Rostock. Math. Kolloq. **52**, 85–105 (1998)

Subject Classification (AMS)
03G20, 08A40

D. Lau

Die maximalen Klassen von $\bigcap_{\varrho\in Q} Pol_3\varrho$ für $Q \subseteq \mathfrak{P}(\{0,1,2\})$, Teil II

In Fortsetzung von Teil I dieser Arbeit sollen nachfolgend die maximalen Klassen von Teilklassen der Form $\bigcap_{\varrho\in Q} Pol_3\varrho$ mit $Q \in \{\{\{a,b\},\{c\}\},\{\{a,b\},\{a\},\{b\}\},\{\{a,b\},\{a\},\{c\}\}, \{\{a,b\},\{a,c\}\},\{\{a,b\},\{a,c\},\{b\}\}\}$, $\{a,b,c\} := \{0,1,2\}$ ermittelt werden.

Lemma 1 *Seien*

$$\varrho_1 := \begin{pmatrix} 0\ 2\ 1\ 2 \\ 2\ 0\ 2\ 1 \end{pmatrix} \qquad \varrho_2 := \begin{pmatrix} 0\ 1\ 2\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 2\ 1\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho_3 := \begin{pmatrix} 0\ 1\ 2\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\varrho_4 := \begin{pmatrix} 0\ 1\ 2\ 0\ 2\ 1\ 2 \\ 0\ 1\ 2\ 2\ 0\ 2\ 1 \end{pmatrix}, \ \varrho_5 := \begin{pmatrix} 0\ 1\ 0\ 2\ 1\ 2 \\ 0\ 1\ 2\ 0\ 2\ 1 \end{pmatrix}, \ \varrho_6 := \begin{pmatrix} 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $T_{0,1;2} \cap Pol_3\varrho_1 \subseteq T_{0,1;2} \cap Pol_3\varrho_2$,

(b) $T_{0,1;2} \cap Pol_3\varrho_3 \subseteq T_{0,1;2} \cap Pol_3\varrho_4$,

(c) $T_{0,1;2} \cap Pol_3\varrho_5 \subseteq T_{0,1;2} \cap Pol_3\varrho_4$,

(d) $T_{0,1;2} \cap Pol_3\varrho_6 \subseteq T_{0,1;2} \cap Pol_3\varrho_2$.

Beweis: Bezeichne $\circ$ das Relationenprodukt und für binäre Relationen ϱ sei $\tau\varrho := \{(y,x) \mid (x,y) \in \varrho\}$. Obige Behauptungen ergeben sich dann aus $\varrho_1 \circ \varrho_1 = \varrho_2$, $(\tau\varrho_3) \circ \varrho_3 = \varrho_4$, $((E_3 \times E_2) \cap \varrho_5) \circ (\varrho_5 \cap (E_2 \times E_3)) = \varrho_4$, $\varrho_6 \cap (\tau\varrho_6) = \varrho_2$ und (1). $\square$

Satz 2 *Sei $\{a,b,c\} := E_3$. $T_{a,b;c} := Pol_3\{a,b\} \cap Pol_3\{c\}$ besitzt genau 11 maximale Klassen:*

(1) $T_{a,b;c} \cap Pol_3\{a\}$

(2) $T_{a,b;c} \cap Pol_3\{b\}$

(3) $T_{a,b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$

(4) $T_{a,b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

(5) $T_{a,b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a & b & b & a & b & b \\ a & a & b & b & a & b & a & b \\ a & b & a & a & b & b & a & b \\ a & b & b & a & a & a & b & b \end{pmatrix}$

(6) $T_{a,b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ a & b & c & b & a \end{pmatrix}$

(7) $T_{a,b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & c & a & c & b & c \\ a & b & c & c & a & c & b \end{pmatrix}$

(8) $T_{a,b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a & c & b & c \\ a & b & a & b & c & a & c & b \end{pmatrix}$

(9) $T_{a,b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a & a & b & b \\ a & a & b & b & a & b & a & b \\ a & b & a & b & c & c & c & c \end{pmatrix}$

(10) $T_{a,b;c} \cap Pol_3\ E_2^3 \cup \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \\ c & c \end{pmatrix}$

(11) $T_{a,b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} c & a & c & b & c \\ c & c & a & c & b \end{pmatrix}$.

Beweis: O.B.d.A. seien $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$. Mit A bezeichnen wir in diesem Beweis eine Teilmenge von $T_{0,1;2}$, die keine Teilmenge der unter (1) bis (11) aufgezählten Teilklassen von $T_{0,1;2}$ ist. Dann gehören zu $[A]$ gewisse Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{11}$ mit der im Teil I vereinbarten Eigenschaft (*).

Wegen Lemma 3.6 können wir als Superpositionen über den Funktionen f_6 und f_7 gewisse Funktionen f_{12}^4, f_{13}^5, f_{14}^6 und f_{15}^7 mit den Eigenschaften

$$f_{12}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_{14}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$f_{13}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_{15}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten.

Mit Hilfe von Lemma 2.1 (Teil I) sieht man leicht ein, daß jede Funktion aus P_2 die Einschränkung einer Funktion aus $[A]$ sein muß. Damit sind auch alle einstelligen Funktionen aus $T_{0,1;2}$ Superpositionen über A, d.h., $\{u_2, s_1, s_3, v_2\} \subseteq [A]$.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß alle Funktionen aus $T_{0,1;2}$, die nur Werte aus $\{0, 2\}$ oder $\{1, 2\}$ annehmen, zu $[A]$ gehören.

Wir beginnen mit dem Nachweis gewisser zweistelliger Funktionen

$$k,\ d \in [A] \cap P_{3;\{0,2\}} \tag{1}$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{cc|cc} x & y & k(x,y) & d(x,y) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}.$$

Es gilt $f'_{12}(x,y) := u_2(f_{12}(x,y,v_2(x),v_2(y))) \in [A]$, wobei $W(f'_{12}) = \{0,2\}$ und

$$f'_{12}\begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,2 \\ 2\,0 \\ 2\,2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,2 \\ 0\,2 \\ 2\,2 \end{pmatrix}.$$

Fall 1: $f'_{12}(0,2) = f'_{12}(2,0) = 0$ (d.h., $f'_{12} = k$).
In diesem Fall können wir die Funktion
$f'_{14}(x,y) := f_{14}(f'_{12}(x,y), v_2(f'_{12}(x,y)), x, y, v_2(x), v_2(y))$ in $[A]$ nachweisen, für die wir o.B.d.A. $f'_{14}\begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,2 \\ 1\,2 \end{pmatrix}$ annehmen können. Falls $f'_{14}\begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt, ist
$f'_8(x,y) := u_2(f_8(f'_{12}(x,y), f'_{14}(x,y), f'_{14}(y,x), v_2(f'_{12}(x,y)), x, y, v_2(x), v_2(y))) \in [A]$ die gesuchte Funktion d.
Im Fall $f'_{14}\begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ können wir als d die Funktion $u_2 \star f'_{14}$ wählen, womit (1) im Fall 1 gezeigt ist.

Fall 2: $f'_{12}(0,2) = f'_{12}(2,0) = 2$ (d.h., $f'_{12} = d$).
Die noch fehlende Funktion $k \in [A]$ erhält man in diesem Fall durch
$k(x,y) := u_2(f_{11}(f'_{12}(x,y), x, y, v_2(x), v_2(y)))$. Also gilt (1) auch im Fall 2.

Um Lemma 2.6 aus Teil I (für 2 anstelle von 1 und $P_{3,\{0,2\}}$ anstelle von $P_{3,2}$) anwenden zu können, benötigen wir noch eine auf $\{0,2\}$ nicht monotone Funktion aus $T_{0,1;2} \cap P_{3,\{0,2\}}$.
Für die Funktion $f'_{13}(x,y,z) := f_{13}(x, v_2(x), z, y, v_2(y))$ gilt $f'_{13}\begin{pmatrix} 0\,0\,2 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,2 \\ 1\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$, für die wir wegen $s_3 \in [A]$ o.B.d.A. $f'_{13}\begin{pmatrix} 0\,0\,2 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,2 \\ 1\,0 \end{pmatrix}$ annehmen können. Falls $f'_{13}\begin{pmatrix} 0\,0\,2 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist, erhält man durch
$f'_{15}(x,y,z) := u_2(f_{15}(x, f'_{13}(x,y,z), s_3(f'_{13}(x,y,z)), v_2(x), z, y, v_2(y)) \in [A]$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f'_{15}\begin{pmatrix} 0\,0\,2 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also ist auf $\{0,2\}$ entweder f'_{13} oder f'_{15} nicht monoton.

Mit Hilfe von Lemma 2.6 (Teil I) ist nach diesen Vorbereitungen leicht zu zeigen, daß zu jeder Funktion g^m aus $Pol_{\{0,2\}}\{0\} \cap Pol_{\{0,2\}}\{2\}$ in $[A]$ eine Funktion G^m mit

$$\forall \mathbf{x} \in \{0,2\}^m : \; g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$$

existiert.
Zwecks Nachweis von $T_{0,1;2} \cap P_{3,\{0,2\}} \subseteq [A]$ bilden wir als nächstes die Superposition $h(x,y) := u_2(f_6(u_2(x), v_2(x), y, x, s_3(x)))$ über A, für die wir o.B.d.A. $h\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ annehmen können.
Bildet man nun zu beliebigen Tupeln $\mathbf{x} := (x_1, x_2, ..., x_n) \in E_3^n \backslash E_2^n$ die Tupel

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{x}} := (&h(x_1,x_2), h(x_1,x_3), ..., h(x_1,x_n), \\ &h(x_2,x_1), h(x_2,x_3), ..., h(x_2,x_n), \\ &..., \\ &h(x_n,x_1), h(x_n,x_2), ..., h(x_n,x_{n-1}), \\ &u_2(x_1), u_2(x_2), ..., u_2(x_n)), \end{aligned}$$

so sieht man leicht, daß für beliebige Tupel $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E_3^n \backslash E_2^n$

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \implies T_{\mathbf{x}} \neq T_{\mathbf{x}'}$$

gilt. Folglich und nach dem oben Gezeigten findet man zu einer beliebigen Funktion $g^n \in T_{0,1;2} \cap P_{3,\{0,2\}}$ in $[A]$ eine Funktion f_g mit

$$\begin{aligned} g(x_1, ..., x_n) = f_g(&h(x_1,x_2), h(x_1,x_3), ..., h(x_1,x_n), \\ &h(x_2,x_1), h(x_2,x_3), ..., h(x_2,x_n), \\ &..., \\ &h(x_n,x_1), h(x_n,x_2), ..., h(x_n,x_{n-1}), \\ &u_2(x_1), u_2(x_2), ..., u_2(x_n)). \end{aligned}$$

(Man beachte dabei, daß solche Funktionen g auf E_2^n nur den Wert 0 annehmen.)
Folglich haben wir $T_{0,1;2} \cap P_{3,\{0,2\}} \subseteq [A]$ und $\{ \, v_2 \star f \mid f \in T_{0,1;2} \cap P_{3,\{1,2\}} \, \} = T_{0,1;2} \cap P_{\{1,2\}} \subseteq [A]$.
Als nächstes soll gezeigt werden, wie man alle Funktionen aus $T_{0,1;2}$, die nur auf dem Tupel $(2,2,...,2)$ den Wert 2 annehmen, als Superpositionen über Funktionen aus A darstellen kann. Wir beginnen mit der Konstruktion einiger Hilfsfunktionen:
Aus f_7 ist zunächst $f_7'(x,y) := f_7(h_1(x,y), h_2(x,y), h_3(x,y), x, y, v_2(x), v_2(y))$ mit $h_1 \in [A] \cap P_{\{0,2\}}$, $h_2, h_3 \in [A] \cap P_{\{1,2\}}$ und

$$h_1\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; h_2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; h_3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bildbar, wobei wir (wegen $s_3 \in [A]$) $f_7' \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ annehmen können. Als Superposition über f_7' und u_2 erhält man dann $r(x, y) := f_7'(u_2(x), u_2(y))$ mit der Eigenschaft

$$r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $\alpha \in \{0, 1\}$. Der Einfachheit halber, können wir $\alpha = 0$ annehmen. (Im Fall $\alpha = 1$ hat die Funktion $r'(x, y) := s_3(r(y, x))$ die gewünschten Eigenschaften.)

Bezeichne q^n eine beliebige Funktion aus $T_{0,1;2}$, die auf Tupeln aus E_2^n nur den Wert 0 annimmt und den Wert 2 nur auf $(2, 2, ..., 2)$. Zu $[A]$ gehören die n-stelligen Funktionen

$$q_1(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 \text{ für} & q(\mathbf{x}) = 0, \\ 2 \text{ sonst} & \end{cases}$$

und

$$q_2(\mathbf{x}) := \begin{cases} 2 \text{ für} & (q(\mathbf{x}) = 0 \ \wedge \ \mathbf{x} \notin E_2^n) \ \vee \ \mathbf{x} = \mathbf{2}, \\ 0 \text{ sonst}, & \end{cases}$$

womit $q(\mathbf{x}) = r(q_1(\mathbf{x}), q_2(\mathbf{x})) \in [A]$ gilt. Wegen $s_3 \in [A]$ sind auch beliebige n-stellige Funktionen, die auf Tupeln aus E_2^n nur den Wert 1 annehmen und den Wert 2 nur auf $(2, 2, ..., 2)$, Superpositionen über A.

Als nächstes bilden wir die Funktion

$f_9'(x, y) := f_9(u_2(x), x, s_3(x), v_2(x), u_2(y), y, s_3(y), v_2(y)) \in [A]$, für die wir (wegen $s_3 \in [A]$) $f_9' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ mit gewissem $\beta \in E_2$ annehmen können. Bezeichne p eine n-stellige Funktion, die auf Tupeln aus E_2^n beliebige Werte aus E_2 annehmen kann und den Wert 2 nur auf dem Tupel $(2, 2, ..., 2)$. (Die Verteilung der Werte 0 und 1 auf den Tupeln $E_3^n \backslash (E_2^n \cup \{\mathbf{2}\})$ ist für die sich anschließende Konstruktion unwichtig und sie hängt ab von der weiter unten beschriebenen Superpositionsbildung in $[A]$.) Eine Funktion p mit diesen Eigenschaften läßt sich mit Hilfe einer in $[A]$ bereits nachgewiesene n-stellige Funktion p' mit $p'(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in E_2^n$, der n-stelligen Funktion $p'' \in [A]$, die definiert ist durch

$$p''(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 \text{ für} & p'(\mathbf{x}) \in E_2, \\ 2 \text{ für} & \mathbf{x} = \mathbf{2}, \\ 1 \text{ sonst} & \end{cases}$$

und der Funktion f_9' wie folgt als Superposition über A gewinnen: $p(\mathbf{x}) := f_9'(p''(\mathbf{x}), p'(\mathbf{x}))$. Seien $E_2^n = \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_{2^n}}\}$ und $E_3^n \backslash (E_2^n \cup \{\mathbf{2}\}) = \{\mathbf{a_{2^n+1}}, \mathbf{a_{2^n+2}}, ..., \mathbf{a_{3^n-1}}\}$. Superpositionen über A sind gewisse n-stellige Funktionen g_i $(i = 1, 2, 3, ..., 3^n - 1)$ mit den Eigenschaften:

$$g_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ für } \mathbf{x} = \mathbf{a_i}, \\ 0 \text{ für } \mathbf{x} \in E_2^n \backslash \{\mathbf{a_i}\} \end{cases}$$

für $i = 1, 2, ..., 2^n$ und

$$g_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ für } & \mathbf{x} = \mathbf{a_j}, \\ 2 \text{ für } & \mathbf{x} = \mathbf{2}, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

für $j = 2^n + 1, 2^n + 2, .., 3^n - 1$. Durch $(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), ..., g_{3^n-1}(\mathbf{x}))$ mit $\mathbf{x} \in E_3^n$ lassen sich dann 3^n paarweise verschiedene Tupel beschreiben, die bis auf $(2, 2, 2, ..., 2)$ sämtlich zu $E_2^{3^n-1}$ gehören. Folglich findet man in $[A]$ zu jeder n-stelligen Funktion $f_* \in T_{0,1;2}$, die nur auf $(2, 2, ..., 2)$ den Wert 2 annimmt, eine gewisse $(3^n - 1)$-stellige Funktion h_{f_*} mit $f_*(\mathbf{x}) = h_{f_*}(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), ..., g_{3^n-1}(\mathbf{x}))$. Durch Einsetzen gewisser solcher gerade konstruierten Funktionen in f_{10} läßt sich in $[A]$ eine zweistellige Funktion f_{10}' mit $f_{10}'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nachweisen.

Bezeichne nun f^n eine beliebige Funktion aus $T_{0,1;2}$. Wie oben gezeigt wurde gehören zu $[A]$ folgende zwei n-stelligen Funktionen:

$$t_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) \text{ für } & f(\mathbf{x}) \in E_2, \\ 2 \quad\ \text{ für } & \mathbf{x} = \mathbf{2}, \\ 0 \quad\ \text{ sonst} \end{cases}$$

und

$$t_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2 \text{ für } & f(\mathbf{x}) = 2, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt $f(\mathbf{x}) = f_{10}'(t_1(\mathbf{x}), t_2(\mathbf{x})) \in [A]$ und $[A] = T_{0,1;2}$ ist gezeigt. Hieraus und aus Tabelle 1 folgt dann die Behauptung von Satz 2. Die Funktionen $g_1, ..., g_{10}$ aus Tabelle 1 sind in Tabelle 2 definiert. Für die Funktion g_{11}^3 sei

$$g_{11}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 2 \text{ für } & \mathbf{x} \in E_3^3 \backslash E_2^3, \\ 1 \text{ für } & \mathbf{x} \in \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

□

	u_2	v_2	s_3	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	h
(1)	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	+	+	+
(2)	−	+	−	−	+	−	−	+	+	+	−	+	+	+
(3)	+	+	−	+	+	−	−	+	−	+	+	+	+	+
(4)	−	−	+	−	−	−	+	+	−	−	−	+	−	+
(5)	+	+	+	+	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−
(6)	+	+	+	−	−	−	−	−	+	+	+	−	+	+
(7)	+	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	−	+	+
(8)	+	+	+	−	+	−	+	+	+	−	−	−	−	−
(9)	+	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	−	+
(10)	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	+	−
(11)	+	+	+	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	+

Tabelle 1

x_1	x_2	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	2	0	1	0	1	0	1	2	2	1	0
1	2	2	2	2	2	2	0	2	2	2	0
2	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	0
2	1	2	1	2	1	1	2	2	2	2	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabelle 2

Satz 3 *Sei* $\{a,b,c\} := E_3$. $T_{a,b;a;b} := Pol_3\{a,b\} \cap Pol_3\{a\} \cap Pol_3\{b\}$ *besitzt genau 11 maximale Klassen:*

(1) $T_{a,b;a;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

(2) $T_{a,b;a;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$

(3) $T_{a,b;a;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

(4) $T_{a,b;a;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$

(5) $T_{a,b;a;b} \cap Pol_3\{c\}$

(6) $T_{a,b;a;b} \cap Pol_3\{a,c\}$

(7) $T_{a,b;a;b} \cap Pol_3\{b,c\}$

(8) $T_{a,b;a;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & a & b \\ 0 & 1 & 2 & b & a \end{pmatrix}$

(9) $T_{a,b;a;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a & c & b & c \\ a & b & a & b & c & a & c & b \end{pmatrix}$

(10) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}$

(11) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & b \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}$.

Beweis: O.B.d.A. seien $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$. Mit A bezeichnen wir in diesem Beweis eine Teilmenge von $T_{0,1;0;1}$, die keine Teilmenge der unter (1) bis (11) aufgezählten Teilklassen von $T_{0,1;0;1}$ ist. Dann gehören zu $[A]$ gewisse Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{11}$ mit der im Teil I vereinbarten Eigenschaft (*).

Da $(E_2 \times E_3) \cap \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ gilt, haben wir $T_{0,1;0;1} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1} \cap Pol \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Wegen $f_{10} \in A$ ist folglich auch eine gewisse Funktion f_{12}^6 mit $f_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ eine Superposition über A.

Mit Hilfe von Lemma 2.3, Teil I sieht man leicht ein, daß jede Funktion aus $T_0 \cap T_1$ ($\subset P_2$)

die Einschränkung einer passend gewählten Funktion aus $[A]$ sein muß.
Da $f_5 \in \{j_1, j_5\}$, $f_6(j_1(x), x) = j_5(x)$ und $f_7(j_5(x), x) = j_1(x)$, sind die Funktionen j_1 und j_5 Superpositionen über A.
Mit Hilfe dieser Funktionen und Lemma 2.6, Teil I sieht man dann, daß $A \cap P_{3,2} \subseteq [A]$ gilt.

Wir konstruieren als nächstes einige Hilfsfunktionen.
Zu $[A]$ gehören Funktionen g_1^2, g_2^2 mit $g_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Folglich hat die Funktion $f'_{10}(x, y) := f_{10}(j_1(y), g_1(x, y), x, g_2(x, y), y) \in [A]$ die Eigenschaft $f'_{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Mit Hilfe der Funktion f_{11} und gewissen Funktionen aus $P_{3,2} \cap [A]$ zeigt man analog, daß zu $[A]$ eine Funktion f'_{11} mit $f'_{11} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ gehört.
Außerdem haben wir $f_8 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. O.B.d.A. können wir $f_8 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ annehmen, da wir in den anderen Fällen zur Funktion
$f_8^*(x_1, ..., x_5) := f_8(x_1, x_2, x_3, x_5, x_4)$ übergehen könnten, die die gewünschte Eigenschaft besitzt.
Bildet man nun $f'_8(x, y) := f'_{11}(g_3(x, y), f_8(j_1(x), j_5(x), x, y, g_4(x, y)))$, wobei g_3 und g_4 gewisse Funktionen aus $[A]$ mit

$$g_3(x, y) := \begin{cases} 1 \text{ für} & (x, y) \in \{(1, 1), (2, 1)\}, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

und

$$g_4(x, y) := \begin{cases} 1 \text{ für} & (x, y) \in \{(1, 1), (2, 0)\}, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

bezeichnen, so hat diese Funktion die Eigenschaft

$$f'_8 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen gewisser Funktionen $g_3, g_4, g_5, g_6 \in [A] \cap P_{3,2}$ in f_{12} liefert eine zweistellige Funktion $f'_{12}(x, y) := f_{12}(g_3(x, y), g_4(x, y), g_5(x, y), g_6(x, y), x, y)$ mit $f'_{12} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Da man anstelle von f'_{12} auch die Funktion $f''_{12}(x,y) := f'_{12}(y,x)$ verwenden kann, genügt es $f'_{12}\begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,2 \end{pmatrix}$ weiter zu betrachten. Falls $f'_{12}\begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, erhält man durch $f'_9(x,y) := f_9(g_3(x,y), g_4(x,y), g_5(x,y), g_6(x,y), x, y, f'_{12}(x,y), f'_{12}(y,x))$ eine Funktion aus $[A]$, für die $f'_9\begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt. Also können wir o.B.d.A. $f'_{12}\begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ annehmen.

Mit Hilfe der Funktionen f'_8, f'_{12} und Funktionen aus $[A] \cap P_{3,2}$ wollen wir jetzt gewisse n-stellige Funktionen $f_{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},...,\mathbf{a_r}} \in T_{0,1;0;1}$ ($\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_r}\} \subseteq E_3^n \backslash E_2^n$) mit

$$f_{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},...,\mathbf{a_r}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2 \text{ für } & \mathbf{x} \in \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_r}\}, \\ 1 \text{ für } & \mathbf{x} = \mathbf{1}, \\ 0 \text{ sonst} & \end{cases}$$

konstruieren.

Falls $\mathbf{a} := (a_1, a_2, ..., a_n) \in E_3^n$ und $a_i = 2$ für ein gewisses $i \in \{1, 2, ..., n\}$, erhält man die n-stellige Funktion $f_{\mathbf{a}}$ als Superposition über A mit Hilfe der n-stelligen Funktion

$$t_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 \text{ für } & \mathbf{x} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{1}\}, \\ 0 \text{ sonst} & \end{cases}$$

aus $[A] \cap P_{3,2}$ mittels $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = f'_8(x_i, t_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}))$.

$f_{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},...,\mathbf{a_r}} \in [A]$ für $r > 1$ und $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_r}\} \subseteq E_3^n \backslash E_2^n$ folgt aus $f_{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},...,\mathbf{a_r}}(\mathbf{x}) = f'_{12}(f_{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},...,\mathbf{a_{r-1}}}(\mathbf{x}), f_{\mathbf{a_r}}(\mathbf{x}))$.

Eine beliebige n-stellige Funktion f aus $T_{0,1;0;1}$ ist dann wie folgt als Superposition über A darstellbar: $f(\mathbf{x}) := f'_{10}(g_f(\mathbf{x}), t_{\mathbf{a_1},...,\mathbf{a_r}}(\mathbf{x}))$, wobei $\{\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_r}\}$ die Menge aller Tupel bezeichnet, auf denen f den Wert 2 annimmt, und g_f durch

$$g_f(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) \text{ für } & f(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}, \\ 1 \quad\; \text{sonst}, & \end{cases}$$

definiert ist. Folglich gilt $[A] = T_{0,1;0;1}$.

Die Behauptung von Satz 3 ergibt sich dann aus Tabelle 3, wobei die Funktionen $g_1, ..., g_{10}$ aus Tabelle 3 in Tabelle 4 definiert sind. Für die Funktion h_0^3, h_1^3 und h_2^3 gelte

$$h_0(\mathbf{x}) := \begin{cases} x + y + z \ (mod\, 2) \text{ für } & \mathbf{x} \in E_2^3, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sonst}, & \end{cases}$$

$$h_1(\mathbf{x}) := \begin{cases} x \wedge (y \vee \overline{z}) \ (mod\, 2) \text{ für } & \mathbf{x} \in E_2^3, \\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sonst}, & \end{cases}$$

und

$$h_2(\mathbf{x}) := \begin{cases} x \vee (y \wedge \overline{z}) \ (mod\, 2) \text{ für } & \mathbf{x} \in E_2^3, \\ 2 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sonst}. & \end{cases}$$

	j_1	j_5	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	h_0	h_1	h_2
(1)	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	−	+	−	−
(2)	+	+	+	−	+	+	+	+	−	+	+	+	−	+	−
(3)	+	+	−	+	+	+	+	+	+	−	+	−	−	−	+
(4)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−
(5)	−	−	−	−	+	−	+	+	+	+	+	−	−	−	+
(6)	+	−	+	−	−	−	−	−	+	+	−	+	+	−	+
(7)	−	+	−	+	+	+	+	−	+	+	+	−	−	+	+
(8)	+	+	−	−	−	−	−	+	+	+	−	+	+	+	+
(9)	+	+	−	+	−	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−
(10)	+	+	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	+	−
(11)	+	+	−	+	−	+	−	+	+	−	−	+	+	+	−

Tabelle 3

x_1	x_2	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	2	0	1	0	1	0	1	2	2	1	0
1	2	2	2	2	2	2	0	2	2	2	0
2	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	0
2	1	2	1	2	1	1	2	2	2	2	0
2	2	0	1	2	1	2	2	2	2	2	0

Tabelle 4

□

Lemma 4 *Seien*

$$\varrho_1 := \begin{pmatrix} 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 2 \\ 0\ 1\ 0\ 1\ 2\ 0 \end{pmatrix},\ \varrho_2 := \begin{pmatrix} 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1\ 2 \end{pmatrix},\ \varrho_3 := \begin{pmatrix} 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\varrho_4 := \begin{pmatrix} 0\ 1\ 2\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 2\ 0\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varrho_5 := \begin{pmatrix} 0\ 2\ 1\ 2 \\ 2\ 0\ 2\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

(a) $T_{0,1;0;2} \cap Pol_3\varrho_1 \subseteq T_{0,1;0;2} \cap Pol_3\varrho_2$;

(b) $T_{0,1;0;2} \cap Pol_3\varrho_3 \subseteq T_{0,1;0;2} \cap Pol_3\varrho_4$;

(c) $T_{0,1;0;2} \cap Pol_3\varrho_5 \subseteq T_{0,1;0;2} \cap Pol_3\varrho_4$.

Beweis: (a) folgt aus $\varrho_1 \cap (E_2 \times E_3) = \varrho_2$ und (b) aus $\varrho_3 \cap (\tau\varrho_3) = \varrho_4$.
(c) ist eine Folgerung aus Lemma 1, (a). □

Satz 5 *Sei* $\{a, b, c\} := E_3$. $T_{a,b;a;c} := Pol_3\{a, b\} \cap Pol_3\{a\} \cap Pol_3\{c\}$ *besitzt genau 11 maximale Klassen:*

(1) $T_{a,b;a;c} \cap Pol_3\{b\}$

(2) $T_{a,b;a;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$

(3) $T_{a,b;a;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$

(4) $T_{a,b;a;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a & b & b & a & b & b \\ a & a & b & b & a & b & a & b \\ a & b & a & a & b & b & a & b \\ a & b & b & a & a & a & b & b \end{pmatrix}$

(5) $T_{a,b;a;c} \cap Pol_3\{a,c\}$

(6) $T_{a,b;a;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ a & b & c & b & a \end{pmatrix}$

(7) $T_{a,b;a;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & c & a & c & b & c \\ a & b & c & c & a & c & b \end{pmatrix}$

(8) $T_{a,b;a;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a & c & b & c \\ a & b & a & b & c & a & c & b \end{pmatrix}$

(9) $T_{a,b;a;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} c & a & c & b & c \\ c & c & a & c & b \end{pmatrix}$

(10) $T_{a,b;a;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & b & c & c \end{pmatrix}$

(11) $T_{a,b;a;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}$.

Beweis: O.B.d.A. seien $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$. Mit A bezeichnen wir in diesem Beweis eine Teilmenge von $T_{0,1;0;2}$, die keine Teilmenge der unter (1) bis (11) aufgezählten Teilklassen von $T_{0,1;0;2}$ ist. Dann gehören zu $[A]$ gewisse Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{11}$ mit der im Teil I vereinbarten Eigenschaft (*).

Wegen Lemma 4 gibt es in $[A]$ als Superpositionen über f_6 und f_{11} gewisse Funktionen f_{12}, f_{13} und f_{14} mit

$$f_{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ f_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ f_{14}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe von Lemma 2.2, Teil I sieht man leicht ein, daß jede Funktion aus $T_0 \subset P_2$ die Einschränkung einer Funktion aus $[A]$ sein muß. Damit sind auch alle einstelligen Funktionen aus $T_{0,1;0;2}$ Superpositionen über A: $u_2,\ s_1\ \in\ [A]$.

Es gilt $f_5(0,2) = 1$ und damit $f_5 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Fall 1: $f_5(2,0) = 0$.

Als erstes soll gezeigt werden, daß alle Funktionen aus $T_{0,1;0;2}$, die nur Werte aus $\{0,2\}$ annehmen, zu $[A]$ gehören.

Wir beginnen mit dem Nachweis gewisser zweistelliger Funktionen $k,\ d \in [A] \cap P_{3;\{0,2\}}$, mit den Eigenschaften

x y	$k(x,y)$	$d(x,y)$
0 0	0	0
0 2	0	2
2 0	0	2
2 2	2	2

.

Da zu $[A]$ gewisse zweistellige Funktionen h_0, h_1 mit $h_0\begin{pmatrix}0\ 1\\1\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und $h_1\begin{pmatrix}0\ 1\\1\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ gehören, gilt
$f'_{12}(x,y) := f_{12}(h_0(f_5(y,x),f_5(x,y)),f_5(y,x),f_5(x,y),h_1(f_5(y,x),f_5(x,y)),x,y) \in [A]$ mit $f'_{12}\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}1\ 2\ 2\\2\ 1\ 2\end{pmatrix}$. Falls $f'_{12}\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, erhält man durch $f''_{12}(x,y) := f_5(x,f'_{12}(x,y))$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f''_{12}\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Also können wir o.B.d.A. $f'_{12}\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ annehmen.
Die Funktion
$f'_8(x,y) := u_2(f_8(h_0(f_5(y,x),f_5(x,y)),f_5(y,x),f_5(x,y),h_1(f_5(x,y),f_5(x,y)),$
$x,y,f'_{12}(x,y),f'_{12}(y,x)))$
hat dann die gewünschten Eigenschaften von d und als Funktion k können wir $k(x,y) := u_2(f_9(f'_{12}(x,y),x,y,f'_{12}(x,y),f'_{12}(y,x)))$ wählen.
Um Lemma 2.3, Teil I anwenden zu können, benötigen wir noch eine auf $\{0,2\}$ nicht monotone Funktion aus $T_{0,1;0;2}\cap P_{3,\{0,2\}}$.
Zu $[A]$ gehört eine Funktion q mit der Eigenschaft $q\begin{pmatrix}0\ 1\\1\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Damit haben wir $q'(x,y,z) := q(f_5(x,y),f_5(x,z))\in[A]$ mit $q'\begin{pmatrix}0\ 0\ 2\\0\ 2\ 2\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Folglich erhält man durch $f'_{13}(x,y,z) := u_2(f_{13}(x,f_5(x,y),q'(x,y,z),f_5(x,z),z,y,f'_{12}(y,z)))\in[A]$ eine Funktion mit $f'_{13}\begin{pmatrix}0\ 0\ 2\\0\ 2\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.
Mit Hilfe von Lemma 2.3, Teil I ist nach diesen Vorbereitungen leicht zu zeigen, daß zu jeder Funktion g^m aus $Pol_{\{0,2\}}\{0\}\cap Pol_{\{0,2\}}\{2\}$ in $[A]$ eine Funktion G^m mit

$$\forall \mathbf{x}\in\{0,2\}^m:\ g(\mathbf{x})=G(\mathbf{x})$$

existiert.
Als nächstes soll eine Fuktion h^2 mit $W(h)=\{0,2\}$ und

$$h\begin{pmatrix}0\ 2\\1\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \tag{2}$$

konstruiert werden. Wir betrachten dazu wieder die Funktion f_5, für die $f_5(0,2)=1$ gilt. Falls $f_5(1,2)=2$ ist, erhält man h durch $u_2\star f_5$. Ist $f_5(1,2)=0$, so kann man als h die Funktion $f'_6(x,y) := u_2(f_6(u_2(x),t_1(f_5(x,y),x),y,x,f_5(x,y)))\in[A]$ wählen, wobei für

$t_1 \in [A]$ $t_1(1,0) = t_1(0,1) = 1$ gilt und o.B.d.A. $u_2\left(f_6\begin{pmatrix}0\,1\,2\,0\,1\\0\,1\,2\,1\,0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ angenommen wurde.

Falls $f_5(1,2) = 1$ ist, kann man mit Hilfe einer Funktion $t_2 \in [A]$ mit $t_2(1,0) = 1$ und $t_2(1,1) = 0$ die Funktion $f_5'(x,y) := t_2(f_5(x,y),x)$ bilden, die $f_5'\begin{pmatrix}0\,2\\1\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ erfüllt, womit wir wie bei dem vorher betrachteten Fall weiter verfahren können.

Also existiert in $[A]$ eine Funktion h mit der oben angegebenen Eigenschaft (2). Wie im Beweis von Satz 2 läßt sich damit $T_{0,1;0;2} \cap P_{3,\{0,2\}} \subseteq [A]$ zeigen.

Ebenfalls analog zum Beweis von Satz 2 kann man sich überlegen, daß alle Funktionen aus $T_{0,1;0;2}$, die auf Tupeln aus E_2^n stets 0 sind und nur auf dem Tupel $(2,2,...,2)$ den Wert 2 annehmen, Superpositionen über Funktionen aus A sind, da die Funktion $r(x,y) := f_5(u_2(y),u_2(x))$ die Eigenschaft $r\begin{pmatrix}0\,0\\0\,2\\2\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ hat.

Wegen $q_1, q_2 \in [A] \cap P_{\{0,2\}}$ mit $q_1\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\\1\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $q_2\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\\1\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ haben wir außerdem $f_{10}'(x,y) := f_{10}(q_1(x,y),x,q_2(x,y),y) \in [A]$ mit $f_{10}'\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\\1\,2\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\\0\,1\end{pmatrix}$.

Mit passend gewählten Funktionen $q_3^2, q_4^2, q_5^2 \in [A]$, die die Eigenschaften

$$q_3\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\\0\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ q_4\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\\0\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ q_5\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\\0\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

besitzen, läßt sich weiterhin $f_{11}'(x,y) := f_{11}(q_3(x,y),q_4(x,y),x,q_5(x,y),y)$ mit der Eigenschaft $f_{11}'\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\\0\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ nachweisen.

Damit lassen sich analoge Konstruktionen wie im Beweis von Satz 2 durchführen und folglich $[A] = T_{0,1;0;2}$ im Fall 1 zeigen.

Fall 2: $f_5(2,0) = 1$.

Für die Funktion $f_5''(x,y) := f_5(u_2(f_5(x,y)),y) \in [A]$ haben wir dann $f_5''\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, womit Fall 2 weiter wie Fall 1 behandelt werden kann.

Fall 3: $f_5(2,0) = 2$.

Da $u_2\left(f_{14}\begin{pmatrix}0\,2\,1\,2\\2\,0\,2\,1\end{pmatrix}\right)\in\begin{pmatrix}0\,2\\0\,2\end{pmatrix}$, hat die Funktion $f'_{14}(x,y):=f_{14}(x,y,f_5(x,y),f_5(y,x))\in$ $[A]$ die Eigenschaft $f'_{14}\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}0\,2\\0\,2\end{pmatrix}$. Falls $f'_{14}(0,2)=f'_{14}(2,0)=0$ ist, kann man die Funktion $f'''_5(x,y):=f_5(f'_{14}(x,y),y)$ bilden, für die $f'''_5\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ gilt, womit weiter wie unter Fall 1 verfahren werden kann.
Der Fall $f'_{14}(0,2)=f'_{14}(2,0)=2$ läßt sich durch Bildung von $f'_9(x,y) := u_2(f_9(f'_{14}(x,y),x,y,f_5(x,y),f_5(y,x)))$ auf den Fall $f'_{14}(0,2)=f'_{14}(2,0)=0$ zurückführen, da $f'_9\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ gilt.

Folglich ist in allen möglichen Fällen für f_5: $[A]=T_{0,1;0;2}$. Die Behauptung von Satz 5 ergibt sich dann aus Tabelle 5, wobei die Funktionen $g_1,...,g_{12}$ in Tabelle 6 definiert sind und für die Funktionen h_1^3, h_2^3, h_3^3 gelte

$$h_1(x,y,z):=\begin{cases}xy\vee xz\vee yz & \text{für} \quad x,y,z\in E_2,\\ 2 & \text{sonst;}\end{cases}$$

$$h_2(x,y,z):=\begin{cases}x+y+z\ (mod\,2) & \text{für} \quad x,y,z\in E_2,\\ 2 & \text{sonst;}\end{cases}$$

$$h_3(x,y,z):=\begin{cases}x+y+z\ (mod\,2) & \text{für} \quad x,y,z\in E_2,\\ 2 & \text{für} \quad x=y=z=2,\\ 1 & \text{sonst.}\end{cases}$$

	u_2	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	h_1	h_2	h_3
(1)	−	−	+	−	−	+	+	+	−	+	+	−	+	+	+	+
(2)	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−
(3)	+	+	−	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	−	−
(4)	+	+	−	−	−	+	+	−	+	+	−	+	+	−	+	+
(5)	+	+	−	−	−	−	−	+	+	−	+	+	+	+	+	−
(6)	+	−	−	−	−	−	+	+	+	−	+	+	−	+	+	+
(7)	+	+	−	−	−	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	+
(8)	+	−	+	−	+	+	+	−	−	−	+	+	−	−	−	+
(9)	+	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	+	−
(10)	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	−	+	+	−
(11)	+	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	−	−	+

Tabelle 5

x_1	x_2	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	2	0	2	0	1	0	1	2	2	1	0	0	2
1	2	2	1	2	2	2	0	2	2	2	0	0	2
2	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	0	0	0
2	1	2	1	2	1	1	2	2	2	2	0	1	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabelle 6

□

Satz 6 *Sei* $\{a,b,c\} := E_3$. $T_{a,b;a,c} := Pol_3\{a,b\} \cap Pol_3\{a,c\}$ *besitzt genau 14 maximale Klassen:*

(1) $T_{a,b;a,c} \cap Pol_3\{b\}$

(2) $T_{a,b;a,c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$

(3) $T_{a,b;a,c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$

(4) $T_{a,b;a,c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a & b & b & a & b & b \\ a & a & b & b & a & b & a & b \\ a & b & a & a & b & b & a & b \\ a & b & b & a & a & a & b & b \end{pmatrix}$

(5) $T_{a,b;a,c} \cap Pol_3\{c\}$

(6) $T_{a,b;a,c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & c \\ a & c & c \end{pmatrix}$

(7) $T_{a,b;a,c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & c & a \\ a & a & c \end{pmatrix}$

(8) $T_{a,b;a,c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a & c & c & a & c & c \\ a & a & c & c & a & c & a & c \\ a & c & a & a & c & c & a & c \\ a & c & c & a & a & a & c & c \end{pmatrix}$

(9) $T_{a,b;a,c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$

(10) $T_{a,b;a,c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & c & a \\ a & c & b \end{pmatrix}$

(11) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \\ a & c \end{pmatrix}$

(12) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & a & c \end{pmatrix}$

(13) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & b \\ a & c & c \end{pmatrix}$

(14) $Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & a \\ a & a & c \end{pmatrix}$.

Beweis: O.B.d.A. seien $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$. Mit A bezeichnen wir in diesem Beweis eine Teilmenge von $T_{0,1;0,2}$, die keine Teilmenge der unter (1) bis (14) aufgezählten Teilklassen von $T_{0,1;0,2}$ ist. Dann gehören zu $[A]$ gewisse Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{14}$ mit der im Teil I vereinbarten Eigenschaft (*).
Wegen Lemma 2.2, Teil I existiert zu jeder Funktion $g^m \in Pol_3\{0\}(\subset P_2)$ und jeder Funktion $h^m \in Pol_3\{0\}(\subset P_{\{0,2\}})$ Funktionen $G^m, H^m \in [A]$ mit

$$(\forall \mathbf{x} \in E_2^m : \ g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})) \ \wedge \ (\forall \mathbf{x} \in \{0,2\}^m : \ h(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x})).$$

Folglich gehören zu $[A]$ auch einstellige Funktionen t_1, t_2 mit $t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, womit $t_1 \star t_2 = c_0 \in [A]$ gilt. Folglich ist auch $f'_{11}(x) := f_{11}(c_0, x) \in \{j_1, u_2\}$ eine Superposition über A. Da $f_{12}(c_0, j_1(x), x) = u_2(x)$ und $f_{13}(c_0, u_2(x), x) = j_1(x)$, haben wir $T^1_{0,1;0,2} \subseteq [A]$.
Als nächstes soll gezeigt werden, daß alle Funktionen aus $T_{0,1;0,2}$, die nur Werte aus $\{0,1\}$ oder $\{0,2\}$ annehmen, als Superpositionen über A darstellbar sind.
Die Funktion $f'_9(x,y) := j_1(f_9(c_0(x), x, y)) \in [A]$ hat die Eigenschaft: $f'_9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Wir bilden nun zu jedem $\mathbf{x} \in E_3^n$ ein Tupel

$$\mathfrak{T}_{\mathbf{x}} := (q_{\mathbf{a_1}}(\mathbf{x}), q_{\mathbf{a_2}}(\mathbf{x}), ..., q_{\mathbf{a_{2^n-1}}}(\mathbf{x}),\\ j_1(x_1), j_1(x_2), ..., j_1(x_n),\\ ..., f_9'(x_i, x_j), ...)$$

der Länge $t := 2^n - 1 + n + n \cdot (n-1)$, wobei $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_{2^n-1}}\} = E_2^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, $q_{\mathbf{a_i}} \in [A]$,

$$q_{\mathbf{a_i}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \mathbf{x} = \mathbf{a_i}, \\ 0 & \text{für} \quad \mathbf{x} \in \{0,2\}^n, \\ \in \{0,1\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$(i = 1, 2, ..., 2^n - 1)$, $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, 3, ..., n\}$, i, j paarweise verschieden und $\{i, j\}$ sämtliche Möglichkeiten durchläuft.
Man prüft nun leicht nach, daß für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_3^n$ die folgenden Implikationen gelten:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_2^n \ \wedge \ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \implies \mathfrak{T}_{\mathbf{x}} \neq \mathfrak{T}_{\mathbf{y}},$$
$$(\mathbf{x} \in E_2^n \ \wedge \ \mathbf{y} \in E_3^n \backslash (E_2^n \cup \{0,2\}^n)) \implies \mathfrak{T}_{\mathbf{x}} \neq \mathfrak{T}_{\mathbf{y}},$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_3^n \backslash (E_2^n \cup \{0,2\}^n) \ \wedge \ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \implies \mathfrak{T}_{\mathbf{x}} \neq \mathfrak{T}_{\mathbf{y}}.$$

Folglich existiert zu jeder n-stelligen Funktion $f \in T_{0,1;0,2} \cap P_{3,2}$ in $[A] \cap P_{3,2}$ eine t-stellige Funktion q_f mit $q_f(\mathfrak{T}_{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x})$, woraus sich $T_{0,1;0,2} \cap P_{3,2} \subseteq [A]$ ergibt.
Mit Hilfe der Funktion f_{10} zeigt man analog, daß $T_{0,1;0,2} \cap P_{3,\{0,2\}} \subseteq [A]$ richtig ist.

Bildet man $f_{14}'(x, y) := f_{14}(c_0(x), x, y) \in [A]$, so hat diese Funktion die Eigenschaft: $f_{14}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Eine beliebige Funktion $g^m \in T_{0,1;0,2}$ läßt sich dann mit Hilfe der m-stelligen Funktionen

$$g_1(\mathbf{x}) := \begin{cases} g(\mathbf{x}) \text{ für} & g(\mathbf{x}) \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad g_2(\mathbf{x}) := \begin{cases} g(\mathbf{x}) \text{ für} & g(\mathbf{x}) \in \{0,2\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in der Form $g(\mathbf{x}) = f_{14}(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}))$ darstellen, woraus $[A] = T_{0,1;0,2}$ folgt.
Die paarweise Unvergleichbarkeit der Klassen (9) - (14) ist der Tabelle 7 zu entnehmen, wobei

$$h_1(x, y, z) := \begin{cases} x + y + z (mod\, 4) \text{ für} & x, y, z \in \{0,2\}, \\ x & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$h_2(x, y, z) := \begin{cases} x + y + z (mod\, 2) \text{ für} & x, y, z \in \{0,1\}, \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Funktionen g_1, g_2, g_3 in Tabelle 8 definiert sind.
Die paarweise Unvergleichbarkeit dieser Mengen mit den restlichen Klassen und die der restlichen Klassen untereinander ist leicht nachzuprüfen.

	h_1	h_2	g_1	g_2	g_3	j_1	u_2
(9)	+	−	−	−	−	+	+
(10)	−	+	−	+	−	+	+
(11)	−	−	+	+	+	−	−
(12)	−	−	−	+	+	+	−
(13)	−	−	−	+	+	−	+
(14)	−	−	+	−	+	+	+

Tabelle 7

x_1	x_2	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1
0	2	2	2	0
2	0	0	2	2
2	2	0	2	2
1	2	0	2	0
2	1	0	2	0

Tabelle 8

□

Satz 7 *Sei* $\{a,b,c\} := E_3$. $T_{a,b;a,c;b} := Pol_3\{a,b\} \cap Pol_3\{a,c\} \cap Pol_3\{b\}$ *besitzt genau 12 maximale Klassen:*

(1) $T_{a,b;a,c;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

(2) $T_{a,b;a,c;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$

(3) $T_{a,b;a,c;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$

(4) $T_{a,b;a,c;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} b & b & a \\ b & a & b \end{pmatrix}$

(5) $T_{a,b;a,c;b} \cap Pol_3\{c\}$

(6) $T_{a,b;a,c;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & c \\ a & c & c \end{pmatrix}$

(7) $T_{a,b;a,c;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & c & a \\ a & a & c \end{pmatrix}$

(8) $T_{a,b;a,c;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a & c & c & a & c & c \\ a & a & c & c & a & c & a & c \\ a & c & a & a & c & c & a & c \\ a & c & c & a & a & a & c & c \end{pmatrix}$

(9) $T_{a,b;a,c;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$

(10) $T_{a,b;a,c;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & c & a \\ a & c & b \end{pmatrix}$

(11) $T_{a,b;a,c;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & c \end{pmatrix}$

(12) $T_{a,b;a,c;b} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & a & c \end{pmatrix}$.

Beweis: O.B.d.A. seien $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$. Mit A bezeichnen wir in diesem Beweis eine Teilmenge von $T_{0,1;0,2;1}$, die keine Teilmenge der unter (1) bis (12) aufgezählten Teilklassen von $T_{0,1;0,2;1}$ ist. Dann gehören zu $[A]$ gewisse Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{12}$ mit der im Teil I

vereinbarten Eigenschaft (*). Insbesondere gilt $f_5 = j_1 \in [A]$.
Wegen Lemma 2.3 und 2.2 aus Teil I existieren zu jeder Funktion $g^m \in Pol_2\{0\} \cap Pol_2\{1\} (\subset P_2)$ und jeder Funktion $h^m \in Pol_3\{0\} (\subset P_{\{0,2\}})$ Funktionen $G^m, H^m \in [A]$ mit

$$(\forall \mathbf{x} \in E_2^m : g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})) \wedge (\forall \mathbf{x} \in \{0,2\}^m : h(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x})).$$

Als nächstes soll gezeigt werden, daß alle Funktionen aus $T_{0,1;0,2;1}$, die nur Werte aus $\{0,1\}$ annehmen, als Superpositionen über A darstellbar sind.
Die Funktion $f'_9(x,y) := j_1(f_9(j_1(y),x,y)) \in [A] \cap P_{3,2}$ hat die Eigenschaft: $f'_9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wir bilden nun zu jedem $\mathbf{x} \in E_3^n$ ein Tupel

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\mathbf{x}} := (&q_{\mathbf{a_1}}(\mathbf{x}), q_{\mathbf{a_2}}(\mathbf{x}), ..., q_{\mathbf{a_{2^n-2}}}(\mathbf{x}), \\ &j_1(x_1), j_1(x_2), ..., j_1(x_n), \\ &..., f'_9(x_i, x_j), ...) \end{aligned}$$

der Länge $t := 2^n - 2 + n + n \cdot (n-1)$, wobei $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_{2^n-2}}\} = E_2^n \backslash \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, $q_{\mathbf{a_i}} \in [A]$,

$$q_{\mathbf{a_i}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \mathbf{x} = \mathbf{a_i}, \\ 0 & \text{für} \quad \mathbf{x} \in \{0,2\}^n, \\ \in \{0,1\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$(i = 1, 2, ..., 2^n - 2)$, $\{i,j\} \subseteq \{1,2,3,...,n\}$, $i \neq j$ und $\{i,j\}$ sämtliche Möglichkeiten durchläuft.
Man prüft nun leicht nach, daß für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_3^n$ die folgenden Implikationen gelten:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_2^n \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \implies \mathfrak{T}_{\mathbf{x}} \neq \mathfrak{T}_{\mathbf{y}}, \\ &(\mathbf{x} \in E_2^n \wedge \mathbf{y} \in E_3^n \backslash (E_2^n \cup \{0,2\}^n)) \implies \mathfrak{T}_{\mathbf{x}} \neq \mathfrak{T}_{\mathbf{y}}, \\ &(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_3^n \backslash (E_2^n \cup \{0,2\}^n) \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \implies \mathfrak{T}_{\mathbf{x}} \neq \mathfrak{T}_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Folglich existiert zu jeder n-stelligen Funktion $f \in T_{0,1;0,2;1} \cap P_{3,2}$ in $[A] \cap P_{3,2}$ eine t-stellige Funktion mit $q_f(\mathfrak{T}_{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x})$, woraus sich $T_{0,1;0,2;1} \cap P_{3,2} \subseteq [A]$ ergibt.
Als nächstes sollen alle Funktionen aus $T_{0,1;0,2;1}$ in $[A]$ nachgewiesen werden, die nur auf $\mathbf{1}$ den Wert 1 annehmen. Wir beginnen mit der Konstruktion einiger Hilfsfunktionen:
Wählt man $g_1^2 \in T_{0,1;0,2;1} \cap P_{3,2}$ mit $g_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, so hat die Funktion $f'_{10}(x,y) := f_{10}(g_1(x,y),x,y)$ die Eigenschaft $f'_{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Falls $f'_{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist, erhält man durch $f'_{12}(x,y) := f_{12}(g_1(x,y), y, f'_{10}(x,y))$ eine Funktion aus $[A]$ mit $f'_{12} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also genügt es, $f'_{10}\begin{pmatrix} 2\,0 \\ 2\,1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,0 \end{pmatrix}$ weiter zu betrachten.

Wie bereits gezeigt wurde, gehört zu $[A]$ eine Funktion g_2^2 mit $g_2\begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, mit der man $f''_{10}(x,y) := g_3(f'_{10}(x,y), x) \in [A]$ erhält. O.B.d.A. können wir damit $f'_{10}\begin{pmatrix} 2\,0 \\ 2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $f''_{10}\begin{pmatrix} 2\,0 \\ 2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ annehmen.

Wählt man $g_3^2, g_4^2, g_5^2 \in [A] \cap P_{3,2}$ wie folgt:

$$g_3(x,y) := \begin{cases} 1 \text{ für} & (x,y) \in \{(1,1),(2,1)\}, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$

$$g_4(x,y) := \begin{cases} 1 \text{ für} & (x,y) = (1,1), \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

und

$$g_5(x,y) := \begin{cases} f''_{10}(x,y) \text{ für} & (x,y) \in E_2^2, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

so haben die Funktionen $r(x,y) := f'_{12}(g_3(x,y), f'_{10}(x,y))$ und $s(x,y) := f_{12}(g_4(x,y), g_5(x,y), f''_{10}(x,y))$ die Eigenschaften $r\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 2\,0 \\ 2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $s\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 2\,0 \\ 2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt n-stellige Funktionen der Form

$$g_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 2 \text{ für} & \mathbf{x} = \mathbf{a}, \\ 1 \text{ für} & \mathbf{x} = \mathbf{1}, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

für $\mathbf{a} \in E_3^n \backslash E_2^n$ konstruieren:

Sei zunächst $\mathbf{a} \in \{0,2\}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$. Mit Hilfe der Funktion $h_{\mathbf{a}}^n \in [A]$ mit $h_{\mathbf{a}}^n(\mathbf{a}) = 2$, $h_{\mathbf{a}}^n(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \{0,2\}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ und der Funktion

$$t_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 \text{ für} & \mathbf{x} = \mathbf{1} \ \vee\ (h_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 2 \ \wedge\ \mathbf{x} \neq \mathbf{a}), \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

erhalten wir: $g_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = s(h_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}), t_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}))$. Falls $\mathbf{a}$ zu $E_3^n \backslash (E_2^n \cup \{0,2\}^n)$ gehört und $a_i = 2$ ist, erhält man $g_{\mathbf{a}}$ als Superposition über r und der Funktion

$$u_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 \text{ für } & \mathbf{x} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{1}\}, \\ 0 \text{ sonst} & \end{cases}$$

wie folgt: $g_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = r(x_i, u_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}))$. Offenbar sind alle n-stelligen Funktionen aus $T_{0,1;0,2;1} \backslash P_{3,2}$, die nur auf $\mathbf{1}$ den Wert 1 annehmen, Superpositionen über Funktionen der Form $g_{\mathbf{a}}$ mit $\mathbf{a} \in E_3^n \backslash E_2^n$ und einer gewissen Funktion $d^2 \in [A]$ mit $d \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Indem man die Funktion $f'_{11}(x,y) := f_{11}(g_4(x,y), x, y) \in [A]$ bildet, die die Eigenschaft $f'_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat, läßt sich eine beliebige Funktion $f^n \in T_{0,1;0,2;1}$ wie folgt als Superposition über den oben konstruierten Funktionen darstellen: $f(\mathbf{x}) = f'_{11}(t(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}))$, wobei

$$t(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) \text{ für } & f(\mathbf{x}) \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 \text{ für } & \mathbf{x} = \mathbf{1}, \\ 2 \text{ für } & f(\mathbf{x}) = 2, \\ 0 \text{ sonst.} & \end{cases}$$

Die paarweise Unvergleichbarkeit der Klassen (9) - (12) ist der Tabelle 9 zu entnehmen, wobei

$$h_1(x,y,z) := \begin{cases} x + y + z (mod\, 4) \text{ für } & x,y,z \in \{0,2\}, \\ x & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$h_2(x,y,z) := \begin{cases} x + y + z (mod\, 2) \text{ für } & x,y,z \in \{0,1\}, \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Funktionen h_3, h_4, h_5 in Tabelle 10 definiert sind.
Die paarweise Unvergleichbarkeit dieser Mengen mit den restlichen Klassen und die der

restlichen Klassen untereinander ist leicht nachzuprüfen.

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
(9)	+	−	+	−	−
(10)	−	+	−	+	−
(11)	−	−	+	−	+
(12)	−	−	−	+	+

Tabelle 9

x_1	x_2	h_3	h_4	h_5
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1
0	2	2	2	0
2	0	2	2	2
2	2	0	2	2
1	2	0	2	0
2	1	0	2	0

Tabelle 10

□

Literatur

[1] **Lau, D.** : *Die maximalen Klassen von* $Pol_3\{\varrho | \varrho \in Q\}$ *für* $Q \subseteq \mathfrak{P}(\{0,1,2\})$, *Teil I.* Rostock. Math. Kolloq. **51**, 111-126 (1997). Teil III, Eingereicht bei Rostock. Math. Kolloq.

eingegangen: 10. August 1997

Autor:

Dietlinde Lau
Fachbereich Mathematik
Universität Rostock
D-18051 Rostock
Germany