Paris 1937

[37] **Wyler, O. :** *Filter space monads, regularity, completions.* In: *Topo 72–General Topology and its Applications.* Lecture Notes in Math. **378**, 591–637, Berlin 1974

[38] **Wyler, O.** : *Ascoli theorems for cartesian closed categories.* In: *Categorical Topology.* Proc. Conf. Toledo, Ohio 1983. Sigma Series in Pure Mathematics **5**, 599–617, Berlin 1984

eingegangen: 30. September 1997

Autor:

Gerhard Preuß
Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Arnimallee 3
14195 Berlin
Germany