Rostock. Math. Kolloq. **51**, 97–110 (1997)

Subject Classification (AMS)
65D30, 44A15

Raimond Strauß

Eine Interpolationsquadratur für Finite-Part Integrale

Gewidmet den Herren Professoren
G. Maeß, H. Poppe *und* G. Wildenhain

ZUSAMMENFASSUNG. Es wird ein Quadraturverfahren für hypersinguläre Integrale im Hadamardschen Sinne mit Singularität zweiter Ordnung für Funktionen, die nur schwachen Stetigkeitsvoraussetzungen genügen, konstruiert. Es basiert auf Interpolation mit stückweisen (quadratischen bzw. kubischen) Polynomen. Die Konvergenz des Verfahrens wird bewiesen. Die in den Abschätzungen des Quadraturfehlers auftretenden Konstanten werden explizit angegeben. Es erweist sich, daß die Konvergenzordnung optimal für Funktionen $f \in C^{1+k,\lambda}[a,b]$, $k = 0,1;\ 0 < \lambda \leq 1$ ist. Aus dem Quadraturverfahren für Integrale mit quadratischer Singularität werden auf einfache Weise Verfahren für 'schwächer singuläre' Integrale, wie z.B. Intgrale im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes, gewonnen. Schließlich werden numerische Beispiele angegeben, die eine gute Übereinstimmung mit den Konvergenzergebnissen zeigen.

KEY WORDS. Strongly singular integrals, finite-part integrals, numerical approximation, quadrature.

Einleitung

In dieser Arbeit wird die numerische Berechnung von eindimensionalen Hadamardschen Integralen ([4])

$$I_p[f](x) = \,\,⨎_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^p}\,dt \quad \text{oder} \quad I_p[f](x) = \,\,⨎_a^b \frac{f(t)}{|t-x|^p}\,dt \tag{1}$$

für p aus dem Intervall $[0,2]$ und für $-\infty < a < x < b < \infty$ behandelt. Im ersten Integral ist p eine ganze Zahl. Für reelle und nicht ganzzahlige p wird das zweite Integral betrachtet. Im Falle $p = 1$ erhält man das Cauchy-Hauptwert Integral. Die Definition und wichtige Eigenschaften von $I_p[f]$ findet man im Übersichtsartikel von Monegato [6]. Dort sind auch verschiedene technische Anwendungen erwähnt, in denen derartige Integrale vorkommen. Außerdem werden Quadraturverfahren für (1) und seine mehrdimensionalen Entsprechungen behandelt. Weitere Arbeiten stammen von Diethelm [2] und eine neuere von Hansen [5]. Für einen gegebenen Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$ bezeichnet $C^{l,\omega}[c,d]$ den üblichen Teilraum der auf dem Intervall $[c,d]$ l-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Wenn speziell $\omega(\delta) = \delta^\lambda$ für $0 < \lambda \leq 1$ erfüllt ist, erhält man den Hölder-Raum $C^{l,\lambda}$. Für $p = m \in \mathbb{Z}$ existiert das Integral (1) für $f \in C^{l,\omega}[x-\epsilon, x+\epsilon]$ falls $l > m-1$ erfüllt ist. Wenn $l = m-1$ gilt, soll die Dini-Bedingung

$$\text{(A1)} \quad \int_0^{b-a} \delta^{-1}\omega(\delta)\,d\delta < c_{\omega 1} < \infty \ ,$$

die hinreichend für die Existenz von (1) ist, erfüllt sein. Für die natürliche Zahl N wird $h = \frac{b-a}{N}$ gesetzt. Die folgenden zusätzlichen Bedingungen für ω werden nötigenfalls vorausgesetzt:

$$\text{(A2)} \quad \int_0^{\vartheta} \delta^{-1}\omega(\delta)\,d\delta \leq c_{\omega 2}\omega(\vartheta) \ ,$$

$$\text{(A3)} \quad \omega(\delta)\ \left|\ln\left(\tfrac{\delta}{h}\right)\right| \leq c_{\omega 3}\omega(h) \ \text{ für } 0 \leq \delta \leq h.$$

Die Voraussetzungen (A1)-(A3) sind für $f \in C^{m-1,\lambda}$ erfüllt. Für ingenieurwissenschaftliche Untersuchungen ist besonders der Fall $p = 2$ von Interesse.

Eine Quadraturformel für p=2

Jetzt sollen die Gewichte der Quadraturformel für $I_2[f](x)$ berechnet werden. Dazu wird das Intervall $[a,b]$ in $N = 3n$ Teilintervalle der Länge h zerlegt. Die Knotenpunkte werden mit $t_i = a+ih$, für $i = 0,1,\ldots,N$ bezeichnet. Die Funktion f wird durch das stückweise Polynom $S_N \in C^1$ approximiert. Wenn q_i quadratische und k_j kubische Polynome bezeichnet, welche auf gewissen Teilintervallen definiert sind, kann man S_N folgendermaßen erklären

$$S_N(t) = \begin{cases} q_0(t) & \text{für } t \in [a, t_1]\,, \\ k_i(t) & \text{für } t \in [t_i, t_{i+1}]\,, \quad i = 3l+1, \quad l = 0,1,\ldots,n-1\,, \\ q_i(t) & \text{für } t \in [t_i, t_{i+2}]\,, \quad i = 3l+2, \quad l = 0,1,\ldots,n-2\,, \\ q_{N-1}(t) & \text{für } t \in [t_{N-1}, t_N]\,. \end{cases} \tag{2}$$

Es sollen die Bedingungen erfüllt sein:

$$S_N(t_i) = f(t_i), \quad i = 0,1,\ldots,N\,.$$

Zusätzlich werden zwei Parameter $a_0 = S'_N(a)$ und $a_N = S'_N(b)$ benötigt, um zu sichern, daß S_N eindeutig festgelegt ist. Wenn die entsprechenden Ableitungswerte bekannt sind, wird $f'(a) = a_0$ und $f'(b) = a_N$ gesetzt. Anderenfalls wird

$$a_0 = \frac{-3f(a) + 4f(a+h) - f(a+2h)}{2h} \text{ und } a_N = \frac{f(b-2h) - 4f(b-h) + 3f(b)}{2h} \tag{3}$$

gewählt. Es gilt für $f \in C^{1+k},\ k = 0,1$ die Ungleichung (vgl. [12], S. 133, Hilfssatz 5)

$$\max\{|a_0 - f'(a)|, |a_N - f'(b)|\} \leq 2h^k \omega(f^{1+k}, h)\,. \tag{4}$$

Führt man den Parameter $s = \frac{t-t_i}{h}$ ein, so erhält für $t \in [t_i, t_{i+2}]$ für die quadratischen Polynomstücke $q_i(t) = q_i(t_i + s\,h)$, $0 \leq s \leq 2$, $i = 3l + 2$, $0 \leq l \leq n-2$ von S_N die folgende Darstellung:

$$q_i(t) = f_i\,(s^2 - 3s + 2)/2 + f_{i+1}\,(-s^2 + 2s) + f_{i+2}\,(s^2 - s)/2\,. \tag{5}$$

Für q_0, q_N und die kubischen Polynomstücke k_i von S_N ist der Parameter s aus dem Intervall $0 \leq s \leq 1$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
q_0(t) &= f_0\,(1 - s^2) + f_1\,s^2 + a_0\,h\,(s - s^2)\,,\\
k_1(t) &= f_1(1 - 3s^2 + 2s^3) + f_2(3s^2 - 2s^3) + (-2f_0 + 2f_1 - a_0h)(s - 2s^2 + s^3)\\
&\quad +(-3f_2 + 4f_3 - f_4)(-s^2 + s^3)/2\,,\\
k_i(t) &= f_i(1 - 3s^2 + 2s^3) + f_{i+1}(3s^2 - 2s^3) + (f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)(s - 2s^2 + s^3)/2\\
&\quad +(-3/2f_{i+1} + 2f_{i+2} - f_{i+3}/2)(-s^2 + s^3)\,, \qquad\qquad (6)\\
k_{N-2}(t) &= f_{N-2}(1 - 3s^2 + 2s^3) + f_{N-1}(3s^2 - 2s^3) + (f_{N-2} - 4f_{N-1} + 3f_N)(s - 2s^2 + s^3)/2\\
&\quad +(-2f_{N-1} + 2f_N - a_Nh)(-s^2 + s^3)\,,\\
q_{N-1}(t) &= f_{N-1}\,(1 - 2s + s^2) + f_N\,(-s^2 + 2s) + a_N\,h\,(s^2 - s)\,.
\end{aligned}$$

Die Substitution von f durch S_N im Integral $I_2[f](x)$ liefert eine Quadraturformel

$$Q_N^{[2]}[f](x) = \sum_{i=0}^{N} f(t_i) A_i^{[2]}(x) + a_0\,B_0(x) + a_N\,B_N(x)\,. \tag{7}$$

Mit der Abkürzung $y = \frac{x-t_i}{h}$ für $i = 0, 1 \ldots, N$ ergeben sich die Quadraturgewichte als

$$
\begin{aligned}
A_0^{[2]}(y) &= \frac{1}{h}\left\{9 - \frac{1}{y} - 6\,y + \left(-16 + 20\,y - 6\,y^2\right)\,\ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| - 2\,y\,\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|\right\}\,,\\
A_1^{[2]}(y) &= \frac{1}{h}\left\{-6 + 12\,y + \left(2 - 14\,y + 12\,y^2\right)\,\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + 2\,\left(y+1\right)\,\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|\right\}\,,\\
A_{3l}^{[2]}(y) &= \frac{1}{h}\left\{18 + \left(-16 + 20\,y - 6\,y^2\right)\,\ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| - 2\,y\,\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right.\\
&\quad \left. +\,\left(16 + 20\,y + 6\,y^2\right)\,\ln\left|\frac{y+1}{y+2}\right|\right\}\,,\\
A_{3l+1}^{[2]}(y) &= \frac{1}{h}\left\{-9 + 9\,y + \frac{3}{2}\,\left(1 - 8\,y + 7\,y^2\right)\,\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + \left(3/2 + y\right)\,\ln\left|\frac{y}{y+2}\right|\right.\\
&\quad \left. +\,\left(21/2 + 8\,y + 3/2y^2\right)\,\ln\left|\frac{y+3}{y+2}\right|\right\}\,,\\
A_{3l+2}^{[2]}(y) &= \frac{1}{h}\left\{-9 - 9\,y + \left(21/2 - 8\,y + 3/2\,y^2\right)\,\ln\left|\frac{y-3}{y-2}\right| + \left(-3/2 + y\right)\,\ln\left|\frac{y-2}{y}\right|\right.\\
&\quad \left. +\,3/2\left(1 + 8\,y + 7\,y^2\right)\,\ln\left|\frac{y+1}{y}\right|\right\}\,,\\
A_{N-1}^{[2]}(y) &= \frac{1}{h}\left\{-6 - 12\,y + 2(y-1)\,\ln\left|\frac{1-y}{y}\right| + 2\left(1 + 7\,y + 6\,y^2\right)\,\ln\left|\frac{y+1}{y}\right|\right\}\,,\\
A_N^{[2]}(y) &= \frac{1}{h}\left\{9 + \frac{1}{y} + 6\,y + 2\,y\,\ln\left|\frac{y+1}{y}\right| + 2\,\left(8 + 10\,y + 3\,y^2\right)\,\ln\left|\frac{y+1}{y+2}\right|\right\}\,,\\
B_0^{[2]}(y) &= 7/2 - 3\,y + \left(-8 + 10\,y - 3\,y^2\right)\,\ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| + \left(1 - 2\,y\right)\,\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|\,,\\
B_N^{[2]}(y) &= -7/2 - 3\,y + \left(8 + 10\,y + 3\,y^2\right)\,\ln\left|\frac{y+2}{y+1}\right| - \left(1 + 2\,y\right)\,\ln\left|\frac{y+1}{y}\right|\,.
\end{aligned}
$$

Für $x = t_j$, $j = k-2, \ldots, k+2$ ist die k-te Gewichtsfunktion eventuell nicht definiert. In diesem Fall müssen die entsprechenden Grenzwerte berücksichtigt werden.

Konvergenzergebnisse

Der Fehlerterm aus (7) wird durch $R_N^{[2]}[f](x)$ bezeichnet:

$$R_N^{[2]}[f](x) = \left|I_2[f](x) - Q_N^{[2]}[f](x)\right|\,.$$

Da x ein Parameter des Integrals (1) ist, stellt sich die Frage nach punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz von $R_N^{[2]}[f](x)$ gegen Null, wenn N gegen Unendlich geht.

Aus Hilfssatz 2 in [13] ergibt sich die im folgenden Lemma formulierte notwendige Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz eines Quadraturverfahren für Finite-part Integrale.

Lemma 1 *Für die auf dem Intervall (a,b) gleichmäßige Konvergenz des Quadraturverfahrens (7) gegen den Wert des Integrals (1) ist notwendig, daß $a_0 = f'(a)$ und $a_N = f'(b)$ erfüllt ist.*

Wenn man andere Werte als die exakten Randableitungen von f für a_0 oder a_N in (2) benutzt, kann man höchstens gleichmäßige Konvergenz in echten Teilintervallen $[a_1, b_1] \subset (a,b)$ erreichen.

Dieses Ergebnis ist für das hier betrachtete Verfahren vorrangig von theoretischem Interesse. Es zeigt sich, daß der Fehler, der entsteht, wenn man für a_0 und a_N die Näherungen nach der Formel (3) wählt, ein (numerisch) unbedeutender Rest $UR_N^{[2]}(x)$ ist, der die gleichmäßige Konvergenz numerisch so wenig stört, daß man in diesem Fall von "numerisch gleichmäßiger" Konvergenz reden kann. Denn offensichtlich gilt

$$UR_N^{[2]}(x) = \left| (a_0 - f'(a)) B_0^{[2]}\left(\frac{x-a}{h}\right) + (a_N - f'(b)) B_N^{[2]}\left(\frac{x-b}{h}\right) \right| .$$

Die Fehlerordnung von $UR_N^{[2]}(x)$ wird für jedes feste x mit $a < x < b$ durch den Fehler (4) bestimmt. Falls die Singularität x gegen a strebt, wächst der Wert des Integrals $I_2[f](x)$ wie $O(\frac{f(a)}{a-x} + f'(a)\ln(|x-a|))$ und der Fehler $UR_N^{[2]}(x)$ wächst logarithmisch, d.h. wie $O(\ln|\frac{a-x}{h}|)$. Nimmt man x numerisch sehr nahe bei a an, etwa $\frac{x-a}{h} = 10^{-12}$, erhält man $B_0^{[2]}(\frac{x-a}{h}) \leq 26$. Damit spielt der Fehler $UR_N^{[2]}(x)$ für Werte ganz in der Nähe von a keine Rolle. Weiterhin ist für $\frac{x-a}{h} \geq 5$ die Funktion $\left|B_0^{[2]}(\frac{x-a}{h})\right|$ monoton fallend. Es gilt $|B_0^{[2]}(5)| = 0.0018$. Für $B_N^{[2]}$ gelten entsprechende Aussagen. Durch das quasilokale Verhalten von $B_0^{[2]}$ und $B_N^{[2]}$ wird der Fehler $a_0 - f'(a)$ für innere x, also $a + 5h \leq x \leq b - 5h$ sogar stark verkleinert. Aus diesem Grunde ist $UR_N^{[2]}(x)$ für das Konvergenzverhalten der beschriebenen Quadratur von untergeordneter Bedeutung. Deshalb wird stets $a_0 = f'(a)$ und $a_N = f'(b)$ gesetzt.

Für die weiteren Untersuchungen werden verschiedene Teilergebnisse benötigt, die jetzt zusammengestellt werden. Da in den entsprechenden Abschätzungen nicht nur die Konvergenzordnung sondern auch die auftretenden Konstanten explizit angegeben werden, sind die Rechnungen langwierig.

Lemma 2 *Es seien τ_1 und τ_2 aus dem Definitionsbereich der entsprechenden Teile von S_N gemäß (2). Für $|\tau_1 - \tau_2| \leq h$ und $f \in C^{1,\omega}$ sind die folgenden Ungleichungen gültig:*

$$|q_i'(\tau_1) - q_i'(\tau_2)| \leq \begin{cases} c_1\omega(f', h) \\ (c_1+1)\omega(f', |\tau_1 - \tau_2|) & \textit{für } \tau_1, \tau_2 \in [t_i, t_{i+2}], \quad i = 3l+2, \\ & l = 0, 1, \ldots, n-2 , \end{cases}$$

$$|k_i'(\tau_1) - k_i'(\tau_2)| \leq \begin{cases} c_2\omega(f', h) \\ c_3\omega(f', |\tau_1 - \tau_2|) & \textit{für } \tau_1, \tau_2 \in [t_i, t_{i+1}], \ i = 3l+1, \ l = 0, 1, \ldots, n-1 , \end{cases}$$

Die Ungleichungen sind für die folgenden Konstanten erfüllt: $c_1 = 2$, $c_2 = 18$, $c_3 = 27$.

Beweis: Die Ungleichungen des Lemmas lassen sich sehr einfach mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung beweisen. Für q_i $(i \neq 0,\ i \neq N-1)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
|q_i'(\tau_1) - q_i'(\tau_2)| &\leq \frac{1}{h^2}|(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})(\tau_1 - \tau_2)| = |f'(\xi_1) - f'(\xi_2)|\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{h} \\
&\leq \omega(f', 2h)\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{h} \leq \left(\frac{2h}{|\tau_1 - \tau_2|} + 1\right)\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{h}\omega(f', |\tau_1 - \tau_2|) \\
&\leq 3\omega(f', |\tau_1 - \tau_2|)\,.
\end{aligned}$$

Analoge Aussagen erhält man für $i = 0, N-1$, z.B.

$$\begin{aligned}
|q_0'(\tau_1) - q_0'(\tau_2)| &\leq 2\left|\left(\frac{-f_0 + f_1}{h} - f'(a)\right)\frac{\tau_1 - \tau_2}{h}\right| = 2|f'(\xi_1) - f'(a)|\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{h} \\
&\leq 2\omega(f', h)\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{h} \leq 2\left(\frac{h}{|\tau_1 - \tau_2|} + 1\right)\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{h}\omega(f', |\tau_1 - \tau_2|) \\
&\leq 3\omega(f', |\tau_1 - \tau_2|)\,.
\end{aligned}$$

Die kubischen Polynome k_i erfüllen für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ mit $i = 3l + 1$ die folgende Ungleichungskette. Dabei ist $\xi_1 \in (t_{i-2}, t_{i-1}), \xi_2 \in (t_{i-1}, t_i), \xi_3 \in (t_i, t_{i+1}), \xi_4 \in (t_{i+1}, t_{i+2}), \xi_5 \in (t_{i+2}, t_{i+3})$.

$$\begin{aligned}
|k_i''(t)| &= \left|\frac{1}{h^2}\{(-2 + 3s)[(f_{i-2} - f_{i-1}) + 3(f_i - f_{i-1})] + [f_{i+1} - f_i](6 - 12s)\}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h^2}[3(f_{i+2} - f_{i+1}) + (f_{i+2} - f_{i+3})](-2 + 3s)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\{(-2 + 3s)(-f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2)) + (6 - 12s)f'(\xi_3) + (3f'(\xi_4) - f'(\xi_5))(-2 + 3s)\}\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\{|-2 + 3s|3\omega(f', 2h) + |-1 + 3s|3\omega(f', 2h) \leq \frac{9}{h}\omega(f', 2h).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt wegen $0 \leq s \leq 1$. Daraus erhält man

$$\begin{aligned}
|k_i'(\tau_1) - k_i'(\tau_2)| &= \left|\int_{\tau_2}^{\tau_1} k_i''(t)\,dt\right| \leq 9\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{h}\omega(f', 2h) \\
&\leq 9\left(\frac{2h}{|\tau_1 - \tau_2|} + 1\right)\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{h}\omega(f', |\tau_1 - \tau_2|) \leq 27\omega(f', |\tau_1 - \tau_2|)\,.
\end{aligned}$$

Lemma 2 ist bewiesen. ■

Es bezeichne $r_N(t) = f(t) - S_N(t)$ den Interpolationsfehler.

Lemma 3 *Sei t_c der zu t nächstgelegene Knotenpunkt. Dann sind für $f \in C^{1+k,\omega}$ mit $k \in \{0;1\}$ und $j \in \{0;1\}$ die Ungleichungen erfüllt:*

$$\left|r_N^{(j)}(t)\right| \leq \begin{cases} (c_2 + 1)\ |t - t_c|^{1-j}\ \omega(f', h) & \text{für } k = 0\,, \\ 17\ |t - t_c|^{1-j}\ h\,\omega(f'', h) & \text{für } k = 1\,. \end{cases}$$

Für $t \in [t_0, t_1]$ und $t \in [t_{N-1}, t_N]$ gelten speziell die Ungleichungen:

$$\left| r_N^{(j)}(t) \right| \le \begin{cases} 5|t_r - t|^{1-j}\omega(f', |t_r - t|) & \textit{für } k = 1; \quad r = 0, N \\ \left(\frac{1}{2}|t_r - t|\right)^{1-j} 2h\omega(f'', |t_r - t|) & \textit{für } k = 2; \quad r = 0, N\,. \end{cases}$$

Beweis: Nach dem Satz von Rolle hat $f'(t) - q_i'(t)$ zwei Nullstellen im Intervall $[t_i, t_{i+2}]$, wobei $i \notin \{0, N-1\}$. Bezeichnet man mit x^* diejenige von beiden, für die $|x^* - t| \le h$ gilt, so erhält man mit $t_c \in \{t_i, t_{i+1}, t_{i+2}\}$ für $f(t) \in C^{1,\omega}$ aus Lemma 1 zunächst

$$|f'(t) - q_i'(t)| \le |f'(t) - f'(x^*)| + |q_i'(x^*) - q_i'(t)| \le 3\omega(f', h)\,,$$

und daraus sofort

$$|f(t) - q_i(t)| = \left| \int_{t_c}^{t} (f'(s) - q_i'(s))ds \right| \le 3|t - t_c|\omega(f', h).$$

Diese Ungleichung ist für $i = 0, N-1$ ebenfalls erfüllt. In der gleichen Weise folgt

$$|f'(t) - k_i'(t)| \le (c_2 + 1)\omega(f', h) \text{ und } |f(t) - k_i(t)| \le (c_2 + 1)|t - t_c|\omega(f', h)\,.$$

Wegen $c_1 < c_2$ ist die erste Ungleichung ($k = 0$) bewiesen.

Für $f \in C^{2,\omega}$ und $t \in [t_{3l}, t_{3l+2}]$ erhält man

$$|f''(t) - q_i''(t)| = \left| f''(t) - \frac{1}{h^2}[f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}] \right| \le \omega(f'', 2h)\,.$$

Da $f'(t) - q_i'(t)$ eine Nullstelle $x^* \in [t_i, t_{i+2}]$ besitzt, folgt

$$|f'(t) - q_i'(t)| = \left| \int_{x^*}^{t} (f''(s) - q_i''(s))ds \right| \le |t - x^*|\omega(f'', 2h) \le 2h\omega(f'', h)\,.$$

Daraus folgt wie oben

$$|f(t) - q_i(t)| = \left| \int_{t_c}^{t} (f'(s) - q_i'(s))ds \right| = 2|t - t_c|h\omega(f'', h).$$

Für $t \in [t_{3l+1}, t_{3l+2}]$ ist mit $\eta_1 \in (t_{i-2}, t_i), \eta_2 \in (t_{i-1}, t_{i+1}), \eta_3 \in (t_i, t_{i+2}), \eta_4 \in (t_{i+1}, t_{i+3})$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} |f''(t) - k_i''(t)| &= |f''(t) - 1/h^2\{(-2+3s)[f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i] + (4-6s)[f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}] \\ &\quad + (-2+6s)[f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}] + (1-3s)[f_{i+1} - 2f_{i+2} + f_{i+3}]\}| \\ &= |f''(t) - \{(-2+3s)f''(\eta_1) + (4-6s)f''(\eta_2) + (-2+6s)f''(\eta_3) + (1-3s)f''(\eta_4)\}| \\ &= |(-2+3s)(f''(\eta_1) - f''(\eta_2)) + (-1+3s)(f''(\eta_3) - f''(\eta_2) \\ &\quad + (f''(\eta_2) - f''(t)) + (1-3s)(f''(\eta_4) - f''(\eta_3))|\,. \end{aligned}$$

Mithin gilt die Ungleichung

$$|f''(t) - k_i''(t)| \le (1+2+2)\omega(f'', 3h) + \omega(f'', 2h) \le 17\omega(f'', h)\,. \tag{8}$$

Da $f'(t) - k_i'(t)$ im Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ eine Nullstelle x^* hat, führt das gleiche Vorgehen wie im letzten Fall zum Ergebnis

$$|f(t) - k_{3l}(t)| = 17|t - t_c|h\omega(f'', h).$$

Der letzte Teil läßt sich ebenfalls elementar beweisen. Für $f \in C^{1,\omega}$ überprüft man leicht

$$\begin{aligned}
|f'(t) - q_{N-1}'(t)| &\le \left| f'(t) - \frac{1}{h}\{(2-2s)(f_N - f_{N-1}) + f'(b)h(2s-1)\}\right| \\
&\le \omega(f', |t - t_N|) + 2(1-s)|f'(b) - f'(\xi)| \le \omega(f', |t-t_N|) + 2(1-s)\omega(f', h) \\
&\le \omega(f', |t - t_N|) + 2\left(\frac{(1-s)h}{t_N - t} + 1 - s\right)\omega(f', |t - t_N|) \le 5\omega(f', |t - t_N|).
\end{aligned}$$

Sei f zweimal stetig differenzierbar. Dann gibt es eine Nullstelle x^* von $f'' - q_{N-1}''$ im Intervall (t_{N-1}, b) und man findet

$$|f''(t) - q_{N-1}''(t)| \le |f''(t) - f''(x^*)| + |q_{N-1}''(t) - q_{N-1}''(x^*)| \le \omega(f'', h)$$

und

$$|f'(t) - q_{N-1}'(t)| \le |\int_t^b (f''(\tau) - q_{N-1}''(\tau))\,d\tau| \le |b - t|\omega(f'', h)\,.$$

Durch eine Integration unter Berücksichtigung der Ungleichung

$$\omega(f'', h) \le \left(\frac{h}{|b-t|} + 1\right)\omega(f'', |b - t|)$$

folgt die letzte Behauptung. Die Rechnung für q_0 liefert das gleiche Resultat. Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Aus den Lemmata 2 and 3 erhält man unmittelbar

Lemma 4 *Ist $f \in C^{1,\omega}$, so folgt $r_N \in C^{1,\omega_1}$ mit dem Stetigkeitsmodul $\omega_1(\delta) = (2c_2 + 2)\omega(\delta)$. Für $f \in C^{2,\omega}$ ist $r_N \in C^{1,\omega_2}$ mit $\omega_2(\delta) = 23h\omega(\delta)$.*

Beweis: Es sei $\tau_1 \in [t_{i-1}, t_i]$, $\tau_2 \in [t_{j-1}, t_j]$ mit $t_i < t_j$, $f \in C^{1,\omega}$ und $|\tau_1 - \tau_2| \ge h$. Weiterhin bezeichnet x_i^* die Nullstelle von r_N', die im selben Teilintervall liegt wie τ_i $(i = 1, 2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|r_N'(\tau_1) - r_N'(\tau_2)| &\le |r_N'(\tau_1) - r_N'(x_1^*)| + |r_N'(x_2^*) - r_N'(\tau_2)| \\
&\le |f'(\tau_1) - f'(x_1^*)| + |S_N'(\tau_1) - S_N'(x_1^*)| + |f'(\tau_2) - f'(x_2^*)| \\
&\quad + |S_N'(\tau_2) - S_N'(x_2^*)| \\
&\le (2c_2 + 2)\omega(f', |\tau_1 - \tau_2|)\,.
\end{aligned}$$

Im Falle $|\tau_1 - \tau_2| < h$ folgt ebenso aus Lemma 2 die Ungleichung

$$|r'_N(\tau_1) - r'_N(\tau_2)| \le (c_1 + c_3 + 2)\omega(f', |\tau_1 - \tau_2|)\,.$$

Für $f \in C^{2,\omega}$ und $|\tau_1 - \tau_2| \ge h$ geht man folgendermaßen vor:

$$|r'_N(\tau_1) - r'_N(\tau_2)| \le \int_{\tau_1}^{\tau_2} |r''_N(t)|\,dt \le 17|\tau_2 - \tau_1|\omega(f'', h) \le 17|\tau_2 - \tau_1|\omega(f'', |\tau_2 - \tau_1|)\,.$$

Falls $|\tau_1 - \tau_2| < h$ folgt die Behauptung aus Ungleichung (8) ebenfalls durch Integration:

$$|r''_N(t)| \le 5\omega(f'', 3h) + \omega(f'', 2h) \le \left\{5\left(\frac{3h}{|\tau_2 - \tau_1|} + 1\right) + \left(\frac{2h}{|\tau_2 - \tau_1|} + 1\right)\right\}\omega(f'', |\tau_2 - \tau_1|)\,.$$

Damit ist Lemma 4 bewiesen. ∎

Jetzt folgt das erste Hauptergebnis.

Satz 5 *Sei $f \in C^{1,\omega}$. Für ω mögen die Bedingungen* (A1) *and* (A2) *erfüllt sein, dann gilt für jedes $x \in [a_1, b_1]$ einer beliebigen Menge $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ die Grenzbeziehung* $\lim_{N\to\infty} Q_N^{[2]}[f](x) = I_2[f](x)$. *Ferner gilt für hinreichend große N die folgende Abschätzung*

$$R_N^{[2]}[f](x) \le (c_2 + 1)\left(5 + 4c_{\omega 2} + \frac{2h}{b-a}\right)\omega(h)\,.$$

Wenn f zweimal stetig differenzierbar ist, erhält man für den Quadraturfehler die Abschätzung

$$R_N^{[2]}[f](x) \le \left\{85 + 46c_{\omega 2} + \frac{34h}{b-a}\right\}h\omega(h)\,.$$

Beweis: Die Behauptung wird für $x \in [a_1, b_1] \subset [(a+b)/2, b)$ bewiesen. Der andere Fall ($[a_1, b_1] \subset (a, (a+b)/2)$) kann analog abgehandelt werden. Zunächst wird eine reelle Konstante ϑ gewählt, die der Ungleichung $0 < h \le \vartheta \le b - x$ genügt. Man erhält den Quadraturfehler als hypersinguläres Integral des Interpolationsfehlers. Das Integral kann man folgendermaßen zerlegen:

$$R_N^{[2]}[f](x) = \int\!\!\!\!\!\!=_a^b (t-x)^{-2} r_N(t)dt = \left\{\int_a^{x-\vartheta} + \int\!\!\!\!\!\!=_{x-\vartheta}^{x+\vartheta} + \int_{x+\vartheta}^{b}\right\} r_N(t)(t-x)^{-2}dt =: I_1 + I_2 + I_3\,.$$

Das Integral I_1 läßt sich leicht abschätzen durch

$$|I_1| \le \max_{t\in(a,x-\vartheta)} |r_N(t)| \int_a^{x-\vartheta} \left|(t-x)^{-2}\right| dt \le \max_{t\in(a,x-\vartheta)} |r_N(t)|(1/\vartheta + 2/(b-a)). \tag{9}$$

Dieselbe Methode liefert für I_3

$$|I_3| \le \max_{t\in(x+\vartheta,b)} |r_N(t)|\frac{2}{\vartheta}\,.$$

Als nächstes wird I_2 betrachtet:

$$I_2 = \fint_{x-\vartheta}^{x+\vartheta} \frac{r(t)}{(t-x)^2} dt = \fint_{x-\vartheta}^{x+\vartheta} (r_N(t) - P_2^x(r_N,t))(t-x)^{-2} dt + \fint_{x-\vartheta}^{x+\vartheta} P_2^x(r_N,t)(t-x)^{-2} dt = I_{21} + I_{22}.$$

Offensichtlich gilt für $P_2^x(r_N,t) = r_N(x) + (t-x)r'_N(x)$ mit einem $\xi \in (t,x)$ die Gleichung $r_N(t) - P_2^x(r_N,t) = (t-x)(r'_N(\xi) - r'_N(x))$. Man kann I_{21} zunächst wie folgt abschätzen

$$|I_{21}| \leq \fint_{x-\vartheta}^{x+\vartheta} \left| \frac{r'_N(\xi) - r'_N(x)}{t-x} \right| dt \leq 2 \int_0^\vartheta \omega(r'_N, \delta)/\delta d\delta\,.$$

Berücksichtigt man Lemma 4 und die Bedingung (A2), ergibt sich daraus

$$|I_{21}| \leq \begin{cases} 2(2c_2+2) \int_0^\vartheta \omega(\delta)/\delta d\delta \leq 4(c_2+1)c_{\omega 2}\omega(\vartheta) \text{ für } f \in C^{1,\omega} \\ 46h \int_0^\vartheta \omega(\delta)/\delta d\delta \leq 46hc_{\omega 2}\omega(\vartheta) \text{ für } f \in C^{2,\omega}\,. \end{cases} \tag{10}$$

Für I_{22} gilt

$$|I_{22}| = |\int_{x-\vartheta}^{x+\vartheta} P_2^x(r,t)(t-x)^{-2} dt| = \frac{2}{\vartheta}|r_N(x)|\,.$$

Da nur $\vartheta \geq h > 0$ gefordert war, kann man $\vartheta = h \leq b - b_1$ für hinreichend großes N wählen. Faßt man die Teilergebnisse zusammen und beachtet noch Lemma 3, erhält man die Ungleichungen des Satzes. ■

Bemerkung 6 *Die Behauptung der Konvergenz gilt auch im Falle* $UR_N^{[2]} \neq 0$. *Die Fehlerabschätzungen bleiben bei geänderten Konstanten erhalten, falls man für* a_0 *und* a_N *die Approximationen* (3) *wählt. Für hinreichend großes N erhält man aus Satz* 5 *und den Überlegungen nach Lemma* 1 *zusammen mit der Ungleichung* (4) *die Ungleichung*

$$R_N^{[2]}[f](x) \leq \left\{ 85 + 46c_{\omega 2} + \frac{34h}{b-a} + 0.0072 \right\} h\omega(h)\,,$$

die für jedes x gilt, welches der Ungleichung $a + 5h < x < b - 5h$ *genügt.*

Man kann nun den folgenden Satz beweisen.

Satz 7 *Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes* 5 *sei die Bedingung* (A3) *erfüllt. Insbesondere soll* $a_1 = f'(a)$ *und* $a_N = f'(b)$ *gelten. Dann gilt für jedes* $x \in (a,b)$ *die*

Grenzbeziehung $\lim_{N\to\infty} Q_N^{[2]}[f](x) = I_2[f](x)$. *Für den Quadraturfehler* $R_N^{[2]}[f](x)$ *erhält man die folgenden Abschätzungen, die gleichmäßig für jedes* $x \in (a,b)$ *gelten:*

$$R_N^{[2]}[f](x) \leq \begin{cases} \left[(c_2+1)\left(1+4c_{\omega 2}+\dfrac{2h}{b-a}\right)+\max\{4(c_2+1);5(c_{\omega 3}+2)\}\right]\omega(f',h) \\ \hfill \textit{für } f \in C^{1,\omega}, \\ \left[19+46c_{\omega 2}+\dfrac{34h}{b-a}+\max\{66;2c_{\omega 3}\}\right]h\omega(f'',h) \ \textit{für } f \in C^{2,\omega}. \end{cases}$$

Beweis: Wie im Beweis von Satz 5 wird $\vartheta = h$ gewählt. Somit bleiben für den Fall $0 < h < b-x$ die Ungleichungen von Satz 5 erhalten und es genügt den Fall $0 < b-x < h$ zu betrachten. Dazu wird das Integral in folgender Weise zerlegt:

$$\displaystyle{\not}\!\!\int_a^b r_N(t)(t-x)^{-2}dt = \left\{\int_a^{x-h} + \displaystyle{\not}\!\!\int_{x-h}^b\right\} r_N(t)(t-x)^{-2}dt =: I_1 + I_4.$$

Für I_1 bleibt die Abschätzung (9) auch im vorliegenden Fall gültig. Analog wie bei I_2 kann mit I_4 verfahren werden:

$$I_4 = \displaystyle{\not}\!\!\int_{x-h}^b \frac{r_N(t)}{(t-x)^2}dt = \displaystyle{\not}\!\!\int_{x-h}^b (r_N(t) - P_2^x(r_N,t))(t-x)^{-2}dt + \displaystyle{\not}\!\!\int_{x-h}^b P_2^x(r_N,t)(t-x)^{-2}dt = I_{41} + I_{42}.$$

Für I_{41} erhält man ähnlich wie bei I_{21}

$$I_{41} \leq \displaystyle{\not}\!\!\int_{x-h}^b |(r_N'(\xi) - r_N'(x))(t-x)^{-1}|dt \leq 2\int_0^\vartheta \omega(r_N',\delta)\delta^{-1}d\delta\,.$$

Die Schranke (10) gilt somit auch im vorliegenden Fall. Eine einfache Rechnung liefert

$$I_{42} \leq |r_N(x)||\frac{2}{b-x}| + |r_N'(x)|\left|\ln\left|\frac{b-x}{\vartheta}\right|\right|\,.$$

Unter Beachtung von Lemma 3 und der Voraussetzung (A3) ergibt sich für $x \in [b-h,b)$

$$|I_{42}| \leq \begin{cases} (10+5c_{\omega 3})\omega(f',h) \text{ für } f \in C^{1,\omega}, \\ 2(1+c_{\omega 3})h\omega(f'',h) \text{ für } f \in C^{2,\omega}. \end{cases}$$

Insgesamt erhält man für den betrachteten Fall die Abschätzung

$$R_N^{[2]}[f](x) \leq \begin{cases} \left[(c_2+1)\left(1+4c_{\omega 2}+\dfrac{2h}{b-a}\right)+5c_{\omega 3}+10\right]\omega(f',h) \text{ für } f \in C^{1,\omega}, \\ \left[19+46c_{\omega 2}+\dfrac{34h}{b-a}+2c_{\omega 3}\right]h\omega(f'',h) \text{ für } f \in C^{2,\omega}. \end{cases}$$

Durch einen Vergleich mit Satz 5 folgt das Ergebnis. ∎

Bemerkung 8 *Die im Satz 7 für die auf dem Integrationsintervall (a, b) gleichmäßige Konvergenz angegebenen Abschätzungen der Konvergenzordnung des Quadraturfehlers sind optimal. Für $f \in C^{1+k,\lambda}$ mit $k \in \{0, 1\}$ und $0 < \lambda \leq 1$ gilt für den Quadraturfehler $R_N^{[2]}[f](x) = O(h^k\omega(h))$ für jedes $x \in (a, b)$. Die maximal erreichbare Ordnung ist $O(h^2)$ für $f \in C^{2,1}$. Diese Abschätzung der Konvergenzordnung ist nicht verbesserbar (vgl.* [11]*). Falls man die Konvergenzordnung für eine feste Singularität $x \in (a, b)$ betrachtet, kann man sehr wohl mit Hilfe von einer speziellen, auf die Singularität abgestimmten Knotenwahl die Konvergenzordnung steigern* (vgl. Hansen [5]).

Bemerkung 9 *Betrachtet man anstelle von f die Funktion $F(\cdot) = f(\cdot)|\cdot - x|^{2-p}$ mit $p \neq 1$, so kann man die Ergebnisse auf F anwenden und erhält*

$$\lim_{N\to\infty} Q_N^{[2]}[F](x) = I_2[F](x)$$

mit den bewiesenen Fehlerabschätzungen. Setzt man $Q_N^{[2]}[F](x) = Q_N^{[p]}[f](x)$ mit den Gewichten $A_i^{[p]}(y) = A_i^{[2]}(y)|t_i - x|^{2-p}$ für $0 \leq i \leq N$ und $B_i^{[p]}(y) = B_i^{[2]}(y)|t_i - x|^{2-p}$ für $i = 0, N$, so hat man eine Quadraturformel für das zweite Integral aus (1) *konstruiert. Im Fall $p = 1$ geht man analog vor. Die Übertragung der Konvergenzergebnisse ist offensichtich. In* [13] *ist ein Verfahren vorgestellt, mit dem man mit Hilfe von numerischer Differentiation aus einer Quadraturformel für das Cauchysche Hauptwert Integral $I_1[f](x)$ Quadraturformeln für hypersinguläre Integrale mit höhere Singularitätsordnung konstruiert. Dabei kann man die Konvergenzordnung ohne Verschlechterung beibehalten. Man kann mit dem erwähnten Vorgehen Integrale vom Hadamardschen Typ mit beliebiger Singularitätsordnung numerisch berechnen.*

Beispielrechnungen

Die angebenen Beispielrechnungen bestätigen die Abschätzungen praktisch. Die zweite und die dritte Spalte der Tabellen enthalten die Fehler der Quadraturformel (7). In der zweiten Spalte wurden die exakten Randableitungen berücksichtigt, d.h., $a_0 = f'(a)$ und $a_N = f'(b)$, in der dritten Spalte wurden a_0 und a_N entsprechend der Formel (3) berechnet. Man erkennt, daß sich die Approximation der Randableitungen nur sehr gering auswirkt. Das erste Beispiel stammt aus [1]. Es ist wie auch das zweite Beispiel ein gewöhnliches Integral, das als Hadamardsches Integral geschrieben und berechnet wurde. Das zweite Beispiel ist für "gewöhnliche" Quadraturen auch nur schlecht behandelbar. Da $f(t) = t^2\sqrt{|t|}$ zu $C^{2,\frac{1}{2}}$ gehört, muß nach Satz 5 der Fehler die Ordnung $O(h^{\frac{3}{2}})$ haben, was auch bestätigt wird. Beispiel 3 ist ein Hadamardsches Integral. Die Singularität x liegt im Innern des Intervalls und man sieht, daß es praktisch keinen Unterschied macht, ob die Randableitungen verwendet werden oder nicht. Wenn x wie im dritten Beispiel sehr nahe an einem Randpunkt liegt, wirkt sich die schlechtere Konstante in $UR_N^{[2]}$, die aus dem Anwachsen von $B_N^{[2]}$ in der Nähe von b folgt, aus. Die Fehlerordnung ist hier für beide Verfahren selbstverständlich gleich.

Beispiel 1

$$\oint_0^1 \frac{(t-0,2)^3}{(t-0,2)^2}\,dt = 0,3$$

N	Fehler mit exakten Randwerten	Fehler mit genäherten Randwerten
15	0,000095982	0,000162273
30	0,000002616	0,000000578
60	0,000000135	0,000000134
120	0,000000025	0,000000010

Beispiel 2

$$\oint_{-1}^1 \frac{t^2\sqrt{|t|}}{t^2}\,dt = \int_{-1}^1 \sqrt{|t|}\,dt = \frac{4}{3}$$

N	Fehler mit exakten Randwerten	Fehler mit genäherten Randwerten
15	0,035054939	0,035027620
30	0,010973942	0,010975894
60	0,003880095	0,003880221
120	0,001371834	0,001371842

Beispiel 3

$$\oint_0^1 \frac{t^6}{(t-0.999999999)^2}\,dt = -1000000138,9215267897$$

N	Fehler mit exakten Randwerten	Fehler mit genäherten Randwerten
15	0,039916992	2,399200678
30	0,010471225	0,619144082
60	0,002685428	0,153373480
120	0,000679731	0,037187338

Literatur

[1] **Delbourgo, D.** : *On the numerical evaluation of Hadamard finite-part integrals.* (Hons) Thesis, Mathematics Department, University of Tasmania 1992

[2] **Diethelm, K.** : *Uniform convergence of optimal order quadrature rules for Cauchy Principal Value Integrals.* J. Comp. Appl. Math. **56**, 321–329 (1993)

[3] **Fenyö S.** und **Stolle, H.W.** : *Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen, Band* 4. Berlin 1983

[4] **Hadamard, J.** : *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.* Haven CT 1923

[5] **Hansen, O.** : *Über ein Quadraturverfahren zur Berechnung der Hilberttransformation nicht glatter Funktionen..* Z. Angew. Math. Mech. **77**, S 563–S 564 (1997)

[6] **Monegato, G.** : *Numerical evaluation of hypersingular integrals.* J. Comp. Appl. Math. **50**, 9–31 (1994)

[7] **Mastronardi, N.** und **Occorsi, D.** : *Some numerical algorithms to evaluate Hadamard finite-part integrals.* J. Comp. Appl. Math. **70**, 75–93 (1996)

[8] **Muschelischwili N.I.** : *Singuläre Integralgleichungen.* Berlin 1965

[9] **Schumaker, L.L.** : *Spline function: Basic Theory.* Malabar, Florida 1993

[10] **Schwab, C.** und **Wendland, W.** : *On numerical cubatures of singular surface integrals in Boundary Element Methods.* Num. Math. **62**, 343–369 (1992)

[11] **Stolle, H.W.** und **Strauß, R.** : *On the numerical integration of certain singular integrals.* Computing **48**, 177–189 (1992)

[12] **Strauß, R.** : *Numerische Integration von hypersingulären Integralen.* Rostock. Math. Kolloq. **49**, 127–140 (1995)

[13] **Strauß, R.** : *Numerische Integration von hypersingulären Integralen.* Preprint 96/14 FB Mathematik, Universität Rostock 1996

eingegangen: 19. September 1997

Autor:

Raimond Strauß
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
18051 Rostock
Germany
raimond.strauss@mathematik.uni-rostock.de