Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 53

Dietlinde Lau	*Die maximalen Klassen von* $\bigcap_{\varrho\in Q} Pol_3\varrho$ *für* $Q \subseteq \mathfrak{P}(\{0,1,2\})$, *Teil III*	3
Roland Schmidt	*Supermodulare Untergruppen von Gruppen*	23
Albena A. Kosseva; Stepan I. Kostadinov; Petr P. Zabreiko	*Stability of Linear Impulse Differential Equations with Unbounded Operator*	51
Ali Abdennadher; Marie Christine Néel	*Estimates for the resolvent of the Stokes operator with periodic boundary conditions in a layer of* $\mathbb{R}^3$	61
Egbert Dettweiler	*Embedding of general martingales into a Brownian motion*	75
Holger Boche	*Stabilitätsverhalten der kausalen Variante des idealen Tiefpasses*	111

Universität Rostock

Fachbereich Mathematik

1999

Herausgeber:	Der Sprecher des Fachbereichs Mathematik der Universität Rostock
Wissenschaftlicher Beirat:	H.-D. Gronau F. Liese G. Wildenhain
Schriftleitung:	K.-D. Drews
Herstellung der Druckvorlage:	S. Dittmer, W. Hartmann, H. Schubert

Zitat–Kurztitel: Rostock. Math. Kolloq. **53** (1999)

Druck: Universitätsdruckerei

Rostock. Math. Kolloq. **53**, 3–22 (1999)

Subject Classification (AMS)
03G20, 08A40

Dietlinde Lau

Die maximalen Klassen von $\bigcap_{\varrho \in Q} \ Pol_3\varrho$ für $Q \subseteq \mathfrak{P}(\{0,1,2\})$, Teil III

In Fortsetzung von Teil I und II, dieser Arbeit sollen nachfolgend für Teilklassen der Form

$$I \cap \bigcap_{\varrho \in Q} Pol_3\varrho \ (\subseteq P_3)\,,$$

wobei $I := Pol_3\{0\} \cap Pol_3\{1\} \cap Pol_3\{2\}$ („Menge aller idempotente Funktionen aus P_3“) und

$$Q \in \{\emptyset, \{\{a,b\}\}, \{\{a,b\},\{a,c\}\}, \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\} \mid \{a,b,c\} = \{0,1,2\}\}$$

ist, die maximalen Klassen ermittelt werden.

Neben den bereits im Teil I eingeführten Begriffen und Bezeichnungen verwenden wir nachfolgend auch die folgenden Bezeichnungen für Funktionen aus P_3:

Für $\{a,b,c\} := E_3$ und die totale Ordnung $\omega : a < b < c$ sei $s_{a,b}(x,y) := max_\omega(x,y)$. Für $n \geq 3$ sei ferner $s^n_{a,b} := s^{n-1}_{a,b} \star s_{a,b}$. Mit g_{a_1,a_2,a_3} kennzeichnen wir 2-stellige Funktionen aus I, die definiert sind durch

$$g_{a_1,a_2,a_3}(0,1) = g_{a_1,a_2,a_3}(1,0) = a_1,\ g_{a_1,a_2,a_3}(0,2) = g_{a_1,a_2,a_3}(2,0) = a_2,$$
$$g_{a_1,a_2,a_3}(1,2) = g_{a_1,a_2,a_3}(2,1) = a_3\,.$$

Sämtliche maximalen Klassen der Menge aller idempotenten Funktionen aus P_k wurden bereits in [4] von Á. Szendrei beschrieben. Als Spezialfall dieser Arbeit (bzw. aus [5] oder [1]) erhält man den folgenden Satz:

Satz 1 *Die Klasse I aller idempotenten Funktionen aus P_3 besitzt genau 10 maximale Klassen:*

(1) $I \cap Pol_3\{0,1\}$,
(2) $I \cap Pol_3\{0,2\}$,
(3) $I \cap Pol_3\{1,2\}$
(4) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,
(5) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
(6) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
(7) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
(8) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
(9) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
(10) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Zwecks Ermittlung der maximalen Klassen für die noch verbleibenden Fälle für T_Q benötigen wir einige Hilfsaussagen.

Lemma 2 *Seien* $T := Pol_3\{0,1\} \cap Pol_3\{0,2\} \cap Pol_3\{1,2\}$, $T_{0,1} := Pol_3\{0,1\}$ *und* $T_{0,1;0,2} := Pol_3\{0,1\} \cap Pol_3\{0,2\}$. *Dann gilt:*

(a) $\forall g \in (I \cap T_{0,1;0,2}) \backslash Pol_3\{1,2\} :\ [\{g\} \cup T] = I \cap T_{0,1;0,2}$,

(b) $\forall g \in (I \cap T_{0,1}) \backslash Pol_3\{1,2\}\ \forall h \in (I \cap T_{0,1}) \backslash Pol_3\{0,2\} :\ [\{g,h\} \cup T] = I \cap T_{0,1}$.

Beweis: O.B.d.A. seien die idempotenten Funktionen g und h zweistellig und es gelte: $g(1,2) = 0$ und $h(0,2) = 1$.
(a): Eine beliebige Funktion f^n aus $I \cap T_{0,1;0,2}$ läßt sich dann mit Hilfe der Funktionen $g_\alpha^n \in T$ ($\alpha \in \{1,2\}$), die definiert sind durch

$$g_\alpha(\mathbf{x}) := \begin{cases} \alpha & \text{für} \quad \mathbf{x} \in \{1,2\}^n \text{ und } f(\mathbf{x}) = 0\,, \\ f(\mathbf{x}) & \text{sonst,} \end{cases}$$

durch $f(\mathbf{x}) = g(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}))$ darstellen.
(b): Analog zu (a) zeigt man leicht, daß $T_{0,1;0,2;0;1;2} \subseteq [\{g\} \cup T]$ gilt.
Sei $f^n \in I \cap T_{0,1}$. Wählt man $h_\beta^n \in T_{0,1;0,2;0;1;2}$ ($\beta \in \{0,2\}$) wie folgt:

$$h_\beta(\mathbf{x}) := \begin{cases} \beta & \text{für} \quad \mathbf{x} \in \{0,2\}^n \text{ und } f(\mathbf{x}) = 1\,, \\ f(\mathbf{x}) & \text{sonst,} \end{cases}$$

so erhält man $f \in [\{g,h\} \cup T]$ aus $f(\mathbf{x}) = h(h_0(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}))$. ∎

Lemma 3 *Sei* $T := Pol_3\{0,1\} \cap Pol_3\{0,2\} \cap Pol_3\{1,2\}$ *und bezeichne* A *eine Teilmenge von* I, *die für jedes* $\{a,b\} \in \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\}$ *die folgenden* 2 *Eigenschaften besitzt:*

(i) $\forall h^m \in P_{\{a,b\}} \cap Pol \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\ \exists H^m \in [A] :\ \forall \mathbf{x} \in \{a,b\}^m :\ h(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x})$;

(ii) $s_{a,b}, s_{b,a} \in [A]$.

Dann gilt $T \subseteq [A]$. [1]

[1] Als unmittelbare Folgerung aus diesem Lemma, Lemma 2, Lemma 2.3 (Teil I) und $\left(T_Q \cap Pol \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}\right)^2 = T_Q^2$, falls $T_Q \subset I$ und $a, b \in E_3$, $a \neq b$, erhält man:
Die Ordnung der Klassen $T_Q \subset I$, *d. h. die kleinste Zahl* r *mit* $[T_Q^r] = T_Q$, *ist* 3.
Für $T_Q = I$ folgt aus allgemeineren Aussagen über idempotente Funktionen (siehe [3]), daß die Ordnung von I gleich 2 ist.

Beweis: Bezeichne $\mathfrak{E}$ die Menge $E_2^n \cup \{0,2\}^n \cup \{1,2\}^n$. Eine beliebige n-stellige Funktion $f \in T$ läßt sich mit Hilfe der Funktionen $x \vee y := s_{0,1}(x,y)$,

$$f_1^n(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) \text{ für } & \mathbf{x} \in \mathfrak{E}\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und Funktionen der Art

$$f_{\mathbf{a},\alpha}^n(\mathbf{x}) := \begin{cases} \alpha \text{ für } & \mathbf{x} = \mathbf{a}\,, \\ 1 \text{ für } & \mathbf{x} \in \{1,2\}^n \backslash \{\mathbf{2}\}\,, \\ 2 \text{ für } & \mathbf{x} = \mathbf{2}\,, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

in der Form

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) \vee \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in E_3^n \backslash \mathfrak{E} \\ f(\mathbf{a}) \in \{1,2\}}} f_{\mathbf{a},f(\mathbf{a})}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

darstellen. Zwecks Nachweis von $f \in [A]$ konstruieren wir zunächst für beliebige $a, b \in E_3$ mit $\{a,b,c\} = E_3$ die n-stelligen Funktionen:

$$F_{a,b}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x} \in \{a,b\}^n\,, \\ b & \text{für } \mathbf{x} \in \{b,c\}^n \backslash \{\mathbf{c}\}\,, \\ c & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{c}\,, \\ a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen (ii) und $s_{a,b}^n := s_{a,b}^{n-1} \star s_{a,b}$ gilt für beliebige $n \geq 3$

$$s_{a,b}^n \in [A]\,. \tag{2}$$

Sei zunächst $a = 0$ und $b = 1$. Wegen (i) findet man in $[A]$ eine Funktion g^n mit

$$\forall \mathbf{x} \in \{0,1\}^n: \ f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\,. \tag{3}$$

Unter Verwendung von (2) und (3) prüft man leicht nach, daß

$$F_{0,1}(\mathbf{x}) = s_{2,1}^3(s_{0,1}^2(g(\mathbf{x}), s_{1,0}^n(\mathbf{x})), s_{2,0}^n(\mathbf{x}), s_{2,0}^3(s_{2,1}^n(\mathbf{x}), s_{1,0}^n(\mathbf{x}), s_{0,1}^n(\mathbf{x}))) \in [A]$$

gilt.
Analog zeigt man $F_{a,b} \in [A]$ für die anderen $a, b \in E_3$.
Hieraus und aus $f_1(\mathbf{x}) = s_{2,1}^2(s_{0,1}^2(F_{0,1}(\mathbf{x}), F_{0,2}(\mathbf{x})), F_{1,2}(\mathbf{x}))$ folgt $f_1 \in [A]$.
Wegen (1) haben wir zum Beweis unseres Lemmas nur noch $f_{\mathbf{a},\beta}^n \in [A]$ für beliebige $\mathbf{a} \in E_3^n \backslash \mathfrak{E}$

und $\beta \in \{1,2\}$ zu zeigen.
O.B.d.A. seien

$$\mathbf{a} := (\underbrace{0,0,...,0}_{r}, \underbrace{1,1,...,1}_{s}, \underbrace{2,2,...,2}_{t}),$$

$\beta = 1$ und

$$\mathbf{x} := (x_1, x_2, ..., x_r)\,,\ \mathbf{y} := (y_1, y_2, ..., y_s)\,,\ \mathbf{z} := (z_1, z_2, ..., z_t)\,.$$

Nach unseren obigen Überlegungen zu den Funktionen $F_{a,b}$ sind folgende Funktionen Superpositionen über A:

$$g_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \begin{cases} 1 \text{ für} & (\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{0},\mathbf{1}) \text{ oder } (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \{1,2\}^{r+s} \backslash \{\mathbf{2}^{r+s}\}\,, \\ 2 \text{ für} & (\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{2}^{r+s}\,, \\ 0 \text{ sonst,} & \end{cases}$$

$$g_2(\mathbf{x},\mathbf{z}) := \begin{cases} 2 \text{ für} & (\mathbf{x},\mathbf{z}) = (\mathbf{0},\mathbf{2}) \text{ oder } (\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{2}^{r+t} \text{ oder} \\ & (\mathbf{x},\mathbf{z}) \in \{1,2\}^{r+t} \backslash \{\mathbf{1}^{r+t}\}\,, \\ 1 \text{ für} & (\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{1}^{r+t}\,, \\ 0 \text{ sonst,} & \end{cases}$$

$$g_3(\mathbf{y},\mathbf{z}) := \begin{cases} 2 \text{ für} & (\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \{0,2\}^{s+t} \backslash \{\mathbf{0}^{s+t}\}\,, \\ 0 \text{ für} & (\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{0}^{s+t}\,, \\ 1 \text{ sonst.} & \end{cases}$$

Es gilt dann

$$f_{\mathbf{a},1}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = s^3_{2,1}(g_1(\mathbf{x},\mathbf{y}), g_2(\mathbf{x},\mathbf{z}), g_3(\mathbf{y},\mathbf{z}))\,.$$

Analog zeigt man $f_{\mathbf{a},2} \in [A]$. Folglich ist $T \subseteq [A]$. ■

Lemma 4 *Die Menge $A \subseteq I$ habe die Eigenschaft*

$$\begin{aligned} &\forall \{a,b\} \in \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\}: \\ &\forall h^m \in P_{\{a,b\}} \cap Pol \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ \exists H^m \in [A]:\ \forall \mathbf{x} \in \{a,b\}^m:\ h(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x})\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Dann existieren zu beliebigen $\alpha \in \{0,1\}$, $\beta \in \{0,2\}$, $\gamma \in \{1,2\}$ gewisse $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in E_3$ mit

$$g_{\alpha,b_1,c_1},\ g_{a_1,\beta,c_2},\ g_{a_2,b_2,\gamma} \in [A]\,. \tag{5}$$

Beweis: Wegen (4) gibt es für beliebiges $\alpha \in \{0,1\}$ eine Funktion $g \in [A]$ mit $g(0,1) = g(1,0) = \alpha$. Entweder liegt mit g bereits eine Funktion des Typs g_{α,b_1,c_1} vor oder wir können sie mit folgenden Superpositionsbildungen in $[A]$ nachweisen:
Ist $b_1 := g(0,2) \neq g(2,0) =: b_1'$, so erhält man mit Hilfe einer Funktion $h_1^2 \in [A]$ mit $h_1 \begin{pmatrix} b_1 & b_1' \\ b_1' & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ die Funktion $g'(x,y) := h_1(g(x,y), g(y,x))$ mit den Eigenschaften $g'(0,1) = g'(1,0) = \alpha,\ g'(0,2) = g'(2,0) = b_1$. Falls $c_1 := g'(1,2) \neq g'(2,1) =: c_1'$, haben wir $g_{\alpha,b_1,c_1}(x,y) = h_2(g'(x,y), g'(y,x)) \in [A]$, wobei $h_2 \in [A]$ mit $h_2(c_1,c_1') = h_2(c_1',c_1) = c_1$ gewählt ist.
g_{a_1,β,c_2}, $g_{a_2,b_2,\gamma} \in [A]$ zeigt man analog. ■

Lemma 5 *Sei $T_{0,1;0;1;2} := Pol_3\{a,b\} \cap I$. Dann gilt*

(a) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&2 \\ 0&1&0&1&2&0 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0 \\ 0&1&0&1&2 \end{pmatrix}$,

(b) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&2&1&2 \\ 2&0&2&1 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&0&1 \\ 0&1&2&1&0 \end{pmatrix}$,

(c) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&1&0&1 \\ 0&1&2&0&2&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}$,

(d) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&1&2&1&0 \\ 0&1&2&2&1&0&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}$,

(e) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&0&1&1&2&0 \\ 0&1&2&1&0&2&1&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&0&1&1&1 \\ 0&1&0&1&2 \end{pmatrix}$,

(f) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&0&1&0&1 \\ 0&1&2&1&0&2&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&0&1 \\ 0&1&2&1&0 \end{pmatrix}$,

(g) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&0&1 \\ 0&1&2&1&0 \end{pmatrix}$,

(h) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&0&1 \\ 0&1&2&1&0 \end{pmatrix}$,

(i) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3\{0,2\}$,

(j) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3\{1,2\}$,

(k) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&0&1 \\ 0&1&2&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3\{0,2\}$,

(l) $T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,2\,2\,0\,2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix}$,

(m) $T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,2\,1\,1 \\ 0\,1\,2\,2\,0\,0\,2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \end{pmatrix}$,

(n) $T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,2\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,2\,2\,0\,0\,1\,2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,2 \end{pmatrix}$,

(o) $T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,2\,1\,0\,2\,2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix}$.

Beweis: Obige Behauptungen kürzen wir im Beweis für $T \in \{T_{0,1;0;1;2}, T_{0,1;0,2;0;1;2}\}$ in der Form

$$\text{(x)} \qquad T \cap Pol_3 \varrho_{\rm x} \subseteq T \cap Pol_3 \varrho'_{\rm x}$$

ab (x $\in$ {a,b,c,...,o}).
(a) folgt aus (1) (Teil I) und $\varrho_{\rm a} \cap (E_2 \times E_3) = \varrho'_{\rm a}$.
(b) folgt aus $\varrho_{\rm b} \circ \varrho_{\rm b} = \varrho'_{\rm b}$.
(x) für x $\in$ {c,d,m} folgt aus $\tau(\varrho_x \cap E_2^2) = \varrho'_{\rm x}$.
(e) folgt aus $\varrho_{\rm e} \cap (\tau\varrho_{\rm e}) \cap (E_2 \times E_3) = \varrho'_{\rm e}$.
(f) folgt aus $(\tau\varrho_{\rm f}) \cap \varrho_{\rm f} = \varrho'_{\rm f}$.
(x) für x $\in$ {g,h} folgt aus $(\tau\varrho_{\rm x}) \circ \varrho_{\rm x} = \varrho'_{\rm x}$.
(x) für x $\in$ {i,k} folgt aus $pr_1(\{0\} \times E_3) \cap \varrho_{\rm x}) = \{0, 2\}$.
(j) folgt aus $pr_1(\{1\} \times \varrho_{\rm j}) = \{1, 2\}$.
(x) für x $\in$ {l,o} folgt aus $\varrho_{\rm x} \cap \{0, 2\}^2 = \varrho'_{\rm x}$.
(n) folgt aus $\varrho_{\rm n} \cap (\tau\varrho_{\rm n}) \cap (E_2 \times \{0, 2\}) = \varrho'_{\rm n}$. ■

Satz 6 *Sei* $\{a,b,c\} := E_3$. $T_{a,b;a;b;c} := I \cap Pol_3\{a,b\}$ *besitzt genau* 13 *maximale Klassen:*

(1) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$,

(2) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$,

(3) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,

(4) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$,

(5) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3\{a,c\}$,

(6) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3\{b,c\}$,

(7) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ a & b & c & b & a \end{pmatrix}$,

(8) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a & c & b & c \\ a & b & a & b & c & a & c & b \end{pmatrix}$,

(9) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}$,

(10) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & b \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}$,

(11) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & b & c & c \end{pmatrix}$,

(12) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} b & b & b & a \\ a & b & c & c \end{pmatrix}$,

(13) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & c & b & c & c \\ c & a & c & b & c \end{pmatrix}$.

Beweis: O.B.d.A. seien $a=0$, $b=1$ und $c=2$. Mit A bezeichnen wir in diesem Beweis eine Teilmenge von $T_{0,1;0;1;2}$, die keine Teilmenge der unter (1) bis (13) aufgezählten Teilklassen von $T_{0,1;0;1;2}$ ist. Dann gehören zu $[A]$ gewisse Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{13}$ mit der im Teil I vereinbarten Eigenschaft (*).
Wegen Lemma 5, (a)-(k) und den obigen Klassen (4) - (7), (9), (10) findet man in $[A]$ gewisse Funktionen $f_{14} - f_{24}$ mit

$$f_{14}\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&2 \\ 0&1&0&1&2&0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1&2&2 \\ 2&1&2 \end{pmatrix},\quad f_{15}\begin{pmatrix} 0&2&1&2 \\ 2&0&2&1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&0&1&1&2 \\ 0&1&0&1&2 \end{pmatrix},$$
$$f_{16}\begin{pmatrix} 0&1&2&1&0&1 \\ 0&1&2&0&2&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&2&2 \\ 1&0&1 \end{pmatrix},\quad f_{17}\begin{pmatrix} 0&1&2&1&2&1&0 \\ 0&1&2&2&1&0&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&2 \\ 1&0 \end{pmatrix},$$
$$f_{18}\begin{pmatrix} 0&1&2&0&1&1&2&0 \\ 0&1&2&1&0&2&1&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad f_{19}\begin{pmatrix} 0&1&2&0&1&0&1 \\ 0&1&2&1&0&2&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2&2 \\ 0&1 \end{pmatrix},$$
$$f_{20}\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 2&0&1 \end{pmatrix},\quad f_{21}\begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&2 \end{pmatrix},$$
$$f_{22}\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&2 \end{pmatrix},\quad f_{23}\begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&2 \end{pmatrix},$$
$$f_{24}\begin{pmatrix} 0&1&0&1 \\ 0&1&2&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&1 \\ 1&0 \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 2,(b) und Lemma 3 genügt es, für den Beweis von $[A] = T_{0,1;0;1;2}$ zu zeigen, daß A die Voraussetzungen (i) und (ii) von Lemma 3 erfüllt. Wir beginnen mit dem Beweis von

$$\begin{aligned}&\forall\{\alpha,\beta\}\in\{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\}:\\&\forall g^n\in P_{\{\alpha,\beta\}}\cap Pol_3\{\alpha\}\times\{\beta\}\ \exists G^n\in[A]:\ \forall \mathbf{x}\in\{\alpha,\beta\}^n:\ g(\mathbf{x})=G(\mathbf{x})\,.\end{aligned}\tag{6}$$

Für $\{\alpha,\beta\}=\{0,1\}$ folgt (6) unter Verwendung von $f_1, ..., f_4$ aus Lemma 2.3 (Teil I). Insbesondere gehört damit zu $[A]$ eine gewisse 3-stellige Funktion t mit der Eigenschaft

$$\forall x,y,z\in E_2:\ t(x,y,z):=x+y+z\ (\mathrm{mod}\,2)\,.$$

Als nächstes soll (6) für $\alpha=0$ und $\beta=2$ bewiesen werden. Um Lemma 2.3 (Teil I) anwenden zu können, weisen wir weiter unten Funktionen d^2, k^2 und r^3 in $[A]$ mit

$$d\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\ k\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ r\begin{pmatrix}0\ 2\ 0\\0\ 2\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\tag{7}$$

nach. Da d, k, r idempotent sind, gehören die Funktionen d, k und r' mit

$$\begin{aligned}&r'(x,y,z):=r(k(x,z),d(y,z),z)\,,\\&r'\begin{pmatrix}0\ 2\ 0\\0\ 2\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

zu $[A]\cap Pol_3\{0,2\}$, woraus sich nach Lemma 2.3 (Teil I) die Aussage (6) aus (7) ergibt. Ausgangspunkt des folgenden Nachweises von d,k,r in $[A]$ ist die Funktion f_5 mit $f_5(0,2)=1$, für die wir 3 Fälle unterscheiden:

Fall 1: $f_5(2,0)=0$.

In $[A]$ findet man eine Funktion h_1^2 mit $h_1\begin{pmatrix}0\ 1\\1\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, womit wir $k(x,y):=h_1(f_5(x,y),f_5(y,x))$ wählen können. Da für f_{14} die Beziehung $f_{14}\begin{pmatrix}0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 2\\0\ 1\ 0\ 1\ 2\ 0\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}1\ 2\ 2\\2\ 1\ 2\end{pmatrix}$ gilt, erhalten wir mit Hilfe von $h_2^2\in[A]$, $h_2\begin{pmatrix}0\ 1\\1\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ die Funktion

$$\begin{aligned}&f'_{14}(x,y):=\\&f_{14}(k(x,y),f_5(k(x,y),x),f_5(k(x,y),y),h_2(f_5(k(x,y),x),f_5(k(x,y),y)),x,y)\in[A]\,,\end{aligned}$$

die $f'_{14}\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}1\ 2\ 2\\2\ 1\ 2\end{pmatrix}$ erfüllt. Falls $f'_{14}\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}1\ 2\\2\ 1\end{pmatrix}$ ist, kann man in $[A]$ unter Verwendung der Funktion f_8 eine zweistellige Funktion f'_8 konstruieren, die die geforderte Eigenschaft von d besitzt. Also können wir o.B.d.A. $f'_{14}\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ und damit $d:=f'_{14}\in[A]$ annehmen.

Die noch fehlende nichtmonotone Funktion r erhält man wie folgt:
Wegen $f_{16}\begin{pmatrix} 0\,1\,2\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,2\,0\,2\,2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,2\,2 \\ 1\,0\,1 \end{pmatrix}$ gilt

$$f'_{16}(x,y,z) := f_{16}(x, f_5(x,z), z, f_6(f_5(x,z), f_5(y,z)), y, f_5(y,z)) \in [A]$$

mit $f'_{16}\begin{pmatrix} 0\,0\,2 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2\,0\,2 \\ 1\,1\,0 \end{pmatrix}$.
Da wir im Fall $f'_{16}\begin{pmatrix} 0\,0\,2 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $r := f'_{16}$ wählen können, haben wir noch 2 Fälle zu betrachten:

Fall 1.1: $f'_{16}\begin{pmatrix} 0\,0\,2 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wegen $f_{17}\begin{pmatrix} 0\,1\,2\,1\,2\,1\,0 \\ 0\,1\,2\,2\,1\,0\,2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,2 \\ 1\,0 \end{pmatrix}$ hat die Funktion

$$f'_{17}(x,y,z) := f_{17}(x, f_5(x,z), z, f_5(y,z), f'_{16}(x,y,z), f_6(f_5(x,z), f_5(y,z)), y)$$

die Eigenschaft $f'_{17}\begin{pmatrix} 0\,0\,2 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,2 \\ 1\,0 \end{pmatrix}$. Wir können also entweder $r := f'_{17}$ wählen, oder mit Hilfe der bereits konstruierten Funktionen sowie der Funktion f_{18} die Funktion

$$\begin{aligned}&f'_{18}(x,y,z) := \\ &f_{18}(x, f_5(x,z), z, f'_{17}(x,y,z), f_6(f_5(x,z), f_5(y,z)), f_5(y,z), f'_{16}(x,y,z), y) \in [A]\end{aligned}$$

bilden, die die gewünschte Eigenschaft von r hat.

Fall 1.2: $f'_{16}\begin{pmatrix} 0\,0\,2 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mittels f_{19} läßt sich dieser Fall auf den Fall 1.1 wie folgt zurückführen:

$$f'_{19}(x,y,z) := f_{19}(x, f_5(x,z), z, f'_{16}(x,y,z), f_6(f_5(x,z), f_5(y,z)), y, f_5(y,z))$$

$$f'_{19}\begin{pmatrix} 0\,0\,2 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2\,2 \\ 0\,1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist (7) bewiesen und (nach dem eingangs Bemerkten) (6) für $\{\alpha, \beta\} = \{0, 2\}$ im Fall 1 gezeigt.

Fall 2: $f_5(2,0) = 1$.

Die Funktion $f'_6(x,y) := f_6(f_5(x,y), y)$ hat die Eigenschaft $f'_6\begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}$. Falls

$f_6'\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ist, können wir wie im Fall 1 weiter verfahren. Ist $f_6'\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, kann man die Funktion $f_5'(x,y) := f_5(f_6'(x,y),y)$ bilden, für die $f_5'\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, womit auch dieser Fall auf den Fall 1 zurückführbar ist.

Fall 3: $f_5(2,0) = 2$.

Bildet man $f_{15}'(x,y) := f_{15}(x,y,f_5(x,y),f_5(y,x))$, so gilt $f_{15}'\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\,0\,1\,1\,2\\0\,1\,0\,1\,2\end{pmatrix}$, womit wir entweder weiter wie unter Fall 1 oder 2 verfahren können, oder $f_{15}'\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ haben. Mit einer solchen Funktion f_{15}' können wir jedoch die Superposition $f_{13}'(x,y) := f_{13}(x,y,f_5(x,y),f_5(y,x),f_{15}'(x,y)) \in [A]$ bilden, die die Eigenschaft $f_{13}'\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\,0\,1\,1\\0\,1\,0\,1\end{pmatrix}$ besitzt, womit der Fall 3 auf den Fall 1 oder 2 zurückführbar ist.

Folglich ist (7) bewiesen und damit auch (6) im Fall $\{\alpha,\beta\} = \{0,2\}$ gezeigt.
Analog beweist man (6) für $\{\alpha,\beta\} = \{1,2\}$, womit die Bedingung (i) aus Lemma 3 von $[A]$ erfüllt wird.
Daß auch (ii) aus Lemma 3 für $[A]$ gilt, soll als nächstes gezeigt werden. Wir beginnen mit dem Beweis von

$$\begin{array}{l}\forall(\alpha,\beta) \in E_2 \times E_3 :\ \exists G_{\alpha,\beta} \in [A] :\\ G_{\alpha,\beta}(0,1) = G_{\alpha,\beta}(1,0) = \alpha \quad \wedge \quad G_{\alpha,\beta}(0,2) = G_{\alpha,\beta}(2,0) = \beta\,.\end{array} \tag{8}$$

Nach (6) und Lemma 4 gehören für gewisse $a,b \in E_3$, $c,d,e \in E_2$ zu $[A]$ Funktionen der Art

$$G_{0,a},\ G_{1,b},\ G_{c,0},\ G_{e,2},\ G_{d,1},\ (\ G_{d,1}(x,y) := f_5(G_{c,0}(x,y),G_{e,2}(x,y))\ )\,.$$

Für (c,d) sind folgende 4 Fälle möglich:

Fall 1: $(c,d) = (0,0)$.

1.1: Falls $b \in \{0,1\}$, können wir mit Hilfe einer Funktion $h_3^3 \in [A]$, die $h_3\begin{pmatrix}0\,0\,1\\0\,1\,b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\overline{b}\end{pmatrix}$ ($\{b,\overline{b}\} = E_2$) erfüllt, die Superposition $h_4(x,y) := h_3(G_{0,0}(x,y),G_{0,1}(x,y),G_{1,b}(x,y))$ bilden und $G_{1,\overline{b}} := h_4$ wählen, womit (8) für $(\alpha,\beta) \in E_2^2$ im Fall 1.1 gezeigt ist. Da auch $G_{e,2} \in [A]$ für ein gewisses $e \in E_2$ ist, folgt aus

$$\begin{array}{l}G_{1,2}(x,y) = f_9(G_{0,0}(x,y),G_{0,1}(x,y),G_{1,0}(x,y),G_{1,1}(x,y),G_{0,2}(x,y))\,,\\ G_{0,2}(x,y) = f_{10}(G_{0,0}(x,y),G_{0,1}(x,y),G_{1,0}(x,y),G_{1,1}(x,y),G_{1.2}(x,y))\end{array}$$

die Gültigkeit von (8) im Fall 1.1.

1.2 Der Fall $b = 2$ kann mit Hilfe der Funktionen f_{20} und f_{11} auf den Fall 1.1 wie folgt zurückgeführt werden:
Mit der Superpositionsbildung $f'_{20}(x,y) := f_{20}(G_{0,0}(x,y), G_{0,1}(x,y), G_{1,2}(x,y))$ können wir eine Funktion der Art $G_{0,2}$, $G_{1,0}$ oder $G_{1,1}$ erhalten. Falls $f'_{20} \in \{G_{1,0}, G_{1,1}\}$, kann wie im Fall 1.1 weiter verfahren werden. Ist $f'_{20} = G_{0,2}$, erhält man durch Bildung von $f'_{11}(x,y) := f_{11}(G_{0,0}(x,y), G_{0,1}(x,y), G_{0,0}(x,y), G_{1,2}(x,y))$ eine Funktion der Art $G_{1,0}$ oder $G_{1,1}$.

Fall 2: $(c,d) = (1,1)$.
Dieser Fall läßt sich analog zu Fall 1 behandeln, indem man für die Funktion $G_{0,a}$ die Fälle 2.1: $a \in E_2$ und 2.2: $a = 2$ unterscheidet und die Funktionen f_9, f_{10}, f_{21} und f_{12} benutzt.

Fall 3: $(c,d) = (0,1)$.
Wegen $f_{22}(G_{0,0}, G_{1,1}, G_{0,2}) \in \{G_{0,1}, G_{1,0}, G_{1,2}\}$, $f_{23}(G_{0,0}, G_{1,1}, G_{1,2}) \in \{G_{0,1}, G_{1,0}, G_{0,2}\}$ und $f_{24}(G_{0,0}, G_{1,1}, G_{0,2}, G_{1,2}) \in \{G_{0,1}, G_{1,0}\}$, ist dieser Fall auf Fall 1 oder 2 zurückführbar.

Fall 4: $(c,d) = (1,0)$.
Mit Hilfe von Funktionen aus $A \cap Pol_3\{0,1\}$ ist dieser Fall ebenfalls auf einen der vorher betrachteten zurückführbar.

Damit ist (8) bewiesen.

Analog beweist man

$$\begin{aligned}&\forall(\alpha,\beta) \in E_2 \times E_3 :\ \exists H_{\alpha,\beta} \in [A] :\\ &H_{\alpha,\beta}(0,1) = H_{\alpha,\beta}(1,0) = \alpha \quad \wedge \quad H_{\alpha,\beta}(1,2) = H_{\alpha,\beta}(2,1) = \beta\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Wie im Beweis von Lemma 4 gezeigt wurde, folgt aus (8) und (9)

$$\begin{aligned}&\forall(\alpha,\beta) \in E_2 \times E_3 :\ \exists \gamma,\delta \in E_3 :\\ &g_{\alpha,\beta,\gamma},\ g_{\alpha,\delta,\beta} \in [A]\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Speziell gehören zu $[A]$ damit auch die Funktionen $g_1 := g_{0,0,\gamma_1}$, $g_2 := g_{0,2,\gamma_2}$, $g_3 := g_{1,0,\gamma_3}$, und $g_4 := g_{1,2,\gamma_4}$ für gewisse $\gamma_1, ..., \gamma_4 \in E_3$. Es genügt, $\gamma_1 = 0$ zu betrachten, da man in den Fällen $\gamma_1 \in \{1,2\}$ die Funktion $g_{0,0,0}$ wie folgt erhalten kann:

$$\begin{aligned}g_{0,0,0}(x,y) &= g_{0,0,1}(f_6(g_{0,0,1}(x,y),y), f_6(g_{0,0,1}(x,y),x))\,,\\ g_{0,0,0}(x,y) &= g_{0,0,2}(f_6(x,g_{0,0,2}(x,y)), f_6(y,g_{0,0,2}(x,y))\,.\end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen ist es jetzt nicht schwer die Funktionen der Art $s_{a,b}$ aus der Bedingung (ii) von Lemma 4 zu konstruieren:
Es gilt $s_{1,0}(x,y) = g_2(g_2(g_1(x,y),y), g_2(g_1(x,y),x)) \in [A]$ sowie
$s_{2,0}(x,y) = g_3(g_3(g_1(x,y),y), g_3(g_1(x,y),x) \in [A]$. Zwecks Nachweis von $s_{1,2}$ in $[A]$ betrachten wir nochmals f_{22}, für die wir o.B.d.A. $f_{22}\begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,1\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ annehmen können. (Falls

$f_{22}\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so erhält man durch Bildung von $f'_{22}(x,y,z) :=$ $t(x,y,f_{22}(x,y,z))$ eine Funktion, für die $f'_{22}\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt. Ist $f_{22}\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, so läßt sich dieser Fall auf die vorher betrachteten durch Bildung der Funktion $f'_{22}(x,y,z) :=$ $f_6(y, f_{22}(x,y,z))$ zurückführen.)

Es gilt dann $f_{22}(g_1(x,y), s_{2,0}(x,y), s_{1,0}(x,y)) \in \{s_{2,1}, g_{0,1,1}, g_{0,2,1}\}$, $s_{2,1}(x,y) = g_1(s_{2,0}(x,y), g_{0,1,1}(x,y))$ und $s_{2,1}(x,y) = g_3(g_1(x,y), g_{0,2,1}(x,y))$. Also gehört auch $s_{2,1}$ zu $[A]$ und wir können mit Hilfe dieser Funktion auch $g_{1,1,1}(x,y) = g_3(f_5(g_1(x,y), s_{1,0}(x,y)), s_{2,0}(x,y)) \in [A]$ und $s_{0,1}(x,y) = H_{1,2}(g_{1,1,1}(x,y), s_{1,0}(x,y)) \in [A]$ zeigen. Zum Beweis von $s_{0,2}, s_{1,2} \in [A]$ benötigen wir noch Funktionen q_a ($a \in E_2$) mit der Eigenschaft $q_a\begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$, die sich wie folgt in $[A]$ nachweisen lassen:

O.B.d.A. können wir für die Funktion f_7 die Eigenschaft $f_7\begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,1 \\ 0\,1\,2\,1\,0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 2\,2 \end{pmatrix}$ annehmen. Bildet man mit Hilfe der bereits in $[A]$ nachgewiesenen Funktionen die Funktion $f'_7(x,y,z) := f_7(x, g_{1,1,1}(x,z), y, z, t(x,y,z))$, so hat diese Funktion entweder die gewünschte Eigenschaft von q_0 und man erhält q_1 durch Bildung von $q_1(x,y) := f_5(f'_7(x,y,z), y)$, oder wir können $q_1 := f'_7$ und $q_0(x,y,z) := f_6(f'_7(x,y,z), y)$ wählen. Folglich gehören zu $[A]$ auch die Funktionen

$$g_{1,0,0}(x,y) = t(g_{0,0,0}(x,y), s_{2,0}(x,y), s_{2,1}(x,y))\,,$$

$$g_{1,1,0}(x,y) = t(g_{0,0,0}(x,y), s_{2,0}(x,y), f_5(g_{0,0,0}(x,y), s_{1,0}(x,y))\,,$$

$$s_{0,2}(x,y) = q_1(g_{1,0,0}(x,y), s_{0,1}(x,y), g_{1,1,0}(x,y))\,,$$

$$s_{1,2}(x,y) = q_0(g_{0,0,0}(x,y), s_{1,0}(x,y), s_{2,1}(x,y))\,.$$

Damit erfüllt $[A]$ auch die Bedingung (ii) von Lemma 3 und es gilt (unter Verwendung von Lemma 2,(b)) $[A] = T_{0,1;0;1;2}$.

Die paarweise Unvergleichbarkeit (bezüglich Inklusion) der Klassen (7) - (13) ist der Tabelle 1 zu entnehmen, deren idempotente Funktionen in Tabelle 2 definiert sind. Die paarweise Unvergleichbarkeit dieser Klassen mit denen unter (1) - (6) angegebenen und die Unvergleichbarkeit dieser Klassen untereinander prüft man leicht nach.

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}
(7)	−	−	+	+	−	+	+	−	−	−
(8)	−	−	+	+	+	−	−	−	−	−
(9)	+	−	+	+	−	−	+	−	−	+
(10)	−	+	+	+	−	+	−	−	+	−
(11)	+	−	+	−	−	+	+	+	−	+
(12)	−	+	−	+	−	+	+	+	+	−
(13)	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+

Tabelle 1

x	y	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0
0	2	0	1	0	1	0	2	2	1	2	0
2	0	0	1	0	1	1	2	2	2	2	2
1	2	2	2	0	1	2	2	2	2	1	2
2	1	2	2	0	1	1	2	2	2	2	2

Tabelle 2

■

Satz 7 *Sei* $\{a,b,c\} := E_3$. $T_{a,b;a,c;0;1;2} := Pol_3\{a,b\} \cap Pol_3\{a,c\} \cap I$ *besitzt genau* 17 *maximale Klassen:*

(1) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$,

(2) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$,

(3) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,

(4) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$,

(5) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & c \\ c & a \end{pmatrix}$,

(6) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & c \\ a & c & a \end{pmatrix}$,

(7) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} c & a & c \\ c & c & a \end{pmatrix}$,

(8) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & c \\ a & c & c \end{pmatrix}$,

(9) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3\{b,c\}$,

(10) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$,

(11) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} b & a \\ a & c \end{pmatrix}$,

(12) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & c \end{pmatrix}$,

(13) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & a & c \end{pmatrix}$,

(14) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & c & c \end{pmatrix}$,

(15) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & b \\ c & a & c \end{pmatrix}$,

(16) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$,

(17) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & c & a \\ a & c & b \end{pmatrix}$.

Beweis: O.B.d.A. seien $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$. Mit A bezeichnen wir in diesem Beweis eine Teilmenge von $T_{0,1;0,2;0;1;2}$, die keine Teilmenge der unter (1) bis (17) aufgezählten Teilklassen von $T_{0,1;0;1;2}$ ist. Dann gehören zu $[A]$ gewisse Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{17}$ mit der im Teil I vereinbarten Eigenschaft (*).
Wegen Lemma 5, (l)-(o) und den obigen Klassen (4), (8) und (12) findet man in $[A]$ gewisse

Funktionen $f_{18} - f_{21}$ mit

$$f_{18}\begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,2\,2\,0\,2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2\,0\,2 \\ 0\,1\,1 \end{pmatrix},\ f_{19}\begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,2\,1\,1 \\ 0\,1\,2\,2\,0\,0\,2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,2 \\ 1\,1 \end{pmatrix},$$
$$f_{20}\begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,2\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,2\,2\,0\,0\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_{21}\begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,2\,1\,0\,2\,2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2\,2 \\ 0\,1 \end{pmatrix}.$$

Wegen Lemma 2,(a), der Funktion f_9 und Lemma 3 genügt es, für den Beweis von $[A] = T_{0,1;0,2;0;1;2}$ zu zeigen, daß A die Voraussetzungen (i) und (ii) von Lemma 3 erfüllt. Wegen Lemma 2.3 (Teil I) und obigen Klassen (1) – (8) haben wir

$$\begin{array}{l} \forall\{\alpha,\beta\} \in \{\{0,1\},\{0,2\}\}: \\ \forall g^n \in P_{\{\alpha,\beta\}} \cap Pol_3\{\alpha\} \times \{\beta\}\ \exists G^n \in [A]:\ \forall \mathbf{x} \in \{\alpha,\beta\}^n:\ g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})\,. \end{array} \tag{11}$$

Wir überlegen uns als erstes, daß (11) auch für $\{a,b\} = \{1,2\}$ gilt. Um Lemma 2.3 (Teil I) anwenden zu können, weisen wir weiter unten Funktionen d^2, k^2 und r^3 in $[A]$ mit

$$d\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ k\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r\begin{pmatrix} 1\,2\,1 \\ 1\,2\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

nach. Da d, k, r idempotent sind, gehören die Funktionen d, k sowie r' mit $r'(x,y,z) := r(k(x,z), d(y,z), z))$ und $r'\begin{pmatrix} 1\,2\,1 \\ 1\,2\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $[A] \cap Pol_3\{1,2\}$, woraus sich nach Lemma 2.3 (Teil I) die Aussage (11) für $\{a,b\} = \{1,2\}$ aus (12) ergibt.

Für die Funktion f_9 haben wir $f_9\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix}$. Falls $f_9\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \{1,2\})$ ist, erhält man mit Hilfe einer Funktion $h_1^2 \in [A]$, die $h_1\begin{pmatrix} 0\ \alpha \\ \alpha\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt, eine Funktion $f_9'(x,y) := h_1(f_9(x,y), f_9(y,x)) \in [A]$ mit $f_9'\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also können wir o.B.d.A. $f_9'\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ annehmen.

Die Funktion $f_{10}'(x,y) := f_{10}(f_9(x,y),x)$ hat die Eigenschaft $f_{10}'\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 2\,0 \end{pmatrix}$. Ist $f_{10}'\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, so erhält man die gesuchten Funktionen d und k wie folgt als Superpositionen über A: $d(x,y) := h_2(f_{10}'(x,y), f_{10}'(y,x))$ ($h_2 \in [A]$, $h_2\begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$), $f_{14}'(x,y) := f_{14}(f_9(x,y), f_{10}'(x,y), x)$, $k(x,y) := h_3(f_{14}'(x,y), f_{14}'(y,x))$ ($h_3 \in [A]$, $h_3\begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$). Gilt $f'_{10}\begin{pmatrix} 1\ 2 \\ 2\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so erhalten wir k und d analog:
$k(x,y) := h_3(f'_{10}(x,y), f'_{10}(y,x))$, $f'_{13}(x,y) := f_{13}(f_9(x,y), f'_{10}(x,y), x)$,
$d(x,y) := h_2(f'_{13}(x,y), f'_{13}(y,x))$.
Eine nichtmonotone Funktion r läßt sich wie folgt in $[A]$ nachweisen: Die Funktion
$f'_{18}(x,y,z) := f_{18}(f_9(x,y), x, y, f_9(y,z), f_9(x,z), z)$ hat die Eigenschaft
$f'_{18}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2\ 0\ 2 \\ 0\ 1\ 1 \end{pmatrix}$. Also kann man $r := f'_{18}$ wählen, oder es gilt $f'_{18}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2\ 0 \\ 0\ 1 \end{pmatrix}$. Ist $f'_{18}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, so erhält man durch
$f'_{19}(x,y,z) := f_{19}(f_9(x,y), x, y, f_9(y,z), f'_{17}(x,y,z), f_9(x,z), z)$ eine Funktion mit
$f'_{19}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\ 2 \\ 1\ 1 \end{pmatrix}$.

Falls $f'_{19}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist, kann man
$r(x,y,z) := f_{20}(f_9(x,y), x, y, f_9(y,z), f'_{17}(x,y,z), f_9(x,z), f_{19}(x,y,z), z)$ wählen. Ansonsten sei $r := f'_{19}$.
Im Fall $f'_{18}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ läßt sich unter Verwendung von f_{21} und f_{20} auf analoge Weise eine Funktion r konstruieren.

Damit ist (12) gezeigt, womit $[A]$ die Bedingung (i) aus Lemma 3 erfüllt.

Daß auch (ii) aus Lemma 3 von $[A]$ erfüllt wird, soll als nächstes gezeigt werden. Wir beginnen mit dem Beweis von

$$\begin{array}{l} \forall(\alpha,\beta) \in E_2 \times \{0,2\}\ \exists G_{\alpha,\beta} \in [A]: \\ G_{\alpha,\beta}(0,1) = G_{\alpha,\beta}(1,0) = \alpha\ \wedge\ G_{\alpha,\beta}(0,2) = G_{\alpha,\beta}(2,0) = \beta. \end{array} \tag{13}$$

Wegen Lemma 4 haben wir für gewisse $p,q \in \{0,2\}$, $r,s \in \{0,1\}$: $G_{0,p}, G_{1,q}, G_{r,0}, G_{s,2} \in [A]$.
Wir betrachten die Relation $\varrho := \begin{pmatrix} 0\ 1\ r\ s \\ p\ q\ 0\ 2 \end{pmatrix}$. Durchmustern der möglichen Fälle liefert:

$$\varrho \in \left\{ \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ 0\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\ 0 \\ 0\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\ 0\ 1 \\ 0\ 2\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\ 1\ 1 \\ 2\ 0\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 2\ 0\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Falls $\varrho = \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ 0\ 2 \end{pmatrix}$ ist, erhalten wir durch $f'_{10}(x,y) := f_{10}(G_{0,0}(x,y), G_{1,2}(x,y))$ ($\in [A]$) eine Funktion mit der Eigenschaft $f'_{10} \in \{G_{0,2}, G_{1,0}\}$. Wegen
$G_{1,0}(x,y) = f_{14}(G_{0,0}(x,y), G_{0,2}(x,y), G_{1,2}(x,y))$ und

$G_{0,2}(x,y) = f_{12}(G_{0,0}(x,y), G_{1,0}(x,y), G_{1,2}(x,y))$ gilt (13) für $\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Die anderen noch zu untersuchenden 6 Fälle für ϱ lassen sich unter Verwendung der Funktionen $f_{11}, f_{12}, ..., f_{17}$ analog behandeln. Also gilt (13).

Aus (13) ergibt sich dann, daß die Funktionen $g_1 := g_{0,0,\gamma_1}$, $g_2 := g_{0,2,\gamma_2}$, $g_3 := g_{1,0,\gamma_3}$ und $g_4 := g_{1,2,\gamma_4}$ für gewisse $\gamma_1, ..., \gamma_4 \in E_3$ zu $[A]$ gehören (siehe Beweis von Lemma 4). Wie im Beweis von Satz 6 kann man sich überlegen, daß es genügt, $\gamma_1 = 0$ zu betrachten. Mit Hilfe der Funktionen $g_1(= g_{0,0,0})$, g_2, g_3, g_4 läßt sich dann zunächst
$s_{1,0}(x,y) = g_2(g_2(g_1(x,y),y), g_2(g_1(x,y),x)) \in [A]$ sowie
$s_{2,0}(x,y) = g_3(g_3(g_1(x,y),y), g_3(g_1(x,y),x) \in [A]$ zeigen. Zwecks Nachweis von $s_{2,1}$ in $[A]$ betrachten wir die Funktion f_{16}, für die $f_{16}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ gilt. Falls $f_{16}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, erhält man durch Bildung von $f'_{16}(x,y,z) := h_4(x,y,f_{16}(x,y,z))$ (mit $h_4 \in [A]$ und $h_4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) eine Funktion, für die $f'_{16}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt. Ist $f_{16}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, so läßt sich dieser Fall auf die vorher betrachteten durch Bildung der Funktion $f''_{16}(x,y,z) := f_9(y, f_{16}(x,y,z))$ zurückführen. Also genügt es, nur den Fall $f_{16}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu betrachten. Es gilt dann $f_{16}(g_1(x,y), s_{2,0}(x,y), s_{1,0}(x,y)) \in \{s_{2,1}, g_{0,2,1}\}$ und $s_{2,1}(x,y) = g_3(g_1(x,y), g_{0,2,1}(x,y))$. Also gehört auch $s_{2,1}$ zu $[A]$.
Die Funktion f_{17} hat die Eigenschaft $f_{17}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Falls $f_{17}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, erhält man durch Bildung von $f'_{17}(x,y,z) := h_5(x,y,f_{17}(x,y,z))$ mit $h_5 \in [A]$, $h_5\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Funktion, für die $f'_{17}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt. Ist $f_{17}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, so läßt sich dieser Fall auf die vorher betrachteten durch Bildung der Funktion

$f''_{17}(x,y,z) := f_9(f_{17}(x,y,z),y)$ zurückführen. Also genügt es, nur den Fall $f_{17}\begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu betrachten. Damit gilt $s_{1,2}(x,y) = f_{17}(g_1(x,y), s_{1,0}(x,y), s_{2,1}(x,y)) \in [A]$. Falls in g_4 $d = 0$ ist, erhält man $s_{0,1}$ und $s_{0,2}$ wie folgt: $s_{0,1}(x,y) = g_4(g_4(x,y), s_{1,0}(x,y))$, $s_{0,2}(x,y) = g_4(g_4(x,y), s_{2,0}(x,y))$. Im Fall $d = 1$ haben wir $g_4 = s_{0,2}$ und wir erhalten $s_{0,1}$ durch $s_{0,1}(x,y) = g_4(h_6(g_1(x,y), s_{2,0}(x,y), s_{2,1}(x,y)), s_{1,2}(x,y)) \in [A]$, wobei $h_6 \in [A]$ mit $h_6\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ist $d = 2$, so haben wir $g_4 = s_{0,1}$ und wir erhalten $s_{0,2}$ durch

$s_{0,2}(x,y) = g_4(h_7(g_1(x,y), s_{1,0}(x,y), s_{1,2}(x,y)), s_{2,0}(x,y)) \in [A]$, wobei $h_7 \in [A]$ mit

$h_7\begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit erfüllt $[A]$ auch die Bedingung (ii) von Lemma 3 und es gilt (unter Verwendung von Lemma 2,(a)) $[A] = T_{0,1;0,2;0;1;2}$.

Die paarweise Unvergleichbarkeit (bezüglich Inklusion) der Klassen (10) - (17) ist der Tabelle 3 zu entnehmen, deren Funktionen in Tabelle 4 definiert sind. Die paarweise Unvergleichbarkeit dieser Klassen mit denen unter (1) - (9) angegebenen und die Unvergleichbarkeit dieser Klassen untereinander prüft man leicht nach.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
(10)	+	+	−	−	−	−	+	+	+
(11)	−	−	+	+	+	+	−	−	+
(12)	+	+	+	+	+	+	−	−	−
(13)	+	+	−	−	+	+	+	+	−
(14)	+	+	+	+	−	−	+	+	−
(15)	−	−	+	+	+	+	+	+	−
(16)	−	+	−	+	+	−	+	−	−
(17)	+	−	−	+	+	−	−	+	−

Tabelle 3

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	2	0	0	2	2	0	0	2	2
2	0	0	0	2	2	0	0	2	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	1	2	1	2	1	2	1	2

Tabelle 4

■

Satz 8 *$T := Pol_3\{0,1\} \cap Pol_3\{0,2\} \cap Pol_3\{1,2\}$ besitzt genau 30 maximale Klassen:*

$$\begin{array}{lll}
(1)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}, & (2)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix}, & (3)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix},\\
(4)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}0\,0\,1\\0\,1\,1\end{pmatrix}, & (5)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}0\,0\,2\\0\,2\,2\end{pmatrix}, & (6)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}1\,1\,2\\1\,2\,2\end{pmatrix},\\
(7)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,0\,1\end{pmatrix}, & (8)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}0\,2\,0\\0\,0\,2\end{pmatrix}, & (9)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}1\,2\,1\\1\,1\,2\end{pmatrix},\\
(10)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}1\,0\,1\\1\,1\,0\end{pmatrix}, & (11)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}2\,0\,2\\2\,2\,0\end{pmatrix}, & (12)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}2\,1\,2\\2\,2\,1\end{pmatrix},\\
(13)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}0\,1\\0\,2\end{pmatrix}, & (14)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}1\,2\\1\,0\end{pmatrix}, & (15)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}2\,0\\2\,1\end{pmatrix},\\
(16)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}1\,0\\0\,2\end{pmatrix}, & (17)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}1\,0\\2\,1\end{pmatrix}, & (18)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}2\,1\\0\,2\end{pmatrix},\\
(19)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,0\,2\end{pmatrix}, & (20)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}1\,2\,1\\1\,1\,0\end{pmatrix}, & (21)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}2\,0\,2\\2\,2\,1\end{pmatrix},\\
(22)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}0\,1\,1\\0\,0\,2\end{pmatrix}, & (23)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}1\,2\,2\\1\,1\,0\end{pmatrix}, & (24)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}2\,0\,0\\2\,2\,1\end{pmatrix},\\
(25)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}0\,0\,1\\0\,2\,2\end{pmatrix}, & (26)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}1\,1\,2\\1\,0\,0\end{pmatrix}, & (27)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}2\,2\,0\\2\,1\,1\end{pmatrix},\\
(28)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}0\,1\,1\\2\,0\,2\end{pmatrix}, & (29)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}1\,2\,2\\0\,1\,0\end{pmatrix}, & (30)\ T \cap Pol\begin{pmatrix}2\,0\,0\\1\,2\,1\end{pmatrix}.
\end{array}$$

Beweis: Mit A bezeichnen wir in diesem Beweis eine Teilmenge von T, die keine Teilmenge der unter (1) bis (30) aufgezählten Teilklassen von T ist. Dann gehören zu $[A]$ gewisse Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{30}$ mit der im Teil I vereinbarten Eigenschaft (*).
Zum Beweis von $[A] = T$ zeigen wir, daß A die Voraussetzungen (i) und (ii) von Lemma 3 erfüllt.
Wegen $f_1, ..., f_{12} \in [A]$ und Lemma 2.3 (Teil I) gilt offenbar (i).
Analog zu den Überlegungen im Beweis von Satz 7 (unter Verwendung der Funktionen $f_{13}, f_{16}, f_{19}, f_{22}, f_{25}, f_{28}$) zeigt man:

$$\forall (a,b) \in \{0,1\} \times \{0,2\}\ \exists \gamma \in \{1,2\} :\ g_{a,b,\gamma} \in [A] \tag{14}$$

bzw. (unter Verwendung der Funktionen f_i mit $i \in \{14, 15, ..., 30\} \backslash \{15, 16, 19, 22, 25, 28\}$)

$$\begin{array}{l}\forall (a,c) \in \{0,1\} \times \{1,2\}\ \exists \beta \in \{0,2\} :\ g_{a,\beta,c} \in [A]\,,\\ \forall (b,c) \in \{0,2\} \times \{1,2\}\ \exists \alpha \in \{0,1\} :\ g_{\alpha,b,c} \in [A]\,.\end{array} \tag{15}$$

Als nächstes soll

$$\forall (a,b) \in \{0,1\} \times \{0,2\} :\ g_{a,b,2} \in [A] \tag{16}$$

gezeigt werden.
Sei $(a,b) \in \{0,1\} \times \{0,2\}$ beliebig gewählt. Wegen (13) und (14) haben wir dann für gewisse u, v, w mit $u, w \in \{1,2\}$, $v \in \{0,2\}$: $g_{a,b,u}$, $g_{a,v,2}$, $g_{a,2,w} \in [A]$. Für das b in (15) sind 2 Fälle möglich:

Fall 1: $b = 0$.
Bis auf $(u, v, w) \in \{(1, 2, 1), (1, 2, 2)\}$ gilt in diesem Fall $g_{a,b,2} \in \{g_{a,b,u}, g_{a,v,2}, g_{a,2,w}\}$.
1.1: Im Fall $(u, v, w) = (1, 2, 1)$ (d.h., $\{g_{a,b,u}, g_{a,v,2}, g_{a,2,w}\} = \{g_{a,0,1}, g_{a,2,2}, g_{a,2,1}\}$) haben wir $g_{a,0,2} = f_{27}(g_{a,2,2}, g_{a,2,1}, g_{a,0,1})$.

1.2: Falls $(u, v, w) = (1, 2, 2)$ (d.h., $\{g_{a,b,u}, g_{a,v,2}, g_{a,2,w}\} = \{g_{a,0,1}, g_{a,2,2}\}$), ist $f_{15}(g_{a,2,2}, g_{a,0,1}) \in \{g_{a,0,2}, g_{a,2,1}\}$, womit wir wie unter 1.1 weiter verfahren können.

Fall 2: $b = 2$.
Bis auf die Möglichkeit $(u, v, w) = (1, 0, 1)$ (d.h., $\{g_{a,b,u}, g_{a,v,2}, g_{a,2,w}\} = \{g_{a,2,1}, g_{a,0,2}\}$) haben wir in diesem Fall $g_{a,b,2} \in \{g_{a,b,u}, g_{a,v,2}, g_{a,2,w}\}$. Da aber $f_{18}(g_{a,0,2}, g_{a,2,1}) \in \{g_{a,2,2}, g_{a,0,1}\}$ und $f_{30}(g_{a,2,1}, g_{a,0,2}, g_{a,0,1}) = g_{a,2,2}$ gilt, ist auch im Fall 2 $g_{a,b,2}$ eine Superposition über A.
Indem man anstelle von b und $\{0, 2\}$ obige Überlegungen mit a und $\{0, 1\}$ durchführt, kann man

$$\forall (a, b) \in \{0, 1\} \times \{0, 2\} : \ g_{a,b,1} \in [A] \tag{17}$$

beweisen. Aus (15) und (16) ergibt sich dann unmittelbar, daß A die Voraussetzung (ii) von Lemma 3 erfüllt. Also gilt nach Lemma 3: $[A] = T$.
Die paarweise Unvergleichbarkeit (bez. Inklusion) der Klassen (13), (16), (19), (22), (25), (28) ist der Tabelle 5 zu entnehmen, deren idempotente Funktionen $t_1, ..., t_4$ in der Tabelle 6 angegeben sind. Die Funktion t_5 ist definiert durch

$$t_5(x, y, z) := \begin{cases} x + y + z \pmod 2 \text{ für} & (x, y, z) \in \{0, 1\}^3, \\ x + y + z \pmod 4 \text{ für} & (x, y, z) \in \{0, 2\}^3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die paarweise Unvergleichbarkeit sämtlicher im Satz genannten Klassen beweist man analog oder prüft man leicht nach.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
(13)	+	−	−	+	+
(16)	−	+	+	−	+
(19)	+	+	+	−	−
(22)	+	−	+	+	−
(25)	+	+	−	+	−
(28)	−	+	+	+	−

Tabelle 5

x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	2	0	2	0	2
2	0	0	2	0	2
1	2	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1

Tabelle 6

■

Literatur

[1] **Lau, D. :** *Die maximalen Klassen von $\bigcap_{a \in Q} Pol_k\{a\}$ für $Q \subseteq E_k$ (Ein Kriterium für endliche semi-primale Algebren mit nur trivialen Unteralgebren).* Rostock Math. Kolloq. **48**, 27-46 (1995)

[2] **Lau, D. :** *Die maximalen Klassen von $\bigcap_{\varrho \in Q} Pol_3 \varrho$ für $Q \subseteq \mathfrak{P}(\{0, 1, 2\})$, Teil I, II.* Rostock. Math. Kolloq. **51**, 111-126 (1997), **52**, 85-105 (1999)

[3] **Quackenbush, R.W. :** *On the composition of idempotent functions.* Algebra Universalis **1**, 7-12 (1971)

[4] **Szendrei, Á. :** *Idempotent algebras with restrictions on subalgebras.* Acta Sci. Math. (Szeged) **51**, 251-268 (1987)

[5] **Szendrei, Á. :** *A classification of strictly simple algebras with trivial subalgebras.* Demonstratio Math. **24**, 149-173 (1991)

eingegangen: 10. August 1997 **revidierte Fassung:** 29. Juni 1999

Autor:

Dietlinde Lau
Fachbereich Mathematik
Universität Rostock
D-18051 Rostock
Germany

e-mail: dietlinde.lau@mathematik.uni-rostock.de

Rostock. Math. Kolloq. **53**, 23–49 (1999)

Subject Classification (AMS)
20E15, 20D30

Roland Schmidt

Supermodulare Untergruppen von Gruppen

Nach [9] heißt das Element M des Verbandes $\mathcal{V}$ *supermodular* in $\mathcal{V}$ (kurz M sm $\mathcal{V}$), wenn für alle $B, C, D \in \mathcal{V}$ die folgende Identität erfüllt ist:

$$(M \cup B) \cap (M \cup C) \cap (M \cup D) = \\ M \cup (B \cap C \cap (M \cup D)) \cup (C \cap D \cap (M \cup B)) \cup (B \cap D \cap (M \cup C)); \tag{S}$$

M heißt *vereinigungsdistributiv* (kurz: $\cup$-distributiv) in $\mathcal{V}$, wenn für alle $B, C \in \mathcal{V}$ das distributive Gesetz

$$M \cup (B \cap C) = (M \cup B) \cap (M \cup C) \tag{D}$$

gilt. Wie man sofort sieht, ist jedes $\cup$-distributive Element eines Verbandes supermodular, aber die Umkehrung gilt nicht. Die $\cup$-distributiven Untergruppen einer Gruppe G, d.h. die $\cup$-distributiven Elemente ihres Untergruppenverbandes $L(G)$, sind seit langem gut bekannt: sie sind für Torsionsgruppen unabhängig voneinander von Higman [1] und Zappa [10] charakterisiert worden, für beliebige Gruppen von Sato [6]; siehe auch Suzuki [8, Chapter III, Theorem 6 und 7].

Wir wollen in dieser Arbeit die supermodularen Untergruppen einer Gruppe G bestimmen. Es wird sich herausstellen, daß diese genau die $\cup$-distributiven Untergruppen sind, wenn die Primzahl 2 keine Schwierigkeiten macht. Das gilt z.B. für Untergruppen ungerader Ordnung oder mit ungeradem Index in endlichen Gruppen; oder für Normalteiler M beliebiger Gruppen mit $|M| > 2$, wenn M oder G/M kein Element der Ordnung 2 enthält. In 2-Gruppen jedoch gibt es eine Vielzahl von supermodularen Untergruppen, die nicht $\cup$-distributiv sind (siehe Satz 3.3 und 3.6), so daß unsere Charakterisierung der supermodularen Untergruppen beliebiger Gruppen in den Sätzen 5.1 und 5.3 doch etwas komplizierter wird als die der $\cup$-distributiven Untergruppen von Higman, Zappa und Sato. Haupthilfsmittel beim Beweis dieser Charakterisierung ist der vielleicht etwas überraschende Satz, den wir als erstes in §2 beweisen, daß eine supermodulare Untergruppe einer Gruppe G mit jeder Untergruppe von G vertauschbar ist.

Unsere Bezeichnungen sind, von den unten aufgeführten abgesehen, die allgemein üblichen (siehe etwa [2] oder [7]). G ist immer eine Gruppe und $\mathcal{V}$ ist immer ein Verband. Für $M \leq G$ und $x \in G$ bedeutet

$$\begin{aligned}
M <\cdot\, G \quad &: \quad M \text{ ist eine maximale Untergruppe von } G,\\
M_G = \bigcap_{g\in G} M^g \quad &: \quad \text{das Herz von } M \text{ in } G,\\
\pi(M) \quad &= \quad \{p \in \mathbb{P} \mid \text{es existiert } x \in M \text{ mit } o(x) = p\},\\
\pi(G \setminus M) \quad &= \quad \{p \in \mathbb{P} \mid \text{es existiert ein } p\text{-Element in } G \setminus M\},\\
o(x, M) = |\langle x\rangle : M \cap \langle x\rangle| \quad &: \quad \text{die Ordnung von } x \text{ modulo } M.
\end{aligned}$$

Sind $B, C, D, M \in \mathcal{V}$, so setzen wir

$$\begin{aligned}
[B/C] &= \{X \in \mathcal{V} \mid C \leq X \leq B\} \;\text{ falls } C \leq B,\\
[B/O] &= \{X \in \mathcal{V} \mid X \leq B\},\\
[I/B] &= \{X \in \mathcal{V} \mid B \leq X\},\\
L(B, C, D; M) &= (M \cup B) \cap (M \cup C) \cap (M \cup D),\\
R(B, C, D; M) &= M \cup (B \cap C \cap (M \cup D)) \cup (C \cap D \cap (M \cup B)) \cup (B \cap D \cap (M \cup C)).
\end{aligned}$$

1 Supermodulare Elemente in Verbänden

Wir wollen in diesem Abschnitt die grundlegenden Eigenschaften supermodularer Elemente herleiten, die wir später brauchen werden. Im gesamten Paragraphen seien B, C, D und M Elemente des Verbandes $\mathcal{V}$.

Bemerkung 1.1 Da jeder der 4 Terme, die in $R(B, C, D; M)$ vereinigt werden, in jedem der 3 Terme, deren Durchschnitt in $L(B, C, D; M)$ gebildet wird, enthalten ist, gilt immer $L(B, C, D; M) \geq R(B, C, D; M)$. Somit ist genau dann (S) für B, C, D und M erfüllt, wenn

$$L(B, C, D; M) \leq R(B, C, D; M) \tag{S'}$$

gilt. Insbesondere ist M genau dann supermodular in $\mathcal{V}$, wenn für alle $B, C, D \in \mathcal{V}$ die Ungleichung (S') erfüllt ist. □

Da die Supermodularität durch eine Gleichung definiert ist, gilt:

Lemma 1.2 (a) *Sei M* sm *$\mathcal{V}$. Ist $\mathcal{T}$ ein Teilverband von $\mathcal{V}$ und $M \in \mathcal{T}$, so ist M* sm *$\mathcal{T}$; insbesondere ist M* sm *$[B/C]$, falls $C \leq M \leq B$.*

(b) *Ist $\mathcal{V}_i$ ein Verband und M_i* sm *$\mathcal{V}_i$ für $i = 1, \ldots, r$, so ist $M_1 \times \cdots \times M_r$ supermodular in $\mathcal{V}_1 \times \cdots \times \mathcal{V}_r$.*

Satz 1.3 *Ist M $\cup$-distributiv in $\mathcal{V}$, so ist M supermodular in $\mathcal{V}$.*

Beweis: Wir wenden (D) zweimal an und erhalten

$$(M\cup B)\cap(M\cup C)\cap(M\cup D) = M\cup(B\cap C\cap D) \leq R(B,C,D;M).$$

Damit gilt (S'), und nach 1.1 ist M sm $\mathcal{V}$. □

Korollar 1.4 *Ist $\mathcal{V}$ distributiv, so ist jedes $M \in \mathcal{V}$ supermodular in $\mathcal{V}$.*

Bekanntlich (s. [7], S. 43) heißt M *modular* in $\mathcal{V}$, wenn gilt:

(M1) $U\cup(M\cap V) = (U\cup M)\cap V$ für alle $U, V \in \mathcal{V}$ mit $U \leq V$ und

(M2) $M\cup(U\cap V) = (M\cup U)\cap V$ für alle $U, V \in \mathcal{V}$ mit $M \leq V$.

Satz 1.5 (Vasantha Kandasamy [9]). *Ist M supermodular in $\mathcal{V}$, so gilt* (M2) *für M.*

Beweis: Für $U, V \in \mathcal{V}$ mit $M \leq V$ gilt offenbar

$$L(U,U,V;M) = (M\cup U)\cap(M\cup V) = (M\cup U)\cap V$$

und

$$R(U,U,V;M) = M\cup(U\cap(M\cup V))\cup(U\cap V\cap(M\cup U)) = M\cup(U\cap V).$$

Da M sm $\mathcal{V}$, folgt $(M\cup U)\cap V = M\cup(U\cap V)$. □

In Proposition 2 seiner Arbeit behauptet Vasantha Kandasamy, daß jede supermodulare Untergruppe modular ist. Sein Beweis ist allerdings unvollständig: es ist im wesentlichen der obige Beweis von Satz 1.5, der nirgends benutzt, daß der Verband der Untergruppenverband einer Gruppe ist, und der nur die Eigenschaft (M2) liefert. Man sieht sofort, daß im nichtmodularen Verband mit 5 Elementen das Atom, das zugleich Antiatom ist, supermodular, aber nicht modular ist. Wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden, gilt die Aussage von Vasantha Kandasamys Proposition 2 aber doch: supermodulare Untergruppen sind modular. Deshalb wird die folgende Vererbungseigenschaft für uns nützlich sein.

Lemma 1.6 *Ist M supermodular und modular in $\mathcal{V}$, so ist $M\cap U$ sm $[U/O]$ für alle $U \in \mathcal{V}$.*

Beweis: Seien $B, C, D \leq U$. Wir setzen $L := L(B,C,D;M)$ und

$$T := (B\cap C\cap(M\cup D))\cup(C\cap D\cap(M\cup B))\cup(B\cap D\cap(M\cup C)).$$

Wegen M sm $\mathcal{V}$ ist $L = M \cup T$, und da M modular in $\mathcal{V}$ ist, gilt

$$(M \cap U) \cup X = (M \cup X) \cap U$$

für alle $X \leq U$. Damit rechnet man leicht nach, daß

$$L(B, C, D; M \cap U) = L \cap U = (M \cap U) \cup T = R(B, C, D; M \cap U)$$

gilt. Somit ist $M \cap U$ supermodular in $[U/O]$. $\square$

Die Eigenschaft (M2) liefert:

Lemma 1.7 *Sei M sm $\mathcal{V}$ und $X \in \mathcal{V}$.*

(a) *Die Abbildung $\varphi : [X \cup M/M] \to [X/M \cap X]$, $B \mapsto B \cap X$ ist injektiv, und es gilt $B = M \cup (B \cap X) = M \cup B^{\varphi}$ für alle $B \in [X \cup M/M]$.*

(b) *Ist $[X/M \cap X]$ eine Kette, so auch $[X \cup M/M]$.*

(c) *Ist $M \cap X$ unterer Nachbar von X, so ist M unterer Nachbar von $X \cup M$.*

Beweis: Seien $B, C \in [X \cup M/M]$.

(a) Nach (M2) gilt $B = (M \cup X) \cap B = M \cup (X \cap B) = M \cup B^{\varphi}$; ist also $B^{\varphi} = C^{\varphi}$, so folgt $B = M \cup B^{\varphi} = M \cup C^{\varphi} = C$. Damit ist φ injektiv.

(b) Da $[X/M \cap X]$ eine Kette ist, gilt $B^{\varphi} \leq C^{\varphi}$ oder $C^{\varphi} \leq B^{\varphi}$. Mit (a) folgt $B = B^{\varphi} \cup M \leq C^{\varphi} \cup M = C$ bzw. $C \leq B$ im anderen Fall. Damit sind B und C vergleichbar, d.h., $[X \cup M/M]$ ist eine Kette.

(c) Nach (a) hat $[X \cup M/M]$ höchstens zwei Elemente, und wegen $M \cap X < X$ ist $M < X \cup M$, also M unterer Nachbar von $X \cup M$. $\square$

Um zu zeigen, daß ein Element supermodular ist, sind die folgenden Aussagen nützlich.

Lemma 1.8 (a) *Ist eines der drei Elemente B, C, D in M enthalten, so gilt (S).*

(b) *Ist M modular in $\mathcal{V}$ und $M \cup (X \cap Y) = M \cup ((M \cup X) \cap Y)$ für zwei Elemente X, Y der drei Elemente B, C, D, so gilt (S).*

(c) *Ist M modular in $\mathcal{V}$ und in einem der Elemente B, C, D enthalten, so gilt (S).*

Beweis: (a) Ist etwa $B \leq M$, so ist $M \cup B = M$ und somit $L(B, C, D; M) = M$. Damit ist (S') erfüllt, und nach 1.1 gilt (S).

(b) Sei Z das dritte der Elemente B, C, D. Wenden wir (M2) mit $V = M \cup X$ und $V = M \cup Z$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} L(B, C, D; M) &= (M \cup X) \cap (M \cup Y) \cap (M \cup Z) \\ &= [M \cup ((M \cup X) \cap Y)] \cap (M \cup Z) = [M \cup (X \cap Y)] \cap (M \cup Z) \\ &= M \cup (X \cap Y \cap (M \cup Z)) \leq R(B, C, D; M) \end{aligned}$$

Nach 1.1 gilt (S).

(c) Ist $M \leq X$, so ist $X = M \cup X$ und die Voraussetzung von (b) erfüllt. □

Wir brauchen neben 1.6 noch die folgende speziellere Vererbungseigenschaft.

Lemma 1.9 *Ist M sm $\mathcal{V}$ und $[I/M] = \{X \in \mathcal{V} \mid M \leq X\}$ eine Kette, so ist jedes $H \in [I/M]$ supermodular in $\mathcal{V}$.*

Beweis: Zu zeigen ist (S) mit H statt M. Ist eines der Elemente B, C, D in H enthalten, so gilt das nach 1.8(a). Seien also $B, C, D \not\leq H$. Dann ist $M \cup B \not\leq H$ und somit $H \leq M \cup B$, da $[I/M]$ eine Kette ist. Wegen $M \leq H$ folgt $M \cup B = H \cup B$; genauso $M \cup C = H \cup C$ und $M \cup D = H \cup D$. Damit erhalten wir

$$L(B, C, D; H) = L(B, C, D; M) = R(B, C, D; M) \leq R(B, C, D; H),$$

da $M \leq H$. Mit 1.1 folgt H sm $\mathcal{V}$. □

2 Supermodulare und permutable Untergruppen

Die Untergruppe M der Gruppe G heißt *supermodular* in G (kurz: M sm G), wenn M ein supermodulares Element des Untergruppenverbandes $L(G)$ von G ist; M heißt *permutabel* in G, wenn M mit jeder Untergruppe von G vertauschbar ist, d.h. wenn $MX = XM$ für alle $X \leq G$ gilt. Unser erstes Hauptergebnis ist, daß jede supermodulare Untergruppe permutabel ist. Wir beweisen das in zwei Schritten.

Lemma 2.1 *Ist M sm G und $x \in G$ mit $o(x, M) < \infty$, so ist $M\langle x\rangle = \langle x\rangle M$.*

Beweis: Wir nehmen an, das Lemma wäre falsch, und betrachten ein Gegenbeispiel (G, M, x), d.h. M sm G und $x \in G$ mit $o(x, M) < \infty$ und $M\langle x\rangle \neq \langle x\rangle M$, bei dem $o(x, M)$ möglichst klein ist; sei $X = \langle x\rangle$. Dann ist für $H = M \cup X$ auch $(H/M_H, M/M_H, xM_H)$ ein Gegenbeispiel; denn nach 1.2 ist M/M_H sm H/M_H, und wäre M/M_H mit $\langle xM_H\rangle$ vertauschbar, so folgte der Widerspruch

$$MX = MM_HX = MXM_H = XM_HM = XM.$$

Da $o(xM_H, M/M_H) = o(x, M)$ ist, können wir zu H/M_H übergehen, d.h.

$$G = M \cup X \quad \text{und} \quad M_G = 1 \tag{1}$$

annehmen. Offenbar ist $X/M \cap X$ eine endliche zyklische Gruppe. Hätte die zwei verschiedene maximale Untergruppen $X_1/M \cap X$ und $X_2/M \cap X$, so lieferte die Minimalität von $o(x, M)$, daß M mit X_1 und X_2, also auch mit $X_1 \cup X_2 = X$ vertauschbar wäre, ein Widerspruch. Es ist also $X/M \cap X$ zyklisch von Primzahlpotenzordnung und damit $[X/M \cap X]$ eine Kette; nach 1.7 ist auch $[X \cup M/M] = [G/M]$ eine Kette.

Angenommen, es existierte ein Y mit $M \cap X < Y < X$. Aus der Minimalität von $o(x, M)$ folgte dann $MY = YM =: H$. Nach 1.9 wäre H sm G, und unsere Induktionsannahme lieferte $HX = XH$ und damit

$$MX = MYX = HX = XH = XYM = XM.$$

Der Widerspruch zeigt, daß

$$M \cap X \quad \text{eine maximale Untergruppe von } X \tag{2}$$

ist. Mit 1.7(c) erhalten wir:

$$M \quad \text{ist eine maximale Untergruppe von } G. \tag{3}$$

Nun folgt

$$M \cap M^y \trianglelefteq M^y \quad \text{für alle } y \in X\,. \tag{4}$$

Denn wäre $M \cap M^y \ntrianglelefteq M^y$ für ein $y \in X$, so existierte ein $z \in M^y$ mit $(M \cap M^y)^z \nleq M \cap M^y$. Dann wären $B := (M \cap M^y)^z$, $C := \langle z \rangle$ und X wegen $z \in M^y$ und $B \leq M^y$ alle nicht in M enthalten, und mit (3) folgte $L(B, C, X; M) = G$. Wegen $y \in X$ wäre $M^y \cap X = (M \cap X)^y = M \cap X \leq M$ und somit $B \cap X \leq M$ und $C \cap X \leq M$; da auch

$$B \cap C = (M \cap M^y)^z \cap \langle z \rangle = ((M \cap M^y) \cap \langle z \rangle)^z = (M \cap M^y) \cap \langle z \rangle \leq M$$

ist, folgte $R(B, C, X; M) = M$, im Widerspruch zur Supermodularität von M. Damit ist (4) bewiesen.

Wenden wir (4) an mit $y = x$ und $y = x^{-1}$, so erhalten wir $M \cap M^x \trianglelefteq M^x$ und $M \cap M^{x^{-1}} \trianglelefteq M^{x^{-1}}$, also $M^x \cap M \trianglelefteq M$. Wegen $M\langle x \rangle \neq \langle x \rangle M$ ist $M^x \neq M$, und es folgt $M \cap M^x \trianglelefteq M \cup M^x = G$ nach (3). Da $M_G = 1$ ist, erhalten wir $M \cap M^x = 1$ und wegen $M \cap X \leq M \cap M^x$ und (2) dann

$$M \cap X = M \cap M^x = 1, \quad \text{und} \quad |X| \quad \text{ist eine Primzahl.} \tag{5}$$

Da $MX \neq XM$ ist, existiert ein $a \in M$ mit $X \neq X^a$; wegen $M \cap X = 1$ ist $M \cap X^a = 1$. Ist $B \leq G$ mit $B \cap X = 1 = B \cap X^a$ und $B \not\leq M$, so ist $L(B, X, X^a; M) = G$ und $R(B, X, X^a; M) = M$, ein Widerspruch. Es gibt also kein solches B, und daraus folgt zum einen, daß X und X^a die einzigen minimalen Untergruppen von G sind, die nicht in M enthalten sind; zum anderen erhalten wir $X^a \leq M^x$, sonst hätte $B = M^x$ wegen $M \cap M^x = 1 = M^x \cap X$ die obigen Eigenschaften. Damit ist X^a die einzige minimale Untergruppe von M^x und dann $X^{ax^{-1}}$ die einzige minimale Untergruppe von M. Folglich hat X genau 3 Konjugierte, und es ist $M = N_G(X^{ax^{-1}})$ wegen (3) und $M_G = 1$. Somit ist $|G : M| = 3$, und G ist die symmetrische Gruppe auf 3 Symbolen, doch die hat 3 minimale Untergruppen außerhalb M. Mit diesem Widerspruch ist Lemma 2.1 bewiesen. □

Lemma 2.2 *Ist M* sm *G und existiert ein $x \in G$ mit $o(x, M) = \infty$, so ist $|M| \leq 2$ und $x \in C_G(M)$.*

Beweis: Sei $M \neq 1$ und $X = \langle x \rangle$. Aus $o(x, M) = \infty$ folgt, daß

$$M \cap X = 1 \quad \text{und} \quad X \text{ unendlich zyklisch} \tag{6}$$

ist. Die Supermodularität von M liefert dann:

$$\begin{aligned} &\text{Sind } B, C, D \leq M \cup X \text{ mit } B \cap C \leq M, B \cap D \leq M \text{ und } C \cap D \leq M, \\ &\text{so ist eine der drei Gruppen } B, C, D \text{ in } M \text{ enthalten.} \end{aligned} \tag{7}$$

Denn die Voraussetzungen in (7) implizieren $R(B, C, D; M) = M$, während für $B \not\leq M$ nach 1.7 offenbar $M \cup B = M \cup ((M \cup B) \cap X)$ und somit $(M \cup B) \cap X \neq 1$ ist. Wäre also keine der Gruppen B, C, D in M enthalten, so wäre

$$K := ((M \cup B) \cap X) \cap ((M \cup C) \cap X) \cap ((M \cup D) \cap X) \neq 1\,,$$

da endlich viele nichttriviale Untergruppen der unendlich zyklischen Gruppe X nichttrivialen Durchschnitt haben. Mit (6) folgte

$$L(B, C, D; M) \geq M \cup K > M = R(B, C, D; M)\,,$$

ein Widerspruch. Damit ist (7) bewiesen.

Angenommen, es existiert ein $g \in (M \cup X) \setminus M$ mit $o(g, M) < \infty$. Nach 2.1 ist dann $M\langle g \rangle = \langle g \rangle M$; sei $M\langle g \rangle =: H$. Dann ist $|H : M| = |\langle g \rangle : \langle g \rangle \cap M| < \infty$, also auch H/M_H endlich. Nach 1.7 ist $H = M \cup (H \cap X)$ und wegen $M \cap X = 1$ ist $H \cap X \simeq (H \cap X)M_H/M_H$ endlich. Da X unendlich zyklisch ist, folgt $H \cap X = 1$, also der Widerspruch $H = M$. Damit haben wir

$$o(g, M) = \infty \quad \text{für alle } g \in (M \cup X) \setminus M\,. \tag{8}$$

Wir wollen zeigen, daß M von x^2 normalisiert wird. Das ist klar, wenn $M = M^x$ ist. Sei also $M \neq M^x$, etwa $M^x \nleq M$; sonst gehen wir zu x^{-1} über. Sei $y \in X$. Nach (6) ist $M^y \cap X = (M \cap X)^y = 1$. Für $b \in M^y$ gilt dann $b \in M$ oder $b \in M^x$; denn sonst wäre $o(b, M^x) = \infty$ nach (8), also $\langle b \rangle \cap M^x = 1$, und die drei Untergruppen $B = \langle b \rangle$, $C = M^x$, $D = X$ von $M \cup X$ würden (7) verletzen. Also ist M^y die mengentheoretische Vereinigung der beiden Untergruppen $M^y \cap M$ und $M^y \cap M^x$ und somit gleich einer dieser Untergruppen, d.h. $M^y \leq M$ oder $M^y \leq M^x$. Wir benutzen dies mit $y = x^2$ und $y = x^{-1}$. Da $M^x \nleq M$, ist $M^{x^2} \nleq M^x$, also $M^{x^2} \leq M$. Aus $M^{x^2} \leq M$ und $M^{x^2} \nleq M^x$ folgt $M \nleq M^x$, also $M^{x^{-1}} \nleq M$. Somit ist $M^{x^{-1}} \leq M^x$ und dann $M \leq M^{x^2}$. Damit ist $M = M^{x^2}$, also

$$M \trianglelefteq M\langle x^2 \rangle . \tag{9}$$

Sei $1 \neq y \in \langle x^2 \rangle$ und $1 \neq a \in C_M(y)$. Dann ist $\langle a, y \rangle = \langle a \rangle \times \langle y \rangle$ und für $B = \langle ay \rangle$, $C = \langle a^2 y \rangle$, $D = \langle y \rangle$ offenbar $L(B, C, D; M) = M\langle y \rangle$. Wäre $o(a) = \infty$, so wäre $B \cap C = B \cap D = C \cap D = 1$ und $R(B, C, D; M) = M$, ein Widerspruch. Sei also $o(a) = n$. Dann ist $B \cap C = B \cap D = \langle y^n \rangle$ und $C \cap D = \langle y^m \rangle$ mit $m = n$ für n ungerade und $m = \frac{n}{2}$ für n gerade, also $R(B, C, D; M) \leq M\langle y^m \rangle$. Es folgt $n = 2$, d.h. $o(a) = 2$ für $1 \neq a \in C_M(y)$. Existieren zwei verschiedene Involutionen a, b in $C_M(y)$, so setzen wir $B = \langle ay \rangle$, $C = \langle by \rangle$, $D = \langle y \rangle$ und erhalten wieder $L(B, C, D; M) = M\langle y \rangle$ und $R(B, C, D; M) \leq M\langle y^2 \rangle$, ein Widerspruch. Es ist also

$$|C_M(y)| \leq 2 \quad \text{für alle } 1 \neq y \in \langle x^2 \rangle . \tag{10}$$

Angenommen, $|M| > 2$. Wäre dann M endlich, so bewirkte x^2 einen Automorphismus endlicher Ordnung m auf M, d.h., es wäre $M = C_M(x^{2m})$ im Widerspruch zu (10). Somit ist M unendlich. Sei $1 \neq y \in \langle x^2 \rangle$ mit $|C_M(y)|$ maximal und sei $Y = \langle y \rangle$. Dann ist $C_M(Y_1) = C_M(Y)$ für alle $1 \neq Y_1 \leq Y$ und es folgt

$$Y \cap Y^a = 1 \quad \text{für alle } a \in M \setminus C_M(Y) . \tag{11}$$

Denn es ist $[y, a] = y^{-1} a^{-1} y a \in Y \cup Y^a \leq C_G(Y \cap Y^a)$ und $[y, a] \in M$, da $M \trianglelefteq M\langle x^2 \rangle$. Ist also $Y \cap Y^a \neq 1$, so ist $[y, a] \in C_M(Y \cap Y^a) = C_M(Y)$ und dann $[y^2, a] = [y, a]^2 = 1$, da $|C_M(Y)| \leq 2$. Also $a \in C_M(y^2) = C_M(Y)$, ein Widerspruch. Damit ist (11) gezeigt, und aus (11) folgt sofort, daß $Y^a \cap Y^b = (Y \cap Y^{ab^{-1}})^b = 1$ ist für alle $a, b \in M$ mit $ab^{-1} \notin C_M(Y)$. Da M unendlich und $C_M(Y)$ endlich ist, existieren also 3 Konjugierte B, C, D von Y unter M, die sich paarweise trivial schneiden, ein Widerspruch zu (7).

Damit ist $|M| = 2$ und M nach (8) die einzige Untergruppe der Ordnung 2 in $M \cup X$. Es folgt $x \in C_G(M)$, was zu zeigen war. $\square$

Als unmittelbare Folgerung aus 2.1 und 2.2 erhalten wir das angekündigte Ergebnis.

Satz 2.3 *Ist M supermodular in G, so ist M permutabel in G.*

Beweis: Da eine Untergruppe, die mit gewissen Untergruppen vertauschbar ist, auch mit deren Erzeugnis vertauschbar ist, ist nur zu zeigen, daß $MX = XM$ gilt für alle zyklischen Untergruppen X von G. Ist $|X : M \cap X| < \infty$, so steht das in Lemma 2.1; ist $|X : M \cap X|$ unendlich, so ist nach Lemma 2.2 sogar $X \leq C_G(M)$, also gewiß $MX = XM$. □

Da jede permutable Untergruppe modular ist [7, Theorem 2.1.3], haben wir mit Satz 2.3 insbesondere die in §1 angekündigte Aussage bewiesen, daß jede supermodulare Untergruppe modular ist. Ferner erhalten wir mit 1.6 die folgende wichtige Vererbungseigenschaft.

Lemma 2.4 *Ist M supermodular in G und $U \leq G$, so ist $M \cap U$ supermodular in U.*

Wir wollen nun umgekehrt zeigen, daß eine permutable Untergruppe der Ordnung 2 einer beliebigen Gruppe supermodular ist. Zuerst beweisen wir ein allgemeineres Kriterium für Supermodularität.

Satz 2.5 *Sei M permutabel in G und G periodisch. Genau dann ist M supermodular in G, wenn es zu jedem H mit $M < H \leq G$ höchstens 2 zyklische Untergruppen X von Primzahlpotenzordnung gibt mit $H = MX$.*

Beweis: Ist M sm G und sind $X_i \leq G$ zyklisch von Primzahlpotenzordnung mit $X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq X_1$ und $M < H = MX_1 = MX_2 = MX_3$, so ist $R(X_1, X_2, X_3; M) = M \cup (X_1 \cap X_2) \cup (X_2 \cap X_3) \cup (X_1 \cap X_3)$. Da $X_i \neq X_j$ ist für $i \neq j$, gilt $X_i \cap X_j \leq \Phi(X_i)$, und somit sind alle $X_i \cap X_j$ in der M enthaltenden maximalen Untergruppe $H_0 = M\Phi(X_i)$ von H enthalten. Also

$$R(X_1, X_2, X_3; M) \leq H_0 < H = L(X_1, X_2, X_3; M),$$

ein Widerspruch.

Sei nun umgekehrt die angegebene Bedingung erfüllt und seien $B, C, D \leq G$. Sei $x \in MB \cap MC \cap MD$ von Primzahlpotenzordnung und sei $H = M\langle x \rangle$. Zu zeigen ist $x \in R(B, C, D; M)$; dann gilt (S') und M sm G nach 1.1.

Ist $H = M$, so ist $x \in M \leq R(B, C, D; M)$. Sei also $M < H$. Dann ist wegen $H \leq MB \cap MC \cap MD$ nach Dedekind

$$H = M(H \cap B) = M(H \cap C) = M(H \cap D)\,.$$

Da M permutabel in G ist, ist M modular in G und nach [7, Theorem 2.1.5] somit

$$[\langle x \rangle / \langle x \rangle \cap M] \simeq [H/M] \simeq [H \cap B / H \cap B \cap M] = [H \cap B / M \cap B]\,.$$

Da $[\langle x\rangle/\langle x\rangle\cap M]$ eine Kette ist, ist es auch $[H\cap B/M\cap B]$, und es existiert ein $b \in H\cap B$ von Primzahlpotenzordnung mit $H\cap B = (M\cap B)\langle b\rangle$. Damit ist $H = M(H\cap B) = M\langle b\rangle$, und genauso existieren $c \in H\cap C$ und $d \in H\cap D$ von Primzahlpotenzordnung mit $H = M\langle c\rangle = M\langle d\rangle$. Nach Voraussetzung gibt es höchstens 2 solche Untergruppen $\langle b\rangle, \langle c\rangle, \langle d\rangle$, d.h., es ist etwa $\langle b\rangle = \langle c\rangle \leq B\cap C\cap MD$. Somit ist

$$H = M\langle b\rangle \leq M(B\cap C\cap MD) \leq R(B, C, D; M)$$

und damit $x \in R(B, C, D; M)$, was zu zeigen war. $\square$

Satz 2.6 *Ist M permutabel in G und $|M| = 2$, so ist M supermodular in G.*

Beweis: Seien $B, C, D \leq G$. Wie eben ist zu zeigen, daß jedes $x \in MB\cap MC\cap MD$ von unendlicher oder Primzahlpotenzordnung in $R(B, C, D; M)$ liegt. Sei dazu wieder $M < M\langle x\rangle =: H$. Dann ist $H = M(H\cap B) = M(H\cap C) = M(H\cap D)$. Nach 1.8(c) gilt (S) für B, C, D, wenn M in einer der Gruppen B, C, D enthalten ist; sei also $M\cap B = M\cap C = M\cap D = 1$. Dann sind $H\cap B$, $H\cap C$ und $H\cap D$ Komplemente zu M in H.

Ist $o(x) = \infty$ oder $o(x) = p^n$ mit $p > 2$, so ist $M \trianglelefteq H$ nach [7, 5.2.7 bzw. 5.1.5], also $H = M \times \langle x\rangle$. In einer solchen Gruppe gibt es 2 Komplemente bzw. genau ein Komplement zu M. Ist $o(x) = 2^n$, so ist $|H : \langle x\rangle| = 2$, also $\langle x\rangle \trianglelefteq H$ und dann H abelsch vom Typ $(2^n, 2)$ oder dazu verbandsisomorph. In jedem Fall hat M höchstens 2 Komplemente in H, d.h. es muß etwa $H\cap B = H\cap C \leq B\cap C\cap MD$ und dann $x \in H = M(H\cap B) \leq R(B, C, D; M)$ sein. $\square$

Es sei bemerkt, daß es Gruppen G mit nichtnormalen permutablen Untergruppen der Ordnung 2 und Elementen unendlicher Ordnung gibt [7, Exercise 6.3.2].

3 Supermodulare Untergruppen von p-Gruppen

Für $p > 2$ lassen sich die supermodularen Untergruppen einer p-Gruppe folgendermaßen charakterisieren.

Satz 3.1 *Sei G eine p-Gruppe, $p > 2$, und sei $1 < M < G$. Dann sind äquivalent:*

(a) *M ist supermodular in G.*

(b) *Für jede Untergruppe X von G gilt $X \leq M$ oder $M \leq X$.*

(c) *Es gilt eine der folgenden drei Aussagen:*

  (i) *G ist zyklisch,*

  (ii) *$G \simeq Z_{p^\infty}$, die Prüfergruppe vom Typ p^∞* [5, S. 23],

  (iii) *$1 < M \leq Z(G) < G$ und $Z(G) = \bigcap\{\langle x\rangle \mid x \in G \setminus Z(G)\}$.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß (b) aus (a) folgt. Offenbar ist (b) äquivalent zur Aussage: Für jedes $x \in G \setminus M$ ist $M \leq \langle x \rangle$. Wir nehmen also an, es existiert $x \in G \setminus M$ mit $M \nleq \langle x \rangle$, und betrachten ein solches x mit $o(x)$ minimal. Sei $X = \langle x \rangle$, $N = \langle x^p \rangle$ und $H = M \cup X$. Wegen der Minimalität von $o(x)$ ist $x^p \in M$, also $M \cap X = N \lessdot X$; nach 1.7 ist $M \lessdot H$. Wäre $N_M(X) \neq M$, so existierten $|M : N_M(X)| \geq p$ Konjugierte von X unter M; sind B, C, D drei solche Konjugierte, so folgt $L(B, C, D; M) = H$ und $R(B, C, D; M) = M$, ein Widerspruch. Also ist $X \trianglelefteq H$ und dann auch $N \trianglelefteq H$. Wäre $C_{M/N}(X/N) \neq 1$, so existierte Y mit $N \lessdot Y \leq M$ und XY/N elementarabelsch der Ordnung p^2. Diesmal existierten drei von Y/N verschiedene Untergruppen $B/N,\ C/N,\ D/N$ der Ordnung p von XY/N, und es wäre wieder $L(B, C, D; M) = H$ und $R(B, C, D; M) = M$. Es ist also $C_{M/N}(X/N) = 1$, insbesondere $C_M(X) = N$ und dann M/N isomorph zu einer Untergruppe von Aut X, also endlich. Damit ist $H = MX$ endlich, also $M \trianglelefteq H$ und dann $H/N = M/N \times X/N$, im Widerspruch zu $C_{M/N}(X/N) = 1$. Damit ist (b) gezeigt.

Sei nun (b) erfüllt. Da $M < G$ ist, existiert $x \in G \setminus M$, und es folgt $M \leq \langle x \rangle$. Damit ist M zyklisch und wird von x zentralisiert; da die Elemente $x \in G \setminus M$ ganz G erzeugen, folgt $M \leq Z(G)$. Jede minimale Untergruppe von G liegt nach (b) in M, d.h., G hat nur eine minimale Untergruppe. Ist also G endlich, so ist G zyklisch. Ist $Z(G)$ unendlich, so existiert zu jedem $x \in G \setminus Z(G)$ ein $z \in Z(G)$ mit $o(x) = o(z)$; dann ist $\langle x, z \rangle$ endlich und nicht zyklisch, was nicht möglich ist, da G nur eine minimale Untergruppe hat. Also folgt $G = Z(G)$ und somit $G \simeq Z_{p^\infty}$. Ist schließlich G unendlich und $Z(G)$ endlich, so ist für jedes $x \in G \setminus Z(G)$ offenbar $\langle x \rangle Z(G)$ endlich, daher zyklisch und somit $Z(G) \leq \langle x \rangle$. Also ist $Z(G) \leq \bigcap \{\langle x \rangle \mid x \in G \setminus Z(G)\}$; die umgekehrte Inklusion gilt in jeder Gruppe. Damit ist (c) gezeigt.

Sei schließlich (c) erfüllt. In den Fällen (i) und (ii) ist $L(G)$ eine Kette. Im Fall (iii) ist für $x \in G \setminus M$ entweder $x \in Z(G)$ und dann $M \leq \langle x \rangle$, da $Z(G)$ zyklisch ist, oder $x \notin Z(G)$ und dann $M \leq Z(G) \leq \langle x \rangle$. In allen Fällen gilt (b), und aus (b) folgt $M \trianglelefteq G$ und mit 1.8 dann (a). Damit ist Satz 3.1 bewiesen. $\square$

Die Gruppen in (iii) von Satz 3.1 haben nur eine minimale Untergruppe, nämlich $\Omega(M)$, und sind wegen $Z(G) < G$ daher unendlich. Damit haben wir das folgende Korollar, das sich natürlich auch leicht direkt beweisen läßt.

Korollar 3.2 *Sei $|G| = p^n$, $p > 2$. Existiert eine supermodulare Untergruppe M von G mit $1 < M < G$, so ist G zyklisch.*

Beispiele von Gruppen mit (iii) aus Satz 3.1 sind die von Olshanskii [4, Theorem 31.8] konstruierten erweiterten Tarskigruppen. Eine vollständige Beschreibung aller (iii) erfüllenden Gruppen ist uns nicht bekannt. Für $p = 2$ ist die Situation besser, da es hier Gruppen von

Typ (iii) nicht geben kann. Dafür gibt es erheblich mehr endliche 2-Gruppen mit supermodularen Untergruppen. Diese bestimmen wir als nächstes; wir bezeichnen mit Q_{2^n} die verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung 2^n.

Satz 3.3 *Sei G eine endliche 2-Gruppe und $1 < M < G$. Dann sind äquivalent:*

(a) *M ist supermodular in G.*

(b) *M ist permutabel in G, und ist $M <\!\cdot\, H \leq G$, so ist jede von M verschiedene maximale Untergruppe von H zyklisch.*

(c) *Es gilt eine der folgenden sechs Aussagen:*

- (i) *M ist permutabel in G und $|M| = 2$.*
- (ii) *G ist zyklisch.*
- (iii) *$G \simeq Q_{2^n}$ mit $n \geq 3$, und $M = Z_2(G)$, falls $n \geq 4$.*
- (iv) *$M = \Omega(G)$ und $|M| = 4$.*
- (v) *G ist abelsch vom Typ $(2^n, 2)$ mit $n \geq 3$, oder dazu verbandsisomorph, und $M = \Omega_k(G)$ für ein $k < n$.*
- (vi) *$G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1,\ b^4 = a^{2^{n-1}},\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ mit $n \geq 3$ und $M = \Omega_2(G)$.*

Beweis: Ist M supermodular in G, so ist M nach 2.3 permutabel in G. Sei $M <\!\cdot\, H \leq G$ und $U \neq M$ eine nichtzyklische maximale Untergruppe von H. Dann ist $H/U \cap M$ eine Vierergruppe, und somit existiert B mit $U \cap M < B < H$ und $U \neq B \neq M$. Da U nicht zyklisch ist, existieren neben $U \cap M$ zwei weitere maximale Untergruppen C und D mit $C \cap D = C \cap (U \cap M) = D \cap (U \cap M)$. Da $M <\!\cdot\, H$ und $B, C, D \not\leq M$ sind, ist $L(B, C, D; M) = H$; da $B \cap U$ und $C \cap D$ in M liegen, ist $R(B, C, D; M) = M$, ein Widerspruch. Damit ist gezeigt, daß (b) aus (a) folgt.

Wir nehmen nun an, daß M die Eigenschaft (b) hat, und zeigen (c) mittels Induktion nach $|G|$. Ist $|M| = 2$, so gilt (i); sei also

$$|M| \geq 4\,. \tag{12}$$

Angenommen, es existiert $x \in G \setminus M$ mit $o(x) = 2$. Da M permutabel in G ist, ist dann $|M\langle x\rangle : M| = 2$; sei U eine x enthaltende maximale Untergruppe von $M\langle x\rangle$. Da $x \notin M$, ist $U \neq M$, nach Voraussetzung also U zyklisch. Damit ist $U \cap M = 1$ und dann $|M| = |MU : U| = 2$, im Widerspruch zu (12). Es existiert also kein solches x, d.h., es ist

$$\Omega(G) \leq M\,. \tag{13}$$

Ist M zyklisch, so besitzt G daher nur eine minimale Untergruppe, ist also zyklisch oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. Ist $G \simeq Q_{2^n}$ mit $n \geq 4$, so existiert wegen $|M| \geq 4$ eine nichtzyklische Untergruppe H von G mit $M <\!\cdot\, H$. Nach Voraussetzung hat dann H

nur zyklische maximale Untergruppen, ist also eine Q_8. Somit ist $|M| = 4$ und $M = Z_2(G)$, da permutabel in G. Damit gilt (iii), und wir können annehmen, daß

$$M \text{ nicht zyklisch} \tag{14}$$

ist. Sei $M <\cdot H \leq G$. Nach (14) ist H nicht zyklisch, besitzt also mindestens 2 von M verschiedene maximale Untergruppen, die nach Voraussetzung zyklisch sind. Da die Diedergruppen, Quasidiedergruppen und verallgemeinerten Quaternionengruppen jeweils nur eine zyklische maximale Untergruppe haben, sofern sie eine nichtzyklische echte Untergruppe enthalten, folgt mit [2, S. 91]:

Ist $M <\cdot H \leq G$, so ist H abelsch vom Typ $(2^r, 2)$ oder dazu verbands-isomorph, und $M = \Omega_{r-1}(H)$. Insbesondere ist M abelsch. (15)

Da $|\Omega(H)| = 4$ und $\Omega(G) \leq M \leq H$ ist, gilt

$$|\Omega(G)| = 4\,. \tag{16}$$

Ist $M = \Omega(G)$, so gilt (iv). Wir können also $\Omega(G) < M$ annehmen. Nach (15) ist $M/\Omega(G)$ zyklisch. Ist ferner $g \in G \setminus M$ mit $o(g) = 4$, so ist $|M\langle g\rangle : M| = |\langle g\rangle : M \cap \langle g\rangle| = 2$; insbesondere ist $|M\langle g\rangle| \geq 2^4$ und nach (15) daher $g \in \Omega_2(M\langle g\rangle) \leq M$, ein Widerspruch. Somit ist $\Omega_2(G) \leq M$ und $M/\Omega(G)$ enthält jede minimale Untergruppe von $G/\Omega(G)$. Damit hat $G/\Omega(G)$ nur eine minimale Untergruppe, ist also zyklisch oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. Im ersten Fall ist $G = \langle y\Omega(G)\rangle$ und $|G : \langle y\rangle| = |\Omega(G) : \Omega(G) \cap \langle y\rangle| = 2$, d.h., G hat einen zyklischen Normalteiler vom Index 2. Da G genau 3 Involutionen besitzt, gilt (v). Sei also

$$G/\Omega(G) \simeq Q_{2^n} \quad \text{mit} \quad n \geq 3\,. \tag{17}$$

Für jede Untergruppe H von G mit $M <\cdot H$ ist $H/\Omega(G)$ nach (15) zyklisch; mit (17) folgt daraus $|M : \Omega(G)| = 2$. Damit ist $M \leq \Omega_2(G)$, also schließlich

$$M = \Omega_2(G) \quad \text{und} \quad |M| = 8\,. \tag{18}$$

Sei $A = C_G(\Omega(G))$ und $x \in \Omega(G) \setminus \Phi(M)$; sei $X = \langle x\rangle$. Da M abelsch ist, ist $M \leq A$; nach (17) und (18) ist $M < A$, da $|G : A| \leq 2$. Damit ist $1 < M/X < A/X$, und M/X erfüllt (b) in A/X. Da M/X zyklisch der Ordnung 4 ist, liefert die Induktionsannahme, daß A/X zyklisch oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist. Im letzteren Fall existierte $H \leq A$ mit $M <\cdot H$ und $H/X \simeq Q_8$, ein Widerspruch zu (15). Also ist A/X zyklisch und dann $A = \langle a\rangle \times \langle x\rangle$ mit $a \in G$.

Ist $A = G$, so gilt (v); sei also $|G : A| = 2$. Da $G/\Omega(G)$ eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist, existiert ein $b \in G$ mit $G = \langle a, b, \Omega(G)\rangle$ und $a^b = a^{-1}z$ für ein $z \in \Omega(G)$. Wegen

$b^2 \in A$ ist $a = a^{b^2} = (a^{-1}z)^b = az^{-1}z^b$, also $z^b = z$. Da $b \notin A = C_G(\Omega(G)) = C_G(x)$ ist, folgt $z \in \langle a \rangle$. Ist $a^b = a^{-1}$, so sind wir zufrieden. Ist aber $a^b \neq a^{-1}$, so ist also $a^b = a^{-1+2^{n-1}}$ und $x^b = xa^{2^{n-1}}$ und somit $(ax)^b = a^{-1}x = (ax)^{-1}$. In diesem Fall ersetzen wir a durch ax und können also annehmen, daß $a^b = a^{-1}$ ist. Da $M \leq A$, ist $b \notin M = \Omega_2(G)$, also $o(b) \geq 8$. Andererseits ist $|G : \langle a \rangle| = 4$ und somit $|\langle b \rangle : \langle a \rangle \cap \langle b \rangle| \leq 4$; ferner $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| \leq 2$, da diese Gruppe von b invertiert und zentralisiert wird. Es folgt $o(b) = 8$, $b^4 = a^{2^{n-1}}$ und $G = \langle a, b \rangle$. Damit gilt (vi) und (c).

Wir zeigen schließlich, daß (a) aus (c) folgt, d.h. daß in den Fällen (i) – (vi) immer M supermodular in G ist. Im Fall (i) gilt das nach Satz 2.6, im Fall (ii) nach 1.4; in den anderen Fällen benutzen wir Satz 2.5. Sei also $M < H = MX$ mit X zyklisch. Da in allen diesen Fällen $M \trianglelefteq G$ ist, ist dann zu zeigen:

$$\text{Es existiert höchstens eine zyklische Untergruppe } Y \neq X \text{ von } H \text{ mit } H = MY. \tag{19}$$

Das ist klar für $G \simeq Q_8$, da hier entweder $H = X$ zyklisch oder $H = G$ und M eine der 3 maximalen Untergruppen von G ist. Ist $G \simeq Q_{2^n}$ mit $n \geq 4$ und $M = Z_2(G)$, so ist entweder $|X| = 4$ und $H \simeq Q_8$, oder $|X| > 4$ und dann $M \leq X = H$, da alle Elemente außerhalb der zyklischen maximalen Untergruppe von G die Ordnung 4 haben; in beiden Fällen gilt (19). Im Fall (iv) ist $|H : Y| = |M : M \cap Y| = 2$ für jede $H = MY$ erfüllende zyklische Untergruppe Y. Da H nur 3 maximale Untergruppen hat, gilt (19). Im Fall (v) ist $|X| = 2^r$ mit $r > k$, somit $H = \Omega_r(G)$ und dann auch $|Y| = 2^r$ für jedes zyklische Y mit $H = MY$. Da eine abelsche Gruppe vom Typ $(2^r, 2)$ nur 2 zyklische Untergruppen der Ordnung 2^r besitzt, gilt (19). Im Fall (vi) schließlich ist $b^2 \in Z(G)$ und somit $A = \langle a, b^2 \rangle$ abelsch vom Typ $(2^n, 2)$. Ist $g \in G \setminus A$, so ist $g = a^i b^{2k+1}$ und dann $g^2 = b^{4k+2}$, also

$$o(g) = 8 \;\; \text{für alle} \;\; g \in G \setminus A\,. \tag{20}$$

Somit ist $M = \Omega_2(G) \leq A$, d.h. $|M| = 8$. Ist nun $H = MX \leq A$, so gilt (19), wie wir gerade im Fall (v) sahen. Ist aber $H \not\leq A$ und $H = MY$ mit Y zyklisch, so ist $|Y| = 8$ und $|Y \cap M| = 4$ nach (20) und damit $|H : Y| = |M : M \cap Y| = 2$. Es ist also H von zwei Elementen erzeugt und hat nur 3 maximale Untergruppen, von denen eine M ist. Es folgt (19), somit gilt (a), und Satz 3.3 ist bewiesen. □

Offenbar beschreiben die Fälle (i) – (iii) aus Satz 3.3 die zyklischen und die Fälle (iv) – (vi) die nichtzyklischen supermodularen Untergruppen endlicher 2-Gruppen. Es sei bemerkt, daß die Gruppen in (iv) wohlbekannt sind [3]. Um Satz 3.3 auf unendliche Gruppen auszudehnen, brauchen wir den folgenden Hilfssatz.

Lemma 3.4 *Sei G eine 2-Gruppe und $1 < M < G$. Ist M supermodular in G, so ist $|M| \leq o(x)$ für jedes $x \in G \setminus M$; insbesondere ist M endlich.*

Beweis: Sei $x \in G \setminus M$ mit $o(x)$ minimal, sei $X = \langle x \rangle$ und $H = MX$; zu zeigen ist $|M| \leq |X|$. Die Minimalität von $o(x)$ liefert $x^2 \in M$, also $|X : M \cap X| = 2$. Da M permutabel in G ist, folgt $|H : M| = |X : M \cap X| = 2$ und $M \trianglelefteq H$.

Angenommen, es existiert T mit $X < T \leq H$ und $|T : X| = 4$. Dann ist T eine endliche 2-Gruppe und $M \cap T$ sm T nach 2.4; ferner $|T : M \cap T| = 2$, also $1 < M \cap T < T$. Ist dann $X < S < T$, so ist S zyklisch nach 3.3(b); andererseits hat $S = (M \cap S)X$ zwei verschiedene maximale Untergruppen $M \cap S$ und X. Der Widerspruch zeigt, daß keine X enthaltende Untergruppe T von H mit $|T : X| = 4$ existiert.

Da je zwei Involutionen eine Diedergruppe erzeugen, enthält jede 2-Gruppe der Ordnung ≥ 4 eine Untergruppe der Ordnung 4. Damit folgt $|N_H(X)/X| \leq 2$. Nach Satz 2.5 hat X höchstens 2 Konjugierte unter H, d.h., es ist auch $|H : N_H(X)| \leq 2$, also $|H : X| \leq 4$. Es folgt $|H : X| = 2$ und dann $|M| = |X|$, was zu zeigen war. □

Das vorstehende Lemma gestattet es, einige unmittelbare Folgerungen aus Satz 3.3, die wir später brauchen werden, gleich für supermodulare Untergruppen beliebiger 2-Gruppen zu beweisen.

Korollar 3.5 *Sei G eine 2-Gruppe, $1 < M < G$ und M supermodular in G. Dann gilt:*

(a) *M ist abelsch.*

(b) *M normalisiert jede Untergruppe von G.*

(c) *Ist $|M| > 2$, so ist $M \trianglelefteq G$.*

(d) *Ist M nicht zyklisch, so ist $\Omega(G) \leq M$ und M abelsch vom Typ $(2^k, 2)$ für ein $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Wir überzeugen uns zuerst, daß die Aussagen (a) – (d) für endliches G gelten. Eine solche Gruppe hat eine der Eigenschaften (i) – (vi) aus Satz 3.3. Gilt eine der Aussagen (i) – (iv), so sind (a) – (d) trivial, wenn man für (b) beachtet, daß in den Fällen (i), (iii) und (iv) für $1 \neq U \leq G$ gilt $|UM : U| = |M : U \cap M| \leq 2$. Gilt (v), so ist $\Omega_{n-1}(G)$ abelsch und $U \trianglelefteq G$ für alle $U \not\leq \Omega_{n-1}(G)$. Im Fall (vi) schließlich ist M nach (20) in der abelschen Gruppe $A = \langle a, b^2 \rangle$ enthalten, also abelsch. Für $U \leq G$ ist entweder $U \leq A$ oder $|M : U \cap M| \leq 2$, wieder nach (20). Somit gilt (b), (c) ist trivial, und (d) folgt aus (20).

Ist nun G unendlich, so ist M nach 3.4 und 2.3 endlich und permutabel in G. Für jedes $x \in G \setminus M$ ist also $G_0 = M\langle x \rangle$ endlich und $1 < M < G_0$, d.h., es gelten (a) – (d) für G_0. Damit ist M abelsch und vom Typ $(2^k, 2)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, falls nicht zyklisch; ferner $M^x = M$ falls $|M| > 2$ und $M \leq N_G(\langle x \rangle)$. Somit gelten (b) und (c). Ist schließlich M nicht zyklisch, so folgt aus $o(x) = 2$ der Widerspruch $x \in \Omega(G_0) \leq M$. Also ist $\Omega(G) \leq M$, und (d) gilt. □

Der folgende Satz charakterisiert die supermodularen Untergruppen unendlicher 2-Gruppen. Er wird in §5 nicht gebraucht werden, da wir mit Korollar 3.5 arbeiten können.

Satz 3.6 *Sei G eine unendliche 2-Gruppe und sei $1 < M < G$. Genau dann ist M supermodular in G, wenn eine der folgenden Aussagen gilt:*

(i) *M ist permutabel in G und $|M| = 2$.*

(ii) *$G \simeq Z_{2^\infty}$.*

(iii) *$G = A\langle b\rangle$ mit $A \simeq Z_{2^\infty}$, $a^b = a^{-1}$ für alle $a \in A$, $\langle b^2\rangle = \Omega(A)$ und $M = Z_2(G)$.*

(iv) *$M = \Omega(G)$ und $|M| = 4$.*

(v) *$G \simeq Z_{2^\infty} \times Z_2$ und $M = \Omega_k(G)$ für ein $k \in \mathbb{N}$.*

(vi) *$G = A\langle b\rangle$ mit $A \simeq Z_{2^\infty}$, $a^b = a^{-1}$ für alle $a \in A$, $\langle b^4\rangle = \Omega(A)$ und $M = \Omega_2(G)$.*

Beweis: Sei zuerst M sm G. Nach 2.3 ist M permutabel in G. Ist $|M| = 2$, so sind wir fertig; sei also $|M| > 2$. Mit Lemma 3.4 folgt dann $\Omega(G) \leq M$.

Ist M zyklisch, so hat G nur eine minimale Untergruppe, und somit gilt bekanntlich $G \simeq Z_{2^\infty}$ oder $G \simeq Q_{2^\infty}$, die in (iii) angegebene Gruppe. Im letzteren Fall wird G von Elementen der Ordnung 4 erzeugt, und mit 3.4 folgt $|M| = 4$; als permutable Untergruppe von G ist dann $M = Z_2(G)$. Damit gilt (iii).

Sei nun M nicht zyklisch. Nach Korollar 3.5 ist dann $\Omega(G) \leq M$ und M abelsch vom Typ $(2^k, 2)$ für ein $k \in \mathbb{N}$; es folgt $|\Omega(G)| = 4$. Ist $|M| = 4$, so gilt (iv); sei also $k \geq 2$. Nach Lemma 3.4 ist dann $\Omega_2(G) \leq M$. Da $M/\Omega(G)$ zyklisch ist, hat also $G/\Omega(G)$ nur eine minimale Untergruppe und ist somit isomorph zu Z_{2^∞} oder Q_{2^∞}.

Ist $H/\Omega(G) \simeq Z_{2^\infty}$ und $\Omega(G) \leq Z(H)$, so ist für je zwei Elemente $u, v \in H$ offenbar $\langle u, v\rangle\Omega(G)$ eine zyklische Erweiterung der zentralen Untergruppe $\Omega(G)$, also abelsch, d.h. $uv = vu$. Damit ist H abelsch, und da G nur 3 Involutionen besitzt, folgt $H \simeq Z_{2^\infty} \times Z_2$ [5, 4.3.13].

Wegen $|\Omega(G)| = 4$ ist $|G : C_G(\Omega(G))| \leq 2$. Ist also $G/\Omega(G) \simeq Z_{2^\infty}$, so folgt $C_G(\Omega(G)) = G$ und dann $G \simeq Z_{2^\infty} \times Z_2$, wie eben gezeigt. Nach 3.4 ist $M = \Omega_k(G)$, d.h., es gilt (v). Ist schließlich $G/\Omega(G) \simeq Q_{2^\infty}$, so ist $H \leq C_G(\Omega(G))$, wenn $H/\Omega(G)$ die Untergruppe vom Index 2 in $G/\Omega(G)$ ist; wegen $H/\Omega(G) \simeq Z_{2^\infty}$ ist erneut $H = A \times Z$ mit $A \simeq Z_{2^\infty}$ und $|Z| = 2$. Da $G/\Omega(G) \simeq Q_{2^\infty}$ ist, existiert $b \in G$ mit $a^b \equiv a^{-1} \pmod{\Omega(G)}$ für alle $a \in A$. Somit ist $(a^2)^b = (a^b)^2 = a^{-2}$, und da jedes Element von A ein Quadrat ist, folgt $a^b = a^{-1}$ für alle $a \in A$. Wegen $|G : A| = 4$ wird $b^4 \in A$ von b invertiert und zentralisiert; es ist also $b^4 \in \Omega(A)$. Wegen $M/\Omega(G) \trianglelefteq G/\Omega(G)$ ist $M \leq H$, also $b \notin M$. Nach 3.4 ist $o(b) \geq 8$ und damit dann $\langle b^4\rangle = \Omega(A)$ und $G = A\langle b\rangle$. Wieder mit 3.4 folgt $|M| = 8$, also $M = \Omega_2(G)$. Damit gilt (vi).

Hat umgekehrt G eine der Eigenschaften (ii) – (vi), so ist M ein endlicher Normalteiler von G und folglich auch H endlich, wenn $H = MX > M$ und X zyklisch ist. Nach Satz 3.3 ist M supermodular in H, und somit hat M höchstens 2 zyklische Supplemente in H. Nach 2.5 ist M sm G. Gilt schließlich (i), so ist M nach Satz 2.6 supermodular in G. □

4 Supermodulare Untergruppen endlicher Gruppen

Wir brauchen zwei Hilfssätze, deren unendliche Versionen für die Charakterisierung supermodularer Untergruppen beliebiger Torsionsgruppen benötigt werden. Deshalb beweisen wir sie gleich allgemein.

Lemma 4.1 *Sei G eine Torsionsgruppe, $1 < M < G$, M supermodular in G und sei $X \leq G$ zyklisch von Primzahlpotenzordnung p^n mit $X \not\leq M$.*

(a) *Dann ist $M \leq N_G(X)$.*

(b) *Ist $p > 2$ oder $p = 2 \notin \pi(M)$, so ist $M \leq C_G(X)$.*

Beweis: Nach Satz 2.3 ist M permutabel in G; sei $H = MX$. Nach Satz 2.5 hat X höchstens zwei Konjugierte unter M, d.h., es ist $|M : N_M(X)| \leq 2$. Wegen $N_H(X) = N_M(X)X$ ist dann auch $|H : N_H(X)| \leq 2$.

Sei zuerst $p > 2$. Ist dann $y \in N_H(X) \setminus X$ ein p-Element, so ist $P = X\langle y\rangle$ eine endliche p-Untergruppe von H mit $X < P$. Da $X \not\leq M$ und $P = (M \cap P)X$ ist, gilt $1 < M \cap P < P$. Nach 2.4 ist $M \cap P$ sm P, und nach 3.2 ist P zyklisch; aber dann kann P nicht Produkt der echten Untergruppen $M \cap P$ und X sein. Der Widerspruch zeigt, daß X die Menge der p-Elemente von $N_H(X)$ ist. Damit ist X charakteristisch in $N_H(X) \trianglelefteq H$, also $X \trianglelefteq H$. Nach [7, Theorem 6.2.10] ist M ascendant in H, nach [7, Theorem 2.1.5] ist $[H/M] \simeq [X/M \cap X]$ eine endliche Kette. Ist also H_0 die M enthaltende maximale Untergruppe von H, so ist $H_0 \trianglelefteq H$. Somit ist $[M, X] \leq H_0 \cap X = \Phi(X)$, und damit wird X von jeder p'-Untergruppe von M zentralisiert [2, S. 275]. Da X jedes p-Element von M enthält, folgt $M \leq C_G(X)$.

Sei nun $p = 2$. Wäre $|H : N_H(X)| = 2$, so existierte ein 2-Element $a \in M \setminus N_H(X)$. Wegen $N_H(X) \trianglelefteq H$ wären dann X und X^a verschiedene 2-Normalteiler von $N_H(X)$ und $S = XX^a\langle a\rangle$ eine endliche 2-Gruppe. Wegen $a \in M \cap S$ und $X \not\leq M$ wäre $1 < M \cap S < S$, und nach 2.4 und 3.5 würde X von $M \cap S$ normalisiert, im Widerspruch zu $X \neq X^a$. Es ist also $N_H(X) = H$, d.h., (a) gilt. Und ist $2 \notin \pi(M)$, so ist $M \leq C_G(X)$, da Aut X eine 2-Gruppe ist. □

Lemma 4.2 *Sei G eine Torsionsgruppe und $1 < M < G$. Ist M supermodular in G, so ist $O^2(G) \leq MC_G(M)$ und $\pi(M/Z(M)) \cap \pi(C_G(M)/Z(M)) = \emptyset$.*

Beweis: Sei $x \in G$ mit $o(x) = q^r$ und $2 < q \in \mathbb{P}$. Ist $x \notin M$, so ist $x \in C_G(M)$ nach 4.1(b). Somit enthält $MC_G(M)$ jedes Element ungerader Ordnung, d.h., es ist $O^2(G) \leq MC_G(M)$.

Angenommen, $p \in \pi(M/Z) \cap \pi(C_G(M)/Z)$, wobei $Z = Z(M)$. Dann existieren Untergruppen $A/Z \leq M/Z$ und $C/Z \leq C_G(M)/Z$ der Ordnung p. Wegen $MC_G(M)/Z = M/Z \times C_G(M)/Z$ ist AC/Z elementarabelsch der Ordnung p^2, enthält also eine weitere Untergruppe B/Z der Ordnung p; sei X zyklisch der Ordnung p^n mit $B = ZX$. Dann ist $X \not\leq M$ und $X \not\leq C_G(M)$, nach 4.1(b) also $p = 2$. Nach 4.1(a) ist $M \leq N_G(X)$. Da Aut X eine 2-Gruppe ist, existiert ein 2-Element $y \in M$ mit $y \notin C_M(X)$.

Da AC/Z abelsch ist, ist AC nilpotent, also direktes Produkt seiner Sylowgruppen; somit existiert eine X enthaltende 2-Sylowgruppe P von AC mit $AC = ZP$. Dann sind $M \cap P$ und $C_G(M) \cap P = C_P(M)$ zwei verschiedene maximale Untergruppen von P, und mit $X \not\leq C_P(M)$ folgt $P = (M \cap P)C_P(M) = XC_P(M)$. Da $M \leq N_G(X)$ ist, werden X und P von $y \in M$ normalisiert, d.h., $S = P\langle y \rangle$ ist eine 2-Gruppe; ferner ist

$$X \leq P = (M \cap P)C_P(M) \leq MC_S(M) \cap S = (M \cap S)C_S(M)\,.$$

Wegen $X \not\leq M$ und $X \not\leq C_G(M)$ folgt $1 < M \cap S < S$; nach 2.4 und 3.5 ist $M \cap S$ abelsch und wird somit von $(M \cap S)C_S(M) \geq X$ zentralisiert. Aber $y \in M \cap S$, ein Widerspruch. Damit ist Lemma 4.2 bewiesen. □

Wir kommen zu unserem ersten Hauptergebnis.

Satz 4.3 *Sei G eine endliche Gruppe und $M \leq G$ mit $|M|$ oder $|G : M|$ ungerade. Dann sind äquivalent:*

(a) *M ist supermodular in G.*

(b) *M ist $\cup$-distributiv in G.*

(c) *Es existieren Untergruppen L und K von G mit*

  (i) *$G = L \times K$ und $(|L|, |K|) = 1$.*

  (ii) *$M = L \times (M \cap K)$ und $M \cap K \leq Z(G)$.*

  (iii) *Für jeden Primteiler p von $|M \cap K|$ sind die p-Sylowgruppen von G zyklisch.*

Beweis: Nach 1.3 folgt (a) aus (b), und nach [7, Theorem 3.4.8] folgt (b) aus (c). Zu zeigen bleibt, daß (c) aus (a) folgt.

Sei also M sm G. Ist $M = G$ oder $M = 1$, so gilt (c) mit $L = G$ und $K = 1$ bzw. $L = 1$ und $K = G$; sei also $1 < M < G$. Nach 4.2 ist dann $O^2(G) \leq MC_G(M)$. Ist $|G : M|$ ungerade, so enthält M eine 2-Sylowgruppe von G; ist $|M|$ ungerade und X eine (zyklische) 2-Untergruppe von G, so ist $X \leq C_G(M)$ nach 4.1(b). In beiden Fällen folgt:

$$G = MC_G(M)\,. \tag{21}$$

Sei wieder $Z = Z(M)$, und sei ω die Menge der Primteiler von $|C_G(M)/Z|$. Sei $S = O_\omega(Z)$ und $R = O_{\omega'}(Z)$. Nach 4.2 ist S ein Hallscher Normalteiler von M, besitzt also ein Komplement L in M; wegen $S \leq Z(M)$ ist dann $M = L \times S$. Genauso ist R ein Hallscher Normalteiler von $C_G(M)$, besitzt ein Komplement K in $C_G(M)$, und es ist $C_G(M) = R \times K$. Da L und K charakteristische Untergruppen der Normalteiler M bzw. $C_G(M)$ von G sind, ist $L \trianglelefteq G$ und $K \trianglelefteq G$. Schließlich ist $LK = LRSK = MC_G(M) = G$ und $(|L|, |K|) = 1$, da K eine ω-Gruppe und L nach 4.2 eine ω'-Gruppe ist. Somit ist $G = L \times K$, d.h., es gilt (i) aus (c). Ferner ist $M = L \times (M \cap K)$ und $M \cap K \leq O_\omega(M) = S \leq Z(G)$ nach (21), d.h., es gilt (ii). Sei schließlich p ein Primteiler von $|M \cap K|$. Dann ist $p \mid |M|$ und $p \in \omega$, also $p \mid |C_G(M) : Z| = |G : M|$. Nach Voraussetzung ist $p > 2$; ferner gilt $1 < M \cap P < P$ für $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Nach 2.4 ist $M \cap P \,\mathrm{sm}\, P$ und nach 3.2 dann P zyklisch. Damit gilt (iii), also (c). □

Nach 4.3 ist nur noch die Situation zu betrachten, daß $|M|$ und $|G : M|$ gerade sind, also $1 < M \cap P < P$ gilt für jede 2-Sylowgruppe P von G. Wir zeigen zuerst, daß wir uns dabei darauf beschränken können, daß M eine 2-Gruppe ist, und behandeln dann die nach 3.3 für M und P möglichen Fälle.

Lemma 4.4 *Sei G endlich, M sm G, $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ und sei $1 < M \cap P < P$. Dann ist $M = (M \cap P) \times Q$ mit einer $2'$-Gruppe Q.*

Beweis: Da M permutabel in G ist, ist $M \cap P \in \mathrm{Syl}_2(M)$. Für jedes $x \in P \setminus (M \cap P)$ wird $\langle x \rangle$ nach Lemma 4.1(a) von M normalisiert, also von $O^2(M)$ zentralisiert. Da P von diesen Elementen erzeugt wird, ist also $O^2(M) \leq C_G(P) \leq C_G(M \cap P)$; es folgt $M \cap P \trianglelefteq M$. Nach Schur-Zassenhaus existiert ein Komplement Q zu $M \cap P$ in M, und es ist $M = (M \cap P) \times Q$, da $Q \leq O^2(M) \leq C_G(M \cap P)$. □

Lemma 4.5 *Sei G eine Torsionsgruppe und $M = A \times B \leq G$ mit $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$. Genau dann ist M supermodular in G, wenn A und B supermodular in G sind.*

Beweis: Sei zuerst M sm G. Dann ist M nach Satz 2.3 permutabel in G, und nach [7, Lemma 6.2.16] ist A permutabel in G. Sei $A < H = AX$ mit X zyklisch von Primzahlpotenzordnung. Ist $X \leq M$, so folgt aus $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$, daß $X \leq B$ ist; dann ist $H = A \times X$ und X die einzige (zyklische) Untergruppe von Primzahlpotenzordnung mit $H = AX$. Ist $X \not\leq M$, so gilt für jedes Y mit $AX = AY$ offenbar $MX = BAX = BAY = MY$; da M sm G ist, existieren nach 2.5 höchstens zwei solche zyklischen Y von Primzahlpotenzordnung. Nach Satz 2.5 ist A sm G; genauso B sm G.

Seien nun umgekehrt A und B supermodular in G. Dann sind A und B permutabel in G, also auch $A \cup B = M$. Sei $M < H = MX$ mit X zyklisch von Primzahlpotenzordnung p^n. Nach 4.1(a) ist $A \leq N_G(X)$; genauso $B \leq N_G(X)$, also $X \trianglelefteq H$. Ist $p \notin \pi(M)$, so ist auch $M \trianglelefteq H$ nach [7, Lemma 6.2.15], und X ist die einzige zyklische Untergruppe von Primzahlpotenzordnung mit $H = M \times X$. Ist $p \in \pi(M)$ und etwa $p \in \pi(B)$, so ist $p \notin \pi(A)$, also $A \leq C_G(X)$ nach 4.1(b). Es folgt $H = ABX = A \times BX$. Ist also $Y \leq G$ zyklisch von

Primzahlpotenzordnung mit $H = MY$, so ist $|Y : Y \cap M| = |H : M|$ eine p-Potenz, also Y eine p-Gruppe und dann $Y \leq BX$. Es folgt

$$BX = BX \cap H = BX \cap MY = (BX \cap M)Y = BY\,,$$

da $\pi(BX) \cap \pi(A) = \emptyset$. Da B sm G ist, existieren höchstens zwei solche Y, und nach Satz 2.5 ist M sm G. $\square$

Das vorstehende Lemma zeigt, daß die Faktoren $M \cap P$ und Q aus 4.4 supermodular in G sind, und daß umgekehrt das direkte Produkt einer supermodularen 2-Untergruppe mit einer supermodularen $2'$-Untergruppe supermodular ist. Da wir die $2'$-Gruppen und diejenigen, die 2-Sylowuntergruppen von G enthalten, in Satz 4.3 charakterisiert haben, genügt es also, die 2-Gruppen M mit $1 < M < P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ zu behandeln. Offenbar hat ein solches Paar M, P eine der Eigenschaften (i) – (vi) aus Satz 3.3, wenn M sm P ist. Eigenschaft (i) wurde in Satz 2.6 erledigt; Eigenschaft (iv) und die restlichen Fälle behandeln wir getrennt.

Satz 4.6 *Sei G eine endliche Gruppe und $M \leq G$ elementarabelsch der Ordnung 4. Genau dann ist M supermodular in G, wenn $M = \{x \in G \mid x^2 = 1\}$ und $|G : C_G(M)| \leq 2$ ist.*

Beweis: Sei zuerst M sm G. Existierte $g \in G \setminus M$ mit $o(g) = 2$, so wäre $M \leq N_G(\langle g \rangle)$ nach 4.1(a), also $M\langle g \rangle = M \times \langle g \rangle$ elementarabelsch der Ordnung 8. Ist dann $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ mit $M\langle g \rangle \leq P$, so ist $1 < M < P$, M sm P und $|\Omega(P)| \geq 8$, ein Widerspruch zu 3.5(d). Also ist $M = \{x \in G \mid x^2 = 1\}$. Nach 4.2 ist $G/C_G(M)$ eine 2-Gruppe, also $|G/C_G(M)| \leq 2$, da $|M| = 4$.

Sei umgekehrt $M = \{x \in G | x^2 = 1\}$ und $|G : C_G(M)| \leq 2$; sei $M < H = MX$ mit X zyklisch der Ordnung p^r. Ist $p \neq 2$, so ist $X \leq C_G(M)$, also $H = M \times X$ und X die einzige zyklische Untergruppe von Primzahlpotenzordnung mit $H = MX$. Ist $p = 2$, so ist $H = MX \leq P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ und $M = \Omega(P)$. Nach 3.3 ist M sm P, und nach 2.5 existieren auch hier höchstens 2 zyklische $Y \leq P$ mit $H = MY$. Nach 2.5 ist M sm G. $\square$

Satz 4.7 *Sei G eine endliche Gruppe, $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $1 < M < P$ und M nicht elementarabelsch mit $|M| \leq 4$. Genau dann ist M supermodular in G, wenn M supermodular in P ist und G ein normales 2-Komplement besitzt, das von M zentralisiert wird.*

Beweis: Sei zuerst M sm G. Wir haben zu zeigen, daß G ein normales 2-Komplement besitzt; das wird nach 4.1(b) von M zentralisiert. Da M sm P und $1 < M < P$ ist, haben M, P eine der Eigenschaften (ii), (iii), (v) oder (vi) aus 3.3. Nach 3.5(a) ist M abelsch, also $O^2(G) \leq C_G(M)$ nach 4.2. Damit ist $C_P(M)$ eine 2-Sylowgruppe von $C_G(M)$, die in den

Fällen (ii) und (iii) zyklisch, im Fall (v) abelsch vom Typ $(2^n, 2)$ oder $(2^{n-1}, 2)$ und im Fall (vi), da dort $\langle a, b^2 \rangle$ abelsch ist, wieder abelsch vom Typ $(2^n, 2)$ ist. Nach [2, S. 419] hat $C_G(M)$ ein normales 2-Komplement N. Dann ist $N = O^2(G)$ ein normales 2-Komplement von G.

Sei umgekehrt N ein normales 2-Komplement in G, M sm P und $[N, M] = 1$. Nach 3.5(c) ist $M \trianglelefteq P$ und wegen $[M, N] = 1$ dann $M \trianglelefteq G$. Sei $M < H = MX$ mit X zyklisch der Ordnung p^r. Ist $p \neq 2$, so ist $X \leq N$, also $H = M \times X$. Ist $p = 2$, so ist o.B.d.A. $H \leq P$ und M hat höchstens 2 zyklische Supplemente in H. Nach 2.5 ist M sm G. $\square$

In der Situation des Satzes 4.6, also im Fall (iv) von Satz 3.3, braucht G kein normales 2-Komplement zu besitzen: $SL(2, 3) \times Z_2$ ist ein Beispiel.

5 Supermodulare Untergruppen beliebiger Gruppen

Wir beweisen zum Abschluß eine Charakterisierung supermodularer Untergruppen beliebiger Gruppen, die der in [8] gegebenen Charakterisierung der $\cup$-distributiven Untergruppen ähnelt. Wir beginnen mit den Torsionsgruppen und bezeichnen für $p \in \mathbb{P}$ und $M \leq G$ mit M_p die Menge der p-Elemente von M und mit $\pi(G \setminus M)$ die Menge der Primzahlen q, zu denen es ein q-Element in $G \setminus M$ gibt.

Satz 5.1 *Sei G eine Torsionsgruppe und $1 < M < G$. Genau dann ist M supermodular in G, wenn M die folgenden drei Eigenschaften hat:*

(a) *M ist permutabel in G.*

(b) *Für jedes $p \in \pi(G \setminus M)$ ist $M_p \leq Z(M)$.*

(c) *Ist $u \in G \setminus M$ ein p-Element, so gilt entweder*

  (i) *$M_p \leq \langle u \rangle \leq C_G(M)$ oder*

  (ii) *$p = 2,\ M \leq N_G(\langle u \rangle),\ |M_2\langle u \rangle : \langle u \rangle| = 2$ und $M_2\langle u \rangle$ ist isomorph zur Q_8, abelsch vom Typ $(2^k, 2)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ oder verbandsisomorph dazu.*

Beweis: Sei zuerst M sm G. Nach Satz 2.3 gilt dann (a). Sei $p \in \pi(G \setminus M)$ und $u \in G \setminus M$ ein p-Element. Ist $p \notin \pi(M)$, so ist $M_p = 1 \leq Z(M) \cap \langle u \rangle$ und $M \leq C_G(u)$ nach 4.1(b); somit gelten (b) und (i) aus (c).

Sei also $p \in \pi(M)$ und zuerst $p > 2$. Dann ist nach 4.1(b) erneut $M \leq C_G(u)$. Sei $1 \neq x \in M$ ein p-Element. Dann ist $P := \langle x, u \rangle$ eine endliche p-Gruppe mit $x \in M \cap P < P$. Nach 3.2 ist P zyklisch. Da $\langle u \rangle \not\leq M \cap P$ ist, gilt $M \cap P \leq \langle u \rangle$, also $x \in \langle u \rangle$. Damit ist $M_p \leq \langle u \rangle \leq C_G(M)$ und insbesondere $M_p \leq Z(M)$, d.h., es gelten (b) und (c).

Sei schließlich $p = 2 \in \pi(M)$ und sei P eine 2-Sylowgruppe von M. Nach 4.1(a) ist $M \leq N_G(\langle u \rangle)$, also $S := P\langle u \rangle$ eine 2-Gruppe und $|S : P| = 2^r$ endlich. Da P eine maximale 2-Untergruppe von M ist, ist $M \cap S = P$. Jede Untergruppe T von S mit $T \not\leq M$ wird von ihren nicht in M enthaltenen zyklischen Untergruppen erzeugt; jede solche wird nach 4.1(a) von M normalisiert und dann von $O^2(M)$ zentralisiert. Insbesondere wird S von $O^2(M)$ zentralisiert, und M normalisiert S und alle von P verschiedenen Untergruppen vom Index 2^r in S, also auch P. Damit ist $P = M_2$, die Menge der 2-Elemente von M, und $O^2(M)P = M$. Ist $P \leq \langle u \rangle$, so wird u von $O^2(M)P = M$ zentralisiert, d.h., es gilt $M_2 \leq \langle u \rangle \leq C_G(M)$, was zu zeigen ist. Sei daher $P \not\leq \langle u \rangle$. Da $P = M \cap S$ sm S und $1 < P < S$ ist, ist P nach Korollar 3.5 abelsch, wird also von $O^2(M)P = M$ zentralisiert, d.h., es gilt (b). Ferner existiert $v \in \langle u \rangle \setminus P$ mit $o(v) = 2|P \cap \langle u \rangle|$, und aus Lemma 3.4 folgt $|P| = 2|P \cap \langle u \rangle|$. Damit ist $|S : \langle u \rangle| = |P\langle u \rangle : \langle u \rangle| = 2$, und die Aussagen über die Struktur von $S = M_2\langle u \rangle$ folgen aus Satz 3.3. Denn wegen $u \notin P \not\leq \langle u \rangle$ ist S nicht zyklisch, und wäre $S \simeq Q_{2^n}$ mit $n \geq 4$, so wäre $P = Z_2(S) \leq \langle u \rangle$; die Gruppe in (vi) aus Satz 3.3 schließlich hat keinen zyklischen Normalteiler vom Index 2. Es bleiben die in (ii) von (c) angegebenen Möglichkeiten.

Sei umgekehrt (a) – (c) erfüllt und sei $H = M\langle u \rangle > M$ mit $o(u) = p^n$. Dann ist $u \in G \setminus M$, und nach Voraussetzung gilt (i) oder (ii). Ist $M_p \leq \langle u \rangle \leq C_G(M)$, so ist $M_p = M \cap \langle u \rangle \leq Z(M)$ und somit $M_p \trianglelefteq H$ und $H/M_p = M/M_p \times \langle u \rangle/M_p$. Da M/M_p eine p'-Gruppe ist, ist $\langle u \rangle = H_p$ das einzige Supplement von M in H, das eine Primärgruppe ist. Sei nun (ii) erfüllt. Dann ist $p = 2$ und $\langle u \rangle \trianglelefteq H$. Ist also P eine 2-Sylowgruppe von H, so ist $\langle u \rangle \leq P$, also $P = (M \cap P)\langle u \rangle$ und $M \cap P \leq M_2$; es ist also $P = M_2\langle u \rangle$ die einzige 2-Sylowgruppe von H. Nach (ii) ist $|P : \langle u \rangle| = 2$ und $P \simeq Q_8$, abelsch vom Typ $(2^k, 2)$ oder verbandsisomorph dazu; in allen drei Fällen gibt es nur 2 solche zyklischen Supplemente zu M_2 in P. Nach Satz 2.5 ist M sm G. □

Aus Satz 5.1 erhalten wir, wie in der Einleitung angekündigt, daß eine supermodulare Untergruppe M einer Torsionsgruppe G $\cup$-distributiv ist, wenn sie eine $2'$-Gruppe ist oder alle 2-Elemente von G enthält.

Korollar 5.2 *Eine Untergruppe M der Torsionsgruppe G mit $2 \notin \pi(M) \cap \pi(G \setminus M)$ ist genau dann supermodular in G, wenn sie $\cup$-distributiv in G ist.*

Beweis: Nach 1.3 ist jede $\cup$-distributive Untergruppe supermodular. Sei umgekehrt M supermodular in G und $2 \notin \pi(M) \cap \pi(G \setminus M)$. Ist $u \in G \setminus M$ ein p-Element, so kann (ii) aus 5.1(c) nicht gelten, da dort $M_2 \neq 1$ und dann $p = 2 \in \pi(M) \cap \pi(G \setminus M)$ ist. Also gilt $M_p \leq \langle u \rangle \leq C_G(M)$. Daraus folgt insbesondere $M \trianglelefteq G$ und nach [8, Chapter III, Theorem 6] ist M $\cup$-distributiv in G. □

Für Gruppen mit Elementen unendlicher Ordnung ist unsere Charakterisierung etwas komplizierter, wird aber ein ähnliches Korollar liefern.

Satz 5.3 *Sei G eine Gruppe mit Elementen unendlicher Ordnung und sei $M < G$ mit $|M| > 2$. Genau dann ist M supermodular in G, wenn gilt:*

(a) *Alle Elemente endlicher Ordnung von G liegen in M.*
(b) *$M \trianglelefteq G$.*
(c) *G/M ist eine Torsionsgruppe.*
(d) *Sind $u, v \in G$ Elemente unendlicher Ordnung, so ist $\langle u\rangle \cap \langle v\rangle \neq 1$.*
(e) *Es ist $\pi(M) \cap \pi(G/M) \subseteq \{2\}$; gilt $\pi(M) \cap \pi(G/M) = \{2\}$, so ist $|M_2| = 2$.*
(f) *Ist $u \in G \setminus M$ und $a \in M$, so existiert ein $u_0 \in C_{\langle u\rangle}(a)$ mit $uM = u_0M$.*

Beweis: Sei zuerst M supermodular in G. Nach 2.3 ist dann M permutabel in G, und wir zeigen (a) – (f) in einer Reihe von Schritten.

Zum Beweis von (a) betrachten wir ein $x \in G \setminus M$ mit minimaler endlicher Ordnung. Dann ist $o(x) = p^r$ für eine Primzahl p und $x^p \in M$; ist also $H = M\langle x\rangle$, so ist $|H : M| = |\langle x\rangle : M \cap \langle x\rangle| = p$. Nach Voraussetzung existiert ein $g \in G$ mit $o(g) = \infty$. Wegen M sm G ist $g^m \in M$ für ein $m \in \mathbb{N}$ nach 2.2, und $\langle x\rangle$ hat höchstens 2 Konjugierte unter M. Also wird $\langle x\rangle$ von g^{2m} normalisiert und dann von $a = g^{2mn}$ zentralisiert für geeignetes $n \in \mathbb{N}$. Da $o(a) = \infty$ und $o(x) = p^r$, ist $F = \langle a, x\rangle = \langle a\rangle \times \langle x\rangle$ und $M \cap F = \langle a\rangle \times \langle x^p\rangle$. Ist $N = \langle a^{p^2}\rangle \times \langle x^p\rangle$, so ist nach 2.4 und 1.2 also $(M \cap F)/N$ sm F/N, ferner F/N abelsch vom Typ (p^2, p) und $(M \cap F)/N$ zyklisch der Ordnung p^2. Das ist nach 3.2 und 3.3 unmöglich. Der Widerspruch zeigt, daß $G \setminus M$ nur Elemente unendlicher Ordnung enthält, d.h., (a) gilt.

Ist $x \in G$ und $H = M\langle x\rangle$ sowie $a \in M$, so ist $L(\langle x\rangle, \langle ax\rangle, \langle a^{-1}x\rangle; M) = M\langle x\rangle = H$ und

$$R(\langle x\rangle, \langle ax\rangle, \langle a^{-1}x\rangle; M) = M \cup (\langle x\rangle \cap \langle ax\rangle) \cup (\langle ax\rangle \cap \langle a^{-1}x\rangle) \cup (\langle x\rangle \cap \langle a^{-1}x\rangle) \leq MC_G(a^2),$$

da $\langle ax\rangle \cap \langle a^{-1}x\rangle$ das Element $ax(a^{-1}x)^{-1} = a^2$ zentralisiert und die anderen beiden Durchschnitte a zentralisieren. Somit gilt:

$$\text{Für } H = M\langle x\rangle \text{ und } a \in M \text{ ist } H = MC_H(a^2)\,. \tag{22}$$

Angenommen, M wäre nicht normal in G. Dann existierte ein $x \in G \setminus N_G(M)$; sei $H = M\langle x\rangle$. Da $o(x, M)$ nach 2.2 endlich ist, existiert ein $a \in M$ mit $a^x \notin M$. Nach (a) ist $o(a) = o(a^x) = \infty$, und nach (22) ist $H = C_H(a^2)M$. Also existiert ein $z \in C_H(a^2)$ mit $a^z \notin M$. Dann ist $\langle a^2\rangle = \langle a^2\rangle^z \leq \langle a^z\rangle$ vom Index 2; ist also $F = \langle a, a^z\rangle$, so ist $F/\langle a^2\rangle$ eine Diedergruppe, da von den Involutionen $a\langle a^2\rangle$ und $a^z\langle a^2\rangle$ erzeugt. Wegen $F \leq M\langle a^z\rangle$ und $|M\langle a^z\rangle : M| = |\langle a^z\rangle : \langle a^2\rangle| = 2$ ist $(M \cap F)/\langle a^2\rangle$ nach 2.4 und 1.2 eine supermodulare Untergruppe vom Index 2 in der Diedergruppe $F/\langle a^2\rangle$. Diese hat daher höchstens 2 nicht in

$(M\cap F)/\langle a^2\rangle$ gelegene minimale Untergruppen und folglich die Ordnung 8 oder 4, nach Satz 3.3 also die Ordnung 4. Dann ist $M\cap F = \langle a\rangle$ und somit $\langle a\rangle/\langle a^8\rangle$ sm $F/\langle a^8\rangle$ vom Index 2 im Widerspruch zu Satz 3.3. Damit ist (b) bewiesen, und (c) folgt aus Lemma 2.2.

Zum Beweis von (d) brauchen wir zwei Vorbereitungen. Existierten Elemente $a \in M$ und $b \in C_G(a) \setminus M$ mit $o(a) = \infty$ und $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle = 1$, so wäre $F = \langle a, b\rangle = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ und $M\cap F$ sm F mit $F = (M\cap F)\langle b\rangle$. Sind also $B = \langle b\rangle$, $C = \langle ab\rangle$ und $D = \langle a^2 b\rangle$, so ist $B\cap C = B\cap D = C\cap D = 1$, da $o(b) = \infty$ nach (a), und somit $R(B, C, D; M\cap F) = M\cap F$; aber $L(B, C, D; M\cap F) = F$, ein Widerspruch. Es gibt also keine solchen Elemente a, b, d.h., es ist

$$\langle a\rangle\cap\langle b\rangle \neq 1 \text{ für alle } a \in M \text{ mit } o(a) = \infty \text{ und } b \in C_G(a) \setminus M\,. \tag{23}$$

Sei nun $|H : M| = p \in \mathbb{P}$ und seien $x, y \in H \setminus M$. Wegen $y^p \in M$ ist $xy^p \in H \setminus M$ und somit $L(\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle xy^p\rangle; M) = H$. Wäre $\langle x\rangle\cap\langle y\rangle = 1$, so müßte also $\langle u\rangle = \langle x\rangle\cap\langle xy^p\rangle \not\leq M$ oder $\langle v\rangle = \langle y\rangle\cap\langle xy^p\rangle \not\leq M$ sein. Im ersten Fall wird u von x und xy^p, also auch von $y^p \in M$ zentralisiert; mit (23) folgt $\langle u\rangle \cap \langle y^p\rangle \neq 1$, also $\langle x\rangle\cap\langle y\rangle \neq 1$, ein Widerspruch. Im zweiten Fall wird genauso v von x zentralisiert, und mit (23) folgt $\langle v\rangle\cap\langle x^p\rangle \neq 1$, derselbe Widerspruch. Es ist also

$$\langle x\rangle\cap\langle y\rangle \neq 1, \text{ falls } x, y \in H \setminus M \text{ und } |H : M| \in \mathbb{P} \text{ ist.} \tag{24}$$

Seien nun $u, v \in G$ mit $o(u) = o(v) = \infty$. Nach 2.2 sind geeignete Potenzen von u und v in M enthalten; um $\langle u\rangle\cap\langle v\rangle \neq 1$ zu zeigen, können wir also $u, v \in M$ annehmen. Wegen $M < G$ und (c) existiert $H \leq G$ mit $|H : M| \in \mathbb{P}$. Nach (22) existiert $x \in C_H(u^2) \setminus M$, und nach (23) ist $\langle u\rangle\cap\langle x\rangle \neq 1$; genauso existiert $y \in C_H(v^2) \setminus M$ mit $\langle v\rangle\cap\langle y\rangle \neq 1$. Da nach (24) auch $\langle x\rangle\cap\langle y\rangle \neq 1$ ist, folgt $\langle u\rangle\cap\langle v\rangle \neq 1$. Damit ist (d) gezeigt, und aus (d) folgt sofort:

$$\text{Ist } x \in N \trianglelefteq F \leq G \text{ und } o(x) = \infty, \text{ so ist } F/N \text{ eine Torsionsgruppe.} \tag{25}$$

Denn für jedes $y \in F$ mit $o(y) = \infty$ ist $y^n \in \langle x\rangle \leq N$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $o(yN)$ endlich.

Sei $p \in \pi(M)\cap\pi(G/M)$. Dann existieren $a \in M$ mit $o(a) = p$ und $H \leq G$ mit $M \leq H$ und $|H : M| = p$. Nach (22) existiert $x \in C_H(a^2)$ mit $H = M\langle x\rangle$. Wäre $p > 2$, so wäre $F = \langle a, x\rangle = \langle a\rangle \times \langle x\rangle$ und $M\cap F = \langle a\rangle \times \langle x^p\rangle$; und nach 2.4 und 1.2 wäre $(M\cap F)/\langle x^p\rangle$ supermodular in $F/\langle x^p\rangle$, im Widerspruch zu 3.2. Also ist $p = 2$ und die erste Aussage in (e) bewiesen.

Sei nun $\pi(M)\cap\pi(G/M) = \{2\}$ und sei $U \neq 1$ eine endliche Untergruppe von M, die von 2-Elementen erzeugt wird; sei weiter $|H : M| = 2$, $H = M\langle x\rangle$ und $X = \langle x\rangle$. Nach (a) ist $o(x) = \infty$ und nach (d) ist dann $D := \bigcap_{u\in U} X^u \neq 1$, also unendlich zyklisch. Sei N die Untergruppe vom Index 2 in D und $F = N_H(N)$. Offenbar ist $X \leq F$ und $D^U = D$, also $U \leq F$. Nach (25) ist F/N eine Torsionsgruppe, in der $(M\cap F)/N$ wieder supermodular vom Index 2 ist. Da N unendlich zyklisch und U endlich ist, ist $U\cap N = 1$, also $UN/N \simeq U$ von 2-Elementen erzeugt. Da $UN/N \leq (M\cap F)/N$, liegen diese 2-Elemente nach 5.1(b) im Zentrum von $(M\cap F)/N$. Insbesondere ist UN/N abelsch, also eine 2-Gruppe, und normalisiert $\langle x^2\rangle/N \leq (M\cap F)/N$. Somit ist $\langle x^2\rangle \leq D$ und X/N eine 2-Gruppe, also $xN \in F/N \setminus (M\cap F)/N$ ein 2-Element. Wegen $UN/N \not\leq X/N$ muß (ii) aus 5.1(c) für xN gelten, d.h. insbesondere $|UX : X| = 2$. Da $U\cap X = 1$ ist, folgt $|U| = 2$.

Damit ist gezeigt, daß M kein Element der Ordnung 4 enthält und daß je zwei verschiedene Involutionen a, b in M eine unendliche Diedergruppe erzeugen. Angenommen, dieser Fall tritt auf, d.h., es existieren Involutionen $a, b \in M$ mit $\langle a, b\rangle \simeq D_\infty$. Nach (d) ist $\langle ab\rangle\cap\langle x\rangle = \langle y\rangle$ unendlich zyklisch; sei $N = \langle y^4\rangle$ und $F = N_H(N)$. Dann ist $a, b, x \in F$ und $(M\cap F)/N$ sm F/N vom Index 2. Nach (25) ist F/N eine Torsionsgruppe, und nach 5.1(b) ist $aN \in Z((M\cap F)/N)$; aber aN invertiert $\langle y\rangle/N$, ein Widerspruch. Damit ist schließlich auch gezeigt, daß es keine zwei verschiedenen Involutionen in M gibt, d.h., es gilt (e).

Zum Beweis von (f) können wir annehmen, daß $o(u, M) = p^r$ eine Primzahlpotenz ist; denn gilt die Aussage für die Primärkomponenten von $\langle u\rangle/\langle u\rangle\cap M$, so auch für $\langle u\rangle$. Sei $H = M\langle u\rangle$ und K/M die maximale Untergruppe von H/M. Ist $a \in \langle u\rangle$, so tut $u_0 = u$ das Verlangte; sei also $a \notin \langle u\rangle$ und damit $\langle u\rangle \neq \langle au\rangle$. Sei $N = \langle u\rangle\cap\langle au\rangle\cap K$ und $F = \langle u\rangle\cup\langle au\rangle$. Dann ist $N \leq Z(F)$, und nach (a), (d) und (25) ist $N \neq 1$ und F/N eine Torsionsgruppe. Da $u \notin K$ ist, ist $K\cap F \trianglelefteq F$ vom Index p. Nach Lemma 1.9 ist K sm H und somit wieder $(K\cap F)/N$ sm F/N. Ist $\langle u_1\rangle/N$ die p-Sylowgruppe der endlichen zyklischen Gruppe $\langle u\rangle/N$, so ist $\langle u_1\rangle/N \not\leq (K\cap F)/N$, und somit wird $\langle u_1\rangle/N$ nach 5.1(c) von $(K\cap F)/N$ normalisiert. Da $a \in K\cap F$, folgt $\langle u_1\rangle^a = \langle u_1\rangle$, und wegen $o(u_1) = \infty$ kann u_1 von a nur zentralisiert oder invertiert werden; da $N \leq Z(F)$, folgt $u_1^a = u_1$. Da $\langle u_1\rangle/N$ die p-Sylowgruppe von $\langle u\rangle/N$ ist, ist $u_1 = u^k$ mit $(k, p) = 1$. Somit existieren $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $1 = sp^r + tk$, also $u = u^{sp^r}u^{tk} = (u^{p^r})^s u_1^t$. Wegen $u^{p^r} \in M$ ist $uM = u_1^t M$ und $au_1^t = u_1^t a$, d.h., $u_0 = u_1^t$ tut das Verlangte. Damit sind alle Eigenschaften (a) – (f) bewiesen.

Sei nun umgekehrt (a) – (f) erfüllt und seien $B, C, D \leq G$ und $x \in L(B, C, D; M) = MB\cap MC\cap MD$. Nach (c) ist $o(xM) < \infty$; wir wollen $x \in R(B, C, D; M)$ zeigen und können dazu offenbar annehmen, daß $o(xM) = p^r$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $r \in \mathbb{N}$ ist. Sei $H = M\langle x\rangle$. Da $H \leq MB$ ist, gilt $H = M(H\cap B)$, und somit existieren $a_1 \in M$ und $b \in H\cap B$ mit $x = a_1 b$; genauso existieren $a_2, a_3 \in M$ und $c \in H\cap C$, $d \in H\cap D$ mit $x = a_2 c = a_3 d$. Offenbar gilt:

$$\text{Ist } b^\alpha \in \langle c\rangle \text{ mit } (p, \alpha) = 1, \text{ so ist } x \in R(B, C, D; M). \tag{26}$$

Denn dann existieren $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $1 = s\alpha + tp^r$, und wegen $b^{p^r} \in M$ folgt

$$x \in Mb = Mb^{s\alpha} \subseteq M(B\cap C\cap MD) \leq R(B, C, D; M).$$

Nach Voraussetzung (f) existiert zu $a = a_1^{-1}a_2 \in M$ ein $c_0 \in \langle c\rangle$ mit $cM = c_0M$ und $ac_0 = c_0a$. Wegen $b = ac$ ist dann auch $bc_0 = c_0b$, und nach (a) und (d) ist $\langle b\rangle \cap \langle c_0\rangle \neq 1$; sei $\alpha \in \mathbb{N}$ minimal mit $b^\alpha \in \langle c_0\rangle$, also $b^\alpha = c_0^\gamma$ für ein $\gamma \in \mathbb{Z}$. Da $Mb = Mc = Mc_0$ ist, gilt $c_0b^{-1} \in M$ und somit $b^{\alpha-\gamma} = c_0^\gamma b^{-\gamma} = (c_0b^{-1})^\gamma \in M$; wegen $o(bM) = p^r$ ist $\alpha \equiv \gamma \,(\mathrm{mod}\, p^r)$. Ist $(p, \alpha) = 1$, so sind wir nach (26) fertig; sei also $\alpha = p\beta$ mit $\beta \in \mathbb{N}$. Dann ist $\gamma = p\delta$ mit $\delta \in \mathbb{Z}$, und es folgt $(b^\beta c_0^{-\delta})^p = b^\alpha c_0^{-\gamma} = 1$. Die Minimalität von α liefert $b^\beta \neq c_0^\delta$, d.h. $b^\beta c_0^{-\delta}$ ist ein Element der Ordnung p in G. Nach (a) und (e) ist $p = 2$ und $b^\beta = c_0^\delta z$, wo z das Element der Ordnung 2 in M ist. Es folgt $b^{\beta-\delta} = (c_0b^{-1})^\delta z \in M$ und somit $\beta \equiv \delta \,(\mathrm{mod}\, 2^r)$. Wäre also β oder δ gerade, so folgte $\beta = 2\varepsilon$ und $\delta = 2\varrho$ mit $\varepsilon, \varrho \in \mathbb{Z}$ und $(b^\varepsilon c_0^{-\varrho})^4 = b^\alpha c_0^{-\gamma} = 1$. Nach (a) und (e) ist z das einzige nichttriviale 2-Element in G; es folgte $b^\varepsilon = c_0^\varrho z^\lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{Z}$ und dann der Widerspruch $b^\beta = c_0^\delta$. Somit gilt

$$b^\beta = c_0^\delta z \quad \text{mit } \beta, \delta \text{ ungerade.} \tag{27}$$

Arbeiten wir genauso mit d statt b, so erhalten wir ungerade ganze Zahlen ν, μ und $c_1 \in \langle c\rangle$ mit $Mc = Mc_1$ und $d^\nu = c_1^\mu z$. Wegen $Mc_1 = Mc = Mc_0$ ist $c_0 = c^\kappa$ und $c_1 = c^\lambda$ mit κ, λ ungerade, und es folgt

$$b^{\beta\mu\lambda}z = (b^\beta z)^{\mu\lambda} = c_0^{\delta\mu\lambda} = c^{\kappa\delta\mu\lambda} = c_1^{\kappa\delta\mu} = (d^\nu z)^{\kappa\delta} = d^{\nu\kappa\delta}z\,,$$

also $b^{\beta\mu\lambda} = d^{\nu\kappa\delta} \in \langle d\rangle$. Da $\beta\mu\lambda$ ungerade ist, liefert (26) mit d statt c, daß $x \in R(B, C, D; M)$ ist. Damit ist M sm G und Satz 5.3 bewiesen. □

Korollar 5.4 *Sei G eine Gruppe mit Elementen unendlicher Ordnung und sei $M \trianglelefteq G$ mit $|M| > 2$. Enthält M oder G/M kein Element der Ordnung 2, so ist M genau dann supermodular in G, wenn M $\cup$-distributiv in G ist.*

Beweis: Ist M sm G, so gelten (a) – (f) von Satz 5.3. Unsere Voraussetzung impliziert $2 \notin \pi(M) \cap \pi(G/M)$, und damit liefert (e), daß $\pi(M) \cap \pi(G/M) = \emptyset$ ist. Nach [8, Chapter III, Theorem 7] ist M $\cup$-distributiv in G. □

Ist T eine Torsionsgruppe ohne Element der Ordnung 2 und $G = \langle a\rangle \times T \times \langle z\rangle$ mit $o(a) = 2$ und $o(z) = \infty$, so hat $M = \langle a\rangle \times T \times \langle z^2\rangle$ offenbar die Eigenschaften (a) – (f) aus Satz 5.3, ist also eine supermodulare Untergruppe von G mit $\pi(M) \cap \pi(G/M) = \{2\}$. Wegen

$$M(\langle z\rangle \cap \langle az\rangle) = M < G = M\langle z\rangle \cap M\langle az\rangle$$

ist M nicht $\cup$-distributiv in G.

Literatur

[1] **Higman, D.G. :** *Lattice homomorphisms induced by group homomorphisms.* Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 467-478 (1951)

[2] **Huppert, B. :** *Endliche Gruppen I.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1967)

[3] **Konvisser, M.W. :** *2-groups which contain exactly three involutions.* Math. Z. **130**, 19-30 (1973)

[4] **Olshanskii, A.Yu. :** *Geometry of defining relations in groups.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1991)

[5] **Robinson, D.J.S. :** *A course in the theory of groups.* GTM 80, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin (1982)

[6] **Sato, S. :** *On the lattice homomorphisms of infinite groups I.* Osaka Math. J. **4**, 229-234 (1952)

[7] **Schmidt, R. :** *Subgroup lattices of groups.* de Gruyter Verlag, Berlin New York (1994)

[8] **Suzuki, M. :** *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1956)

[9] **Vasantha Kandasamy, W.B. :** *Supermodular subgroups in finite groups.* Rostock. Math. Kolloq. **47**, 27-30 (1994)

[10] **Zappa, G. :** *Sulla condizione perchè un omomorfismo ordinario sia anche un omomorfismo strutturale.* Giorn. Mat. Battaglini (4) **78**, 182-192 (1949)

eingegangen: 15. April 1997

Autor:

Roland Schmidt
Mathematisches Seminar
Universität Kiel
Ludewig-Meyn-Straße 4
24098 Kiel
Germany

Rostock. Math. Kolloq. **53**, 51–59 (1999)

Subject Classification (AMS)
34A37

Albena A. Kosseva; Stepan I. Kostadinov; Petr P. Zabreiko

Stability of Linear Impulse Differential Equations with Unbounded Operator

ABSTRACT. This paper marks the beginning of the consideration of linear impulse differential equations with unbounded operators. Sufficient conditions for existence of some stabilities are founded.

KEY WORDS. Impulse differential equations with unbounded operators - theory and stability.

1 Introduction

The papers [1], [8], [9], [2] and [6] mark the beginning of the qualitative theory of impulse differential equations in an arbitrary Banach space. The present paper initiates the study of linear impulse differential equations with unbounded operators.

2 Problem statement

Let X be a complex Banach space with norm $|\cdot|$ and identity operator I. We denote by $\mathfrak{L}(X)$ the space of all linear bounded operators acting on X.

Let $T = \{t_n\}$ be a sequence of points satisfying the condition $t_n < t_{n+1}$.

We shall consider the linear impulse differential equation:

$$x' = Ax \text{ for } t \neq t_n \tag{1}$$

$$x(t_n^+) = Q_n\, x(t_n) \text{ for } t = t_n\,. \tag{2}$$

We shall assume that one of following two conditions holds:

H1 $A : D(A) \to X$ is a generating operator of the strongly continuous semi-group $U(t)$ $(U(\cdot) : [0,\infty) \to \mathfrak{L}(X))$, Q_n $(n = 1, 2, ...)$ are linear operators and $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$;

H2 $A : D(A) \to X$ is a generating operator of the group $U(t)$ $(U(\cdot) : (-\infty,\infty) \to \mathfrak{L}(X))$, Q_n $(n = \pm 1, \pm 2, ...)$ are linear operators, $\lim\limits_{n\to\pm\infty} t_n = \pm\infty$.

We assume, that all considered functions are continuous from the left.

Remark 1 We shall note, that $U(t)$ is a group if for example X is a complex Hilbert space and the operator A is equal to iB, where B is a selfadjoint operator (see for example [7], 464). For other examples see [5], 829.

Definition 1 *The function $x(t)$ is said to be a solution of the impulse differential equation (1), (2) if the following conditions are satisfied:*

1. $x(t) \in D(A)$;
2. *For all $t \neq t_n$ there exists the strong derivative $x'(t)$;*
3. *$x(t)$ satisfies (1) for $t \neq t_n$ and (2) for $t = t_n$.*

We consider the Cauchy problem (1), (2) with initial condition

$$x(\tau) = x_\tau \tag{3}$$

at the point $t = \tau$.

Definition 2 *The Cauchy problem (1)-(3) is correct on $[0,\infty)$ if:*

1. *For all $x_0 \in D(A)$ there exists a unique solution of the impulse differential equation (1), (2);*
2. *This solution depends continuously on the initial conditions, i.e. $x_k(0) \to 0$ $(k \to \infty)$ $(x_k(0) \in D(A))$ implies $x_k(t) \to 0$ $(k \to \infty)$ for all $t \in [0,\infty)$.*

In the present paper we find a formula for the solution of problem (1)-(3) and sufficient conditions for some types of stability. We shall extend some results, when A is a sectorial operator (see [4], 376).

3 Main results

We introduce the conditions:

H3 For any n we have either $Q_nU(t) : D(A) \to D(A)$ or $U(t)Q_n : D(A) \to D(A)$;

H4 For any n we have either $Q_nU(t) \in \mathfrak{L}(X)$ or $U(t)Q_n \in \mathfrak{L}(X)$.

Theorem 1 *Let conditions* H3 *and* H4 *be satisfied for* $n = 1, 2, ...$

Then the solution of problem (1)-(3) *on* $[0, \infty\ )$ *is given by the formula* $x(t) = V(t, \tau)x_\tau$ $(\tau < t)$*, where*

$$V(t, \tau) = U(t - t_n) \prod_{j=n}^{p+1} Q_jU(t_j - t_{j-1})Q_pU(t_p - \tau) \tag{4}$$

for $t_{p-1} < \tau \le t_p < t_n < t \le t_{n+1}$.

Proof: From conditions H3 and H4 it follows, that the operator $V(t, \tau)$ is in $\mathfrak{L}(X)$. It is immediately verified that $V(t, \tau)$ satisfies the operator equations

$$V'(t, \tau) = AV(t, \tau) \text{ for } t \ne t_n\,,\ \tau < t\,;$$

$$V(t_n^+, \tau) = Q_nV(t_n, \tau) \text{ for } t = t_n\,;$$

$$V(\tau, \tau) = I\,.$$

□

Example 1 Let the powers of A - A^{α_n} exist $(0 < \alpha_n < 1)$ and let $Q_n = A^{\alpha_n}$ $(n = 1,\ 2, ...)$. Then conditions H3 and H4 hold (see [7], 464).

Remark 2 If the operator A is sectorial (see for example [3], 895), then the semi-group $U(t)$ is analytic and condition H4 implies H3.

The following theorem is proved analogously to Theorem 1.

Theorem 2 *Let conditions* H3 *and* H4 *hold.*

Then for $t > \tau$ *the solution of problem* (1)-(3) *on* $(-\infty, \infty)$ *is given by the formula* (4)*.*

If there exist operators Q_n^{-1} $(n = \pm 1, \pm 2, ...)$ *and the following conditions*

H3′ *For any* $n = \pm 1, \pm 2, ...$ *we have either* $Q_n^{-1}U(t) : D(A) \to D(A)$ *or* $U(t)Q_n^{-1} : D(A) \to D(A)$*;*

H4 ′ *For any* $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ *we have either* $Q_n^{-1} U(t) \in \mathfrak{L}(X)$ *or* $U(t) Q_n^{-1} \in \mathfrak{L}(X)$

hold, then for $\tau > t$ *the solution of problem* (1)-(3) *is given by the formula*

$$V(t,\tau) = U(t - t_p) \prod_{j=p}^{n-1} Q_j^{-1} U(t_{j-1} - t_j) Q_n^{-1} U(t_n - \tau) \tag{5}$$

for $t_{p-1} < t \le t_p < t_n < \tau \le t_{n+1}$.

Definition 3 *The function* $x(t) = V(t,\tau) x_\tau$ $(x_\tau \in X)$ *is called a generalized solution of* (1)-(3).

Remark 3 If in Theorem 1 only condition H4 holds, then $x(t) = V(t,\tau)x_\tau$ is a generalized solution of (1)-(3).

Further we will consider only the case $t \in [0, \infty)$, i.e. the case if $U(t) (t \ge 0)$ is a semi-group.

Theorem 3 *If condition* H4 *holds, then the generalized solution* $x(t)$ *of the Cauchy problem* (1)-(3) *on the interval* $(t_n,\ t_{n+1}]$ *is an uniform limit of the solutions of* (1)-(3).

Proof: The function $x(t)$ on $(t_n,\ t_{n+1}]$ is equal to the solution of (1) with initial condition $x(t_n^+) = Q_n x(t_n)$ for all n for which $Q_n x(t_n) \in D(A)$. If $Q_n x(t_n) \notin D(A)$, then there exists a sequence of elements $\{x^{(k)}(t_n)\} \subset D(A)$ such that $x^{(k)}(t_n) \to x(t_n)$ $(k \to \infty)$. From condition H4 it follows that $x^{(k)}(t) = U(t - t_n) Q_n x^{(k)}(t_n) \to U(t - t_n) Q_n x(t_n) = x(t)$ $(k \to \infty)$ for $t \in (t_n,\ t_{n+1}]$, i.e. if $Q_n x(t_n) \notin D(A)$, then $x(t)$ is the limit of the sequence of solutions of (1) on $(t_n,\ t_{n+1}]$. □

Definition 4 *The impulse equation* (1), (2) *is stable* (*asymptotically stable; uniformly asymptotically stable; exponentially stable*) *if:*

$$\begin{gathered} \sup_{0<t<\infty} \|V(t,0)\| < \infty \ (\ \lim_{t\to\infty} |V(t,0)x_0| = 0 \ (x_0 \in X)\,; \\ \sup_{0<\tau<t<\infty} \|V(t,\tau)\| < \infty; \\ \text{there exist numbers } M,\ \theta > 0 \text{ such that} \\ \|V(t,\tau)\| \le M e^{-\theta(t-\tau)} \ (\tau < t) \ ). \end{gathered} \tag{6}$$

Let $n(t) = n$ for $t_n < t \le t_{n+1}$. We shall give sufficient conditions for stability of (1), (2).

Theorem 4 *Let the following conditions hold:*

1. *The Cauchy problem* (1)-(3) *is correct;*

2. *There exists a constant* $\gamma \in \mathbb{R}$ *such that* $\|U(t)\| \le e^{\gamma t}$, *for* $t > 0$;

3. *The operators* $Q_n \in \mathfrak{L}(X)$ $(n = 1,\ 2, ...)$*;*
4. *There exist constants* $L > 0$ *and* $\delta \in \mathbb{R}$ *such that* $q_1 q_2 ... q_{n(t)} \le L e^{\delta t}$ *, where* $q_j = \|Q_j\|$*.*

Then the generalized solution $x(t)$ $(t > 0)$ *is bounded* (*asymptotically stable*) *if* $\gamma + \delta = 0$ $(\gamma + \delta < 0)$*.*

Proof: We shall estimate the generalized solution $x(t)$ of Cauchy problem (1)-(3):

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |U(t - t_n) Q_n U(t_n - t_{n-1}) Q_{n-1} ... Q_1 U(t_1) x_0| \\ &\le e^{\gamma(t - t_n)} q_n |U(t_n - t_{n-1}) Q_{n-1} U(t_{n-1} - t_{n-2}) Q_{n-2} ... Q_1 U(t_1) x_0| \\ &\le e^{\gamma(t - t_{n-1})} q_n q_{n-1} |U(t_{n-1} - t_{n-2}) Q_{n-2} ... Q_1 U(t_1) x_0| \\ &\le ... \le e^{\gamma t} q_n q_{n-1} ... q_1 |x_0|\,. \end{aligned} \tag{7}$$

The statement of Theorem 4 is immediatly implied by (7). □

Corollary 1 *Let conditions* 1, 3 *and* 4 *of Theorem* 4 *hold and let constants* $C,\ a > 0$ *exist, such that*

$$\|U(t)\| \le C e^{-at}\,,\ \ t > 0\,. \tag{8}$$

Then for

$$\ln C \lim_{t \to \infty} \frac{n(t)}{t} = a - \delta \ \ (\ \ln C \lim_{t \to \infty} \frac{n(t)}{t} < a - \delta\ )$$

the generalized solution is bounded (*asymptotically stable*)*.*

Proof: Analogously to the proof of Theorem 4 we obtain the estimate

$$|x(t)| \le C L e^{\ln C^n} e^{(\delta - a)t} |x_0| = C L e^{\frac{n}{t} \ln C + (\delta - a)t} |x_0|\,.$$

□

Remark 4 Condition (8) is valid if the operator $-A$ is sectorial and $\mathrm{Re}\,\sigma(-A) > a > 0$, where $\sigma(-A)$ is the spectrum of $-A$.

Let $Q_n \in \mathfrak{L}(X)$. We set

$$\omega = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln \|V(t,0)\|}{t}\,, \qquad \tilde{\omega} = \overline{\lim_{\tau, t - \tau \to \infty}} \frac{\ln \|V(t,\tau)\|}{t - \tau}\,,$$

$$\omega_c = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln \|U(t)\|}{t}\,, \qquad \tilde{\omega}_c = \overline{\lim_{\tau, t - \tau \to \infty}} \frac{\ln \|U(t - \tau)\|}{t - \tau}\,,$$

$$\omega_q = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\sum\limits_{0 \le t_n < t} \ln \|Q_n\|}{t} \quad \text{and} \quad \tilde{\omega}_q = \overline{\lim_{\tau, t - \tau \to \infty}} \frac{\sum\limits_{\tau \le t_n < t} \ln \|Q_n\|}{t - \tau}\,,$$

Lemma 1 *Let the Cauchy problem (1)-(3) is correct and the following conditions are satisfied:*

1. *There exists* $N \in \mathbb{N}$ *such that* $Q_j U(t) = U(t) Q_j$ *for* $j \geq N,\ t > 0$*;*
2. $Q_n \in \mathfrak{L}(X)$ *and there exist constants* $M > 0$ *and* $\beta \in \mathbb{R}$ *such that* $\| \prod\limits_{j=n(t)}^{N} Q_j \| \leq M e^{\beta t}$.

Then $\omega \leq \omega_c + \beta$.

Proof: The operator $V(t,0)$ in this case can be writen in the form

$$V(t,0) = U(t - t_N) \prod_{j=n(t)}^{N} Q_j U(t_N - t_{N-1}) Q_{N-1} ... Q_1 U(t_1) \,. \tag{9}$$

From (9) we obtain the estimate

$$\frac{\ln \|V(t,0)\|}{t} \leq$$

$$\leq \frac{\ln \|U(t - t_N)\|}{t} + \frac{\ln \| \prod\limits_{j=n(t)}^{N} Q_j \|}{t} + \frac{\ln \|U(t_N - t_{N-1}) Q_{N-1} ... Q_1 U(t_1)\|}{t} \,.$$

Moreover

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|U(t - t_N)\|}{t} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln \|U(\tau)\|}{\tau + t_N} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln \|U(\tau)\|}{\tau(1 + \frac{t_N}{\tau})} =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln \|U(\tau)\|}{\tau} = \omega_c \,.$$

□

Theorem 5 *Let the following conditions hold:*

1. *There exists* $N \in \mathbb{N}$ *such that* $Q_j U(t) = U(t) Q_j$ *for* $j \geq N,\ t > 0$*;*
2. $Q_n \in \mathfrak{L}(X),\ n = 1,\ 2, ...$*;*
3. $\omega_c + \omega_q = 0$ $(\omega_c + \omega_q < 0;\ \tilde{\omega}_c + \tilde{\omega}_q = 0;\ \tilde{\omega}_c + \tilde{\omega}_q < 0)$.

Then the impulse equation (1), (2) is stable (asymptotically stable; uniformly asymptotically stable; exponentially stable).

Proof: The operators $V(t,0)$ and $V(t,\tau)$ can be written in the form (9) and

$$V(t,\tau) = U(t - t_N) \prod_{j=n(t)}^{N} Q_j U(t_N - t_{N-1}) Q_{N-1} ... Q_p U(t_p - \tau) \tag{10}$$

for $t_{p-1} < \tau \leq t_p < t_n < t \leq t_{n+1}$. From (9) and (10) we obtain the estimates

$$\omega \leq \omega_c + \omega_q \,, \tag{11}$$

$$\tilde{\omega} \leq \tilde{\omega}_c + \tilde{\omega}_q \,. \tag{12}$$

Then (11) and (12) imply the assertion of Theorem 5. □

At the end we shall consider the stability of the periodical impulse differential equations. Let there exist numbers p and s such that

$$t_{n+s} = t_n + p, \; Q_{n+s} = Q_n \,. \tag{13}$$

Impulse equations of this type will be called (p,s) - periodic.

Set

$$W = Q_s U(t_s - t_{s-1}) Q_{s-1} ... Q_1 U(t_1) \,. \tag{14}$$

The operator W is an analogue of the monodromy operator.

Theorem 6 *If the impulse equation (1), (2) is (p,s) - periodic, $U(t)$ is a semi-group and condition* H4 *holds, then the impulse equation (1), (2) is:*

a) *stable if and only if the sequence of iterations of the operator W is bounded;*

b) *asymptotically stable if and only if the sequence of iterations of the operator W strongly tends to zero for each element $x_0 \in X$;*

c) *uniformly asymptotically stable if and only if the spectral radius $\rho(W)$ of the operator W is smaller than one, i. e. $\rho(W) < 1$;*

d) *exponentially stable if and only if the sequence of iterations of the operator W is exponentially bounded, i.e. there exist numbers C, $\theta > 0$ such that $\|W^n\| \leq Ce^{-\theta n}$.*

Proof: From (13) and (14) it follows that the operators $V(t,0)$ and $V(t,\tau)$ can be written in the form:

$$V(t,0) = F(t)W^{\nu(t)}\,, \tag{15}$$

where $\nu(t) = [\frac{t}{p}]$ $(t > 0)$ and

$$V(t,\tau) = F(t)W^{\mu(t,\tau)}P(\tau)\,, \tag{16}$$

where $\mu(t,\tau) = [\frac{t-\tau}{p}]$ $(0 < \tau < t)$, $F(t)$ and $P(t) \in \mathfrak{L}(X)$.

The proof is implied immediatly by (15) and (16). $\square$

Corollary 2 *If the impulse equation (1), (2) is $(p,1)$ - periodic, then the impulse equation (1), (2) is:*

a) *stable if and only if the sequence of iterations of the operator $QU(p)$ $(Q_1 = Q)$ is bounded;*

b) *asymptotically stable if and only if the sequence of iterations of the operator $QU(p)$ strongly tends to zero for each element $x_0 \in X$;*

c) *uniformly asymptotically stable if and only if the spectral radius $\rho(W)$ of the operator $QU(p)$ is smaller than one;*

d) *exponentially stable if and only if the sequence of iterations of the operator $QU(p)$ is exponentially bounded.*

Remark 5 We note that assertions analogous to Theorem 5 and Theorem 6 can be proved also when $U(t)$ $(t \in (-\infty, +\infty))$ is a group.

References

[1] **Bainov, D.**, and **Kostadinov, S. :** *Asymptotic behaviour of the solutions of equations with impulse effect in a Banach space.* Collect. Math. **38**, 193–198 (1987)

[2] **Bainov, D., Kostadinov, S.**, and **Zabreiko, P. :** *L_p-equivalence of a linear and nonlinear impulsive differential equation in a Banach space.* J. Math. Anal. Appl. **159**, N2, 389–405 (1991)

[3] **Dunford, N.**, and **Schwartz, J. :** *Linear operators vol.I: General theory.* Moskva 1962 (in Russian)

[4] **Henry, D. :** *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* Moskva 1985 (in Russian)

[5] **Hille, E.**, and **Phillips, R. :** *Functional analysis and semi-groups.* Moskva 1962 (in Russian)

[6] **Kostadinov, S.**, and **Schott, D. :** *Integral equivalence between linear and nonlinear operator impulsive differential equations in a Banach space.* J. Anal. Appl., ZAA, **12**, 2, 361–378 (1993)

[7] **Krein, S. :** *Linear differential equation in Banach space.* Moskva 1967 (in Russian)

[8] **Zabreiko, P., Bainov, D.**, and **Kostadinov, S. :** *Stability of linear equations with impulse effect.* Tamkang J. Math. **18**, N4, 57–63 (1987)

[9] **Zabreiko, P., Bainov, D.**, and **Kostadinov, S. :** *Characteristic exponent of impulsive differential equations in a Banach space.* Internat. J. Theoret. Phys. **27**, N6, 731–743 (1988)

received: March 3, 1997 **revised:** August 10, 1998

Authors:

A. A. Kosseva
Department of Mathematics
Technical University
61, Sankt Petersburg blvd
4000 Plovdiv
Bulgaria

P. P. Zabreiko
Institute for Control theory
Department of Mathematics
Belorussian State University
Belorus, GUS

S. I. Kostadinov
Department of Mathematics and Informatics
University of Plovdiv "P. Hilendarski"
24, Tzar Assen str.
4000 Plovdiv
Bulgaria
Tel.+Fax 359(32)430360

Rostock. Math. Kolloq. **53**, 61–74 (1999)

Subject Classification (AMS)
35Q30, 47A10, 35J45, 35J55

Ali Abdennadher; Marie Christine Néel

Estimates for the resolvent of the Stokes operator with periodic boundary conditions in a layer of $\mathbb{R}^3$

ABSTRACT. In this paper, we study the Stokes operator between two parallel planes of $\mathbb{R}^3$. We impose Dirichlet homogeneous boundary-conditions, and we consider vector fields, with fixed period . We show that the semi group, generated by the Stokes operator, is analytic with respect to the L^p norm under these boundary conditions. This property is closely related to an estimate of the operator's resolvent. For $p = 2$, we prove that this resolvent exists, then that it satisfies the desired estimate. To do this, we use a decomposition principle of [1], splitting the solenoidal vector fields of $\mathbb{R}^3$ into poloidal and toroidal fields and the mean flow. For larger values of p, we show that the estimate, obtained for $p = 2$, extends to larger values of p, in view of a result of [2], valid in a half-space for vectors with prescribed divergence.

Introduction

Analyticity of the semi-group, generated by a linear unbounded operator, can be seen as a consequence of an estimate of its resolvent (see [3]). The Stokes operator with Dirichlet homogeneous boundary-conditions has been proved to satisfy such an estimate with respect to the L^p norm, in a smooth bounded domain [4], and in a half-space [5]. Here we use the work of [2] to show that the Stokes operator is analytic with respect to the L^p norm, in a three-dimensional layer between two planes of $\mathbb{R}^3$, parallel to x_1Ox_2, where homogeneous boundary conditions are prescribed, while periodicity is imposed in the Ox_1 and Ox_2 directions .

We first recall the setting of the problem we want to solve, and then we show that it admits a solution with the help of a decomposition principle of [1]. Then, we derive an estimate on the resolvent of the Stokes operator, with respect to the L^2 norm. We use this result and a similar estimate established in [2] for vectors with prescribed divergence in a half-space to show, via localization, that this property remains true in L^p with $p > 2$. Finally, we consider the problem which is obtained when we ask the flowrate to vanish.

1 Setting of the problem

For $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg\lambda| \leq \pi - \varepsilon\}$, and $F = (F_1, F_2, F_3) \in (L^p(\Omega_h))^3$ with $h = (h_1, h_2)$ and $\Omega_h =]0, h_1[\times]0, h_2[\times]0, 1[$, let $U = (U_1, U_2, U_3) \in (W^{2,p}_{\#}(\Omega_h))^3$ be such that there exist $q \in W^{1,p}_{\#}(\Omega_h)$ such that

$$\Delta U - \lambda U + \nabla q = F, \qquad \nabla \cdot U = 0, \qquad \text{in } \Omega_h \tag{1.a}$$

$$U = 0, \quad \text{on} \quad \text{the} \quad \text{planes} \quad x_3 = 0 \quad \text{and} \quad x_3 = 1. \tag{1.b}$$

Here, for $p > 1$, $W^{m,p}_{\#}(\Omega_h)$ (endowed with the $W^{m,p}(\Omega_h)$ norm) denotes the closure of $\mathcal{D}_{\#}(\Omega_h)$ in $W^{m,p}(\Omega_h)$, where $\mathcal{D}_{\#}(\Omega_h)$ is the subset of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0,1])$ made of functions which are $h_i$periodic in the direction of x_i for $i = 1, 2$.

The resolvent $R_{\lambda,p}$ of the Stokes operator in $\Omega = \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ with h_1 and h_2 periodic boundary-conditions in the directions of x_1 and x_2 will be defined in $\mathcal{L}((L^p(\Omega_h))^3, (W^{2,p}_{\#}(\Omega_h))^3)$ as soon as the problem (1) will have exactly one solution U, which will be denoted by $R_{\lambda,p}F$. Analycity of the semi-group, generated by the Stokes operator in $(L^p(\Omega_h))^3$ will then be [3] a consequence of the estimate

$$\|\nabla q\|_{(L^p(\Omega_h))} + \|U\|_{(W^{2,p}(\Omega_h))^3} + |\lambda|\|U\|_{(L^p(\Omega_h))^3} \leq K_{\eta,h,p}\|F\|_{(L^p(\Omega_h))^3}, \tag{2}$$

for

$$\lambda \in \Sigma_\eta = \Big\{\Gamma \in \mathbb{C}, \quad \arg\Gamma \in \Big]\arctan\frac{1-\eta}{\eta} - \pi, \arctan\frac{1-\eta}{\eta} + \pi\Big[\Big\}, \tag{3}$$

with $\eta \in]0;1[$.

Our main result is the theorem 1:

Theorem 1 *With $\Omega_h = [0, h_1] \times [0, h_2] \times [0, 1]$ the resolvent $R_{\lambda,p}$ of the Stokes operator in Ω_h with homogeneous Dirichlet boundary-conditions at $x_3 = 0$ or 1 and prescribed periods h_1 and h_2 along x_1 and x_2 is continuous from $(L^p(\Omega_h))^3$ towards $(W^{2,p}_{\#}(\Omega_h))^3$ for $p \geq 6$, with periodic q. The estimate*

$$\Big(|\lambda|\|R_{\lambda,p}F\|_{(L^p(\Omega_h))^3} + \|R_{\lambda,p}F\|_{(W^{2,p}(\Omega_h))^3} + \|\nabla q\|_{(L^p(\Omega_h))^3}\Big) \leq K_{\eta,h,p}\|F\|_{(L^p(\Omega_h))^3}$$

is satisfied for $\lambda \in \Sigma_\eta$.

Because $\mathcal{D}_{\#}(\Omega_h)$ is dense in $W^{m,p}_{\#}(\Omega_h)$, and in view of the inclusions $W^{m,p}(\Omega_h) \subset W^{m-1,p}(\Omega_h)$, we only have to consider $F \in \mathcal{D}_{\#}(\Omega_h)$. The proof of this theorem is based upon the construction of a solution U of (1), following ideas of [1]. Estimate (2) for $p = 2$ follows, and will later on be extended to other values of p. To do this, we will need properties of the solution u to (4):

$$\Delta^2 u - \lambda \Delta u = f \tag{4.a}$$

with the boundary-condition

$$u(x_1, x_2, 0) = u(x_1, x_2, 1) = 0 = \partial_{x_3} u(x_1, x_2, 0) = \partial_{x_3} u(x_1, x_2, 1). \tag{4.b}$$

In a first step, we solve (4) and derive estimates for u when $\mathrm{Re}\lambda > 0$. We pay special attention to the case

$$f = \Delta_2 F_3 - \partial^2_{x_1 x_3} F_1 - \partial^2_{x_2 x_3} F_2$$

where $\Delta_2 = \partial^2_{x_1^2} + \partial^2_{x_2^2}$. Then, we construct the solution U to (1), and arrive to (2) for $p = 2$ and $\mathrm{Re}\lambda > 0$. After that, we extend this property to a larger sector of $\mathbb{C}$. Then, we will be ready to use a result of [2] to establish (2) for $p \geq 6$ via localization.

2 Existence of the solution to (4) in $L^2(\Omega_h)$ when the real part of λ is positive

Let us show, via a variational method, that (4) admits a solution.

2.1 Variational problem

Let f be an element of $(\mathcal{D}_\#(\Omega_h))^3$. Consider the variational problem: find v in $\mathcal{V}$ such that for every ψ in $\mathcal{V}$,

$$(\Delta v | \Delta \psi) + \lambda((\nabla v | \nabla \psi)) = (f | \psi). \tag{5}$$

Here $(\quad|\quad)$ and $((\quad|\quad))$ denote the scalar products of $L^2(\Omega_h)$ and $(L^2(\Omega_h))^3$, while

$$\mathcal{V} = \Big\{ v \in W^{2,p}_\#(\Omega_h) / v(x_1, x_2, 0) = v(x_1, x_2, 1) = 0 = \partial_{x_3} v(x_1, x_2, 0) = \partial_{x_3} v(x_1, x_2, 1) \Big\}. \tag{6}$$

The bilinear form on the left hand-side of (5) is continuous and coercive on $\mathcal{V}$, which itself is dense in $L^2(\Omega_h)$.The Lax-Milgram theorem implies there exists $v \in \mathcal{V}$ satisfying (5). Moreover, the mapping $b_v : \psi \mapsto (\Delta v | \Delta \psi) + \lambda((\nabla v | \nabla \psi))$ is continuous on $\mathcal{V}$ endowed with the $L^2(\Omega_h)$ norm. In view of the Weyl lemma, $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_h)$. These properties imply more regularity for v.

2.2 Regularity of v

We have:

Lemma 1 *When $f \in \mathcal{D}_{\#}(\Omega_h)$ and with $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, the solution v of (5) satisfies*

$$\Delta v(0, x_2, x_3) - \Delta v(h_1, x_2, x_3) = 0 = \Delta v(x_1, 0, x_3) - \Delta v(x_1, h_2, x_3) \qquad (7.a)$$

$$\partial_{x_1} \Delta v(0, x_2, x_3) - \partial_{x_1} \Delta v(h_1, x_2, x_3) = 0 = \partial_{x_2} \Delta v(x_1, 0, x_3) - \partial_{x_2} \Delta v(h_2, h_2, x_3). \qquad (7.b)$$

This lemma is proved in Appendix A.

Integration by parts of (5) is now possible, and gives that v solves (4) with $|\lambda| \|v\|_{L^2(\Omega_h)} + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega_h)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega_h)}$.

Definition *Let X be a Banach space, made of functions of $x_3 \in]0, 1[$. With $\Omega_h' =]0, h_1[\times]0, h_2[$, let us denote by $W_{\#}^{m,p}(\Omega_h', X)$ the closure in $W^{m,p}(\Omega_h', X)$ of the subset of the smooth functions, which are h_i periodic with respect to x_i, for $i = 1, 2$.*

When $f = \Delta_2 F_3 - \partial^2_{x_1 x_3} F_1 - \partial^2_{x_2 x_3} F_2$, with $(F_1, F_2, F_3) \in (\mathcal{D}_{\#}(\Omega_h))^3$, we have the following lemma.

Lemma 2 *When $f \in \mathcal{D}_{\#}(\Omega_h)$ and with $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, the problem (4) has one solution u in $W_{\#}^{2,2}(\Omega_h) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega_h)$. The solution satisfies*

$$\int_0^{h_1} \int_0^{h_2} u(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \equiv < u >_{x_3} = 0, \qquad (8.a)$$

$$\Delta u \in W_{\#}^{2,2}(\Omega_h', \mathcal{C}^\infty(]0, 1[)), \qquad (8.b)$$

$$< \Delta u >_{x_3} = 0. \qquad (8.c)$$

Proof: The boundary conditions for $u = v$, and (7), imply that $\partial^4_{x_3^4} < u >_{x_3} - \lambda \partial^2_{x_3^2} < u >_{x_3} = 0$ in $]0, 1[$ with $\partial_{x_3} < u >_{x_3} = < u >_{x_3} = 0$ at $x_3 = 0$ or 1. The scalar product of this o.d.e with $< u >_{x_3}$ in $[0, 1]$ gives $(8.a)$. Then $(8.b)$ is a consequence of (7) and of the regularity of v, while the boundary conditions give $(8.c)$.

2.3 Resolvent of the Laplace operator

We will need similar results for the problem

$$(\lambda Id - \Delta) g = \partial_{x_2} F_1 - \partial_{x_1} F_2, \qquad (9.a)$$

$$g(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2, 1) = 0. \qquad (9.b)$$

Lemma 3 *When the real part of λ is positive, with $F \in (\mathcal{D}_\#(\Omega_h))^3$, the problem (9) has one solution $g \in W^{2,2}_\#(\Omega_h)$ with $< g >_{x_3} = 0$. Moreover, $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_h)$.*

The proof follows from arguments, similar to the ones for the lemmas 1 and 2.

3 Construction of a solution to (1) with $p = 2$ when the real part of λ is positive

Following an idea of [1], let us set $U = (U_1, U_2, U_3)$

$$U_1 = S_1(x_3) - \partial_{x_2}\psi + \partial^2_{x_1x_3}\varphi \tag{10.a}$$

$$U_2 = S_2(x_3) + \partial_{x_1}\psi + \partial^2_{x_2x_3}\varphi \tag{10.b}$$

$$U_3 = -\Delta_2\varphi \tag{10.c}$$

where ψ, φ, S_1 and S_2 will be defined later on such that U is a solution to (1.a). In order to establish that ψ and φ are smooth enough, we will use the property 1.1 of [1]. It states that for given $\chi \in W^{m,2}_\#(\Omega'_h)$ with $< \chi >_{x_3} \equiv \int\int_{\Omega'_h} \chi(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2 = 0$, there exist $\zeta \in W^{m+2,2}_\#(\Omega'_h)$ such that $\Delta_2\zeta \equiv (\partial^2_{x_1^2} + \partial^2_{x_2^2})\zeta = \chi$ and $< \zeta >_{x_3} = 0$. Moreover, $\|\zeta\|_{W^{m+2,2}_\#(\Omega'_h)} \leq \mathcal{K}(m, h)\|\chi\|_{W^{m,2}_\#(\Omega'_h)}$. Assume χ is a $\mathcal{C}^1$ function of $x_3 \in]0, 1[$, with vanishing average over Ω'_h for every x_3: this proposition implies $\zeta \in W^{m+2,2}_\#(\Omega'_h, \mathcal{C}^1]0, 1[)$.

3.1 Construction of ψ

For given $F \in \mathcal{D}_\#(\Omega_h)$, take $g \in W^{2,2}_\#(\Omega_h)$ such that (9) is satisfied: $g \in W^{2,2}_\#(\Omega'_h, \mathcal{C}^\infty(]0, 1[)$, according to lemma 3. The proposition 1.1 of [1] implies there is one $\psi \in W^{4,2}_\#(\Omega'_h, \mathcal{C}^\infty(]0, 1[)$ defined by

$$\Delta_2\psi = g \tag{11.a}$$

$$< \psi >_{x_3} = 0 \quad \forall x_3 \in [0, 1]. \tag{11.b}$$

Recall that $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_h)$: $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_h)$, therefore $\Delta_2\Delta\psi = \Delta g$. The boundary-conditions for ψ imply $< \Delta\psi >_{x_3} = 0$ for every x_3, and $\Delta\psi \in W^{2,2}_\#(\Omega'_h, \mathcal{C}^\infty(]0, 1[)$.

3.2 Construction of φ

Similarly, take u defined in $W^{2,2}_{\#}(\Omega_h)$ by (4), with $f = \Delta_2 F_3 - \partial^2_{x_1x_3}F_1 - \partial^2_{x_2x_3}F_2$. Recall $< u >_{x_3} = 0$ in $[0,1]$: the proposition 1.1 of [1] allows to define $\varphi \in W^{4,2}_{\#}(\Omega'_h, \mathcal{C}^\infty(]0,1[)$ by

$$\Delta_2\varphi = -u \tag{12.a}$$

$$< \varphi >_{x_3} = 0 \quad \forall x_3 \in]0,1[. \tag{12.b}$$

Recall that $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_h)$: $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_h)$, therefore $\Delta_2\Delta\varphi = \Delta u$. The boundary-conditions for φ imply $< \Delta\varphi >_{x_3} = 0$ for every x_3, hence $\Delta\varphi \in W^{4,2}_{\#}(\Omega'_h, \mathcal{C}^\infty(]0,1[)$.

3.3 U solves (1)

Now let S_1 and S_2 be functions of x_3 such that

$$\partial^2_{x_3^2} S_j - \lambda S_j = < F_j >_{x_3} \quad \text{for} \quad j = 1,2, \tag{13.a}$$

$$S_j(0) = S_j(1) = 0. \tag{13.b}$$

In view of the regularity of F, ψ and φ, $U \in (\mathcal{C}^\infty(\Omega_h))^3$.

Let us set

$$w_1 = F_1 - \partial^2_{x_3} S_1 + \lambda S_1 + \partial_{x_2}\Delta\psi - \lambda\partial_{x_2}\psi + \lambda\partial^2_{x_1x_3}\varphi - \partial^2_{x_1x_3}\Delta\varphi \tag{14.a}$$

$$w_2 = F_2 - \partial^2_{x_3} S_2 + \lambda S_2 - \partial_{x_1}\Delta\psi + \lambda\partial_{x_1}\psi + \lambda\partial^2_{x_2x_3}\varphi - \partial^2_{x_2x_3}\Delta\varphi \tag{14.b}$$

$$w_3 = F_3 + (\Delta - \lambda Id)\Delta_2\varphi. \tag{14.c}$$

Then $w = (w_1, w_2, w_3)$ belongs to $(\mathcal{C}^\infty(\Omega_h))^3$ and for every vector field $\mathcal{V} \in (\mathcal{D}(\Omega_h))^3$ such that $\nabla \cdot \mathcal{V} = 0$, $\mathcal{V}$ is equal in Ω_h to a periodic vector field and can be put into the form

$$(-\partial_{x_2}\Psi + \partial^2_{x_1x_3}\Phi + \mathcal{F}_1(x_3), \partial_{x_1}\Psi + \partial^2_{x_2x_3}\Phi + \mathcal{F}_2(x_3), -\Delta_2\Phi) \tag{14}$$

with periodic Ψ and Φ such that $< \Psi >_{x_3} = < \Phi >_{x_3} = 0$, in view of [1, theorem 1.4]. Moreover, the boundary-conditions for $\mathcal{V}$ imply $\Phi = \partial_{x_3}\Phi = \Psi = 0$ at $x_3 = 0, 1$. Therefore, integrating by parts gives

$$\int\int\int_{\Omega_h} w\overline{\mathcal{V}} dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \tag{15}$$

In view of [6, prop. 1.1 p. 14] the existence of $q \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_h)$ such that $w = \nabla q$ follows. In view of [1, lemma 1.3 p. 296] $\mathrm{curl}(w) = 0$. Moreover, $< w_1 >_{x_3} = < w_2 >_{x_3} = 0$. Therefore using Fourier series, one gets $q \in W^{1,2}_{\#}(\Omega_h)$. Therefore U and q solve (1.a).

Moreover, $U = 0$ on the planes $x_3 = 0$, respectively 1, because $\Delta_2\partial_{x_3}\varphi = \partial_{x_3}\Delta_2\varphi = \partial_{x_3}u$ in the distributional sense, and then $\partial_{x_3}\varphi = 0$, while $g = 0$ implies $\psi = 0$ when $x_3 = 0$ or 1. Unicity of the solution of (1) such that $q \in W^{1,2}_{\#}(\Omega_h)$ is given by the L^2 scalar product of (1.a) by U.

3.4 Estimate for (U, q), when $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

The scalar product of (1) by U gives

$$\sqrt{|\lambda|}\|\nabla U\|_{L^2(\Omega_h)^3} + |\lambda|\|U\|_{L^2(\Omega_h)^3} < 2\|F\|_{L^2(\Omega_h)^3}.$$

Therefore, $\|\Delta U\|_{W^{-1,2}(\Omega_h)} \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\|F\|_{L^2(\Omega_h)^3}$, which implies $\|\nabla q\|_{W^{-1,2}(\Omega_h)} \leq 2/\sqrt{|\lambda|}+2\|F\|_{L^2(\Omega_h)^3}$. In view of [6, prop. 1.2 p. 14], $\|q\| \leq C'(h,\eta)\|F\|_{L^2(\Omega_h)^3}$.

The regularity of U implies that $\nabla \cdot \Delta U = \Delta(\nabla \cdot U) = 0$. Therefore, the scalar product of (1.a) by ΔU gives

$$\|\Delta U\|_{L^2(\Omega_h)^3} < \|F\|_{L^2(\Omega_h)^3},$$

and the lemma follows.

Lemma 4 *For every λ with positive real part, and every $F \in (\mathcal{D}_\#(\Omega_h))^3$,the problem* (1) *has one solution $(U, q) \in (W^{2,2}_\#(\Omega_h))^3 \times W^{1,2}_\#(\Omega_h)$, with*

$$\|U\|_{W^{2,2}(\Omega_h)^3} + |\lambda|\|U\|_{L^2(\Omega_h)^3} + \|\nabla q\|_{L^2(\Omega_h)^3} < C(h,\eta)\|F\|_{L^2(\Omega_h)^3}. \tag{16}$$

This result extends to $F \in (L^2(\Omega_h))^3$, because $\mathcal{D}_\#(\Omega_h)$ is dense in the $W^{p,2}_\#(\Omega_h)$. Later on, $\mathcal{R}_{\lambda,2}$ will denote the linear mapping $F \mapsto U$ of $(L^2(\Omega_h))^3$ such that (1) is satisfied with $U \in (W^{2,2}_\#(\Omega_h))^3$ and $q \in (W^{1,2}_\#(\Omega_h))^3$. The estimate (16) of the resolvent of the Stokes operator will now be extended to $\lambda \in \Sigma_\eta$.

4 Estimate of U in $(L^2(\Omega_h))^3$, for other values of λ

Suppose first that $\lambda \in \mathbb{C}$ is such that $0 \leq -\mathrm{Re}(\lambda) \leq |\mathrm{Im}(\lambda)|\eta,\ \eta \in]0,1[$. Set $\lambda = \lambda_1 + a$ with $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$ and real negative a such that $|a| < \mathrm{Im}(\lambda)$. Then (1) is equivalent to

$$U - a\mathcal{R}_{\lambda_1,2}U = \mathcal{R}_{\lambda_1,2}F. \tag{17}$$

Equation (17) admits a solution (Neumann series) in $(L^2(\Omega_h))^3$ in view of the estimate (16) for $\mathcal{R}_{\lambda_1,2}$. The solution satisfies:

$$\|U\|_{(L^2(\Omega_h))^3} \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda_1|}\|F\|_{(L^2(\Omega_h))^3} \tag{18.a}$$

$$\frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda_1|}\|F\|_{(L^2(\Omega_h))^3} \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda|}\|F\|_{(L^2(\Omega_h))^3}\ , \tag{18.b}$$

as can be seen from the imaginary part of the $(L^2(\Omega_h)^3$ scalar product of (1) by U. To obtain (18.b), we use

$$|\lambda|^2 = |\lambda_1 + a|^2 = |\mathrm{Im}(\lambda_1)|^2 + (\mathrm{Re}(\lambda_1) + a)^2 = |\mathrm{Im}(\lambda_1)|^2 + \mathrm{Re}(\lambda)^2 \leq 2(\mathrm{Im}(\lambda))^2.$$

Consider now the case $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ with $|\mathrm{Re}(\lambda)| \leq (\eta/(1-\eta))|\mathrm{Im}(\lambda)|$. Following the same procedure as in the previous case, and using (18.a), we see that (1) admits a solution when $\lambda \in \Sigma_\eta$. Indeed, with $\lambda = \lambda_2 - ie$ where the real number e has the same sign as $\mathrm{Im}(\lambda)$ with $|\mathrm{Im}(\lambda) + e| > |\mathrm{Re}(\lambda)|/\eta$, the problem (1) can be written:

$$U + ie\mathcal{R}_{\lambda_2,2}U = \mathcal{R}_{\lambda_2,2}F.$$

It admits a solution because $e < |\mathrm{Im}(\lambda_2)|$. Then, imaginary part of the L^2 scalar product of (1.a) by U gives:

$$|\lambda|\frac{1-\eta}{\eta}||U||_{(L^2(\Omega_h))^3} \leq \mathrm{Im}(\lambda)||U||_{(L^2(\Omega_h)^3} \leq ||F||_{(L^2(\Omega_h)^3)}, \tag{19.a}$$

hence

$$|\lambda|\|U\|_{(L^2(\Omega_h))^3} \leq C''(h,\eta)\|F\|_{(L^2(\Omega_h)^3)},$$

$$\|\nabla U\|_{(L^2(\Omega_h))^3} \leq C''(h,\eta)\|F\|_{(L^2(\Omega_h)^3)},$$

and

$$\|q\|_{(L^2(\Omega_h)^3)} \leq C''(h,\eta)\|F\|.$$

The last estimates allow to use via localization, alike in the section 5.1, [6, prop. 2.2 p. 33], which gives

$$\|U\|_{(W^{2,2}(\Omega_h))^3} \leq C(h,\eta)\|F\|_{(L^2(\Omega_h))^3}. \tag{19.b}$$

So (16) extends to every $\lambda \in \Sigma_\eta$. Notice that Σ_η becomes larger as η approaches 1 from the left. This implies that the conclusion of the lemma 4 is still valid when $\lambda \in \Sigma_\eta$.

5 Estimate of U in L^p, with $p \geq 6$

Now we have to prove that this result remains true in $(L^p(\Omega_h))^3$ with large values of p. Recall that [4] and [5] have established a similar property for bounded domains, and for a half-space. Localization is a method, allowing to use results like their's: it consists in considering a solution of (1), and building from it a solution to the same problem, but in a domain, for which the wanted estimate is already established. But it is then necessary to consider that $\nabla \cdot U$ can be different from zero in the Stokes system (1). This is not the case with [4] and [5]. Fortunately, [2] gives an estimate of the resolvent of the Stokes operator, which is true for vectors with prescribed divergence. Our L^2 estimate will enable us to use their theorem by allowing us to control the non homogeneous term, which the localization process introduces in the continuity equation.

5.1 Extension of U to a solution of the Stokes operator in a half-space

As soon as $F \in (\mathcal{D}_\#(\Omega_h))^3$, U is in $(\mathcal{C}^\infty(\Omega_h))^3$. For every $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, let us call $\tau_{n,m}$ the translation by nh_1 respectively mh_2 in the x_1, respectively x_2 directions.

Let $\tilde{P}U$ be the extension of U in $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ giving a function, with period h_1 in the x_1 direction, and period h_2 in the x_2 direction. Let $\mathcal{P}'q$ be the periodic extension of q in the directions of x_1 and x_2.

Let PU be the extension of $\tilde{P}U$ to $\mathbb{R}^2 \times [0,2]$ such that the first and second components are even with respect to $z-1$ while the third one is odd: the divergence of PU vanishes. Let us call $\mathcal{P}q$ the extension of $\mathcal{P}'q$ which is even with respect to $z-1$. Let $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ take the value 1 in Ω_h but vanish everywhere $|x_1| \geq 2h_1$ or $|x_2| \geq 2h_2$ or $x_3 \geq 2$. Then, χPU and $\chi\mathcal{P}q$ are in $(W^{2,2}(\mathbb{R}^3_+))^3$ respectively $W^{1,2}(\mathbb{R}^3_+)$ and satisfy

$$\Delta(\chi PU) - \lambda\chi PU + \nabla(\chi\mathcal{P}q) = \chi PF + 2(\nabla\chi\nabla)PU) + \mathcal{P}q\nabla\chi \tag{20.a}$$

$$\nabla.\chi PU = -\nabla\chi.PU. \tag{20.b}$$

The linear mappings χP and $\chi\mathcal{P}$ are bounded in $\mathcal{L}((W^{2,p}_\#(\Omega_h))^3, (W^{2,p}(\mathbb{R}^3_+))^3)$, respectively $\mathcal{L}((W^{1,p}_\#(\Omega_h))^3, (W^{1,p}(\mathbb{R}^3_+))^3)$ for every p. And the lemma 4 implies that the $L^2(\mathbb{R}^3_+)$ norms of $\Delta(\chi PU)$, $\nabla(\chi PU)$, $\chi\mathcal{P}q$ and $\lambda\chi PU$ are dominated by the $(L^2(\Omega_h))^3$ norm of F. This allows to use a $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ estimate for the solution of the inhomogeneous Stokes problem

$$\Delta V - \lambda V + \nabla\tilde{q} = \tilde{g} \tag{21.a}$$

$$\nabla \cdot V = \tilde{G}. \tag{21.b}$$

Indeed, [2, th. 3.1] states that (21) implies

$$\begin{aligned}\|\lambda V\|_{(L^p(\mathbb{R}^3_+))^3} + \sqrt{|\lambda|}\|V\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R}^3_+))^3} + \|V\|_{(W^{2,p}(\mathbb{R}^3_+))^3} + \|\nabla\tilde{q}\|_{(L^p(\mathbb{R}^3_+))^3} \leq \\ \kappa(\|\tilde{g}\|_{(L^p(\mathbb{R}^3_+))^3} + \|\nabla\tilde{G}\|_{(L^p(\mathbb{R}^3_+))^3} + \|\lambda\tilde{G}\|_{(\hat{W}^{-1,p,*}(\mathbb{R}^3_+))^3}),\end{aligned} \tag{22}$$

where $\hat{W}^{-1,p,*}(\mathbb{R}^3_+)$ is defined in [2].

5.2 Estimates for U

In what follows, for a sake of simplicity, and except when more precise notations will be useful, all constants, depending only on h, η and p, will be denoted by κ.

In view of [2, remark 3.1], gives

$$\|\nabla\chi.PU\|_{(\hat{W}^{-1,6,*}(\mathbb{R}^3_+))^3} \leq \kappa\|\nabla\chi.PU\|_{L^2(\mathbb{R}^3_+)^3} \leq \kappa\|U\|_{(L^2(\Omega_h))^3}. \tag{23}$$

In view of Sobolev inequalities and of the already established L^2 estimates for ∇U and q, and because Ω_h is bounded, [2, th. 3.1] implies that

$$\|U\|_{(W^{2,6}(\Omega_h))^3} + \|\nabla q\|_{(L^6(\Omega_h))^3} + |\lambda|\|U\|_{(L^6(\Omega_h))^3} \leq \kappa(\|F\|_{(L^6(\Omega_h))^3}). \tag{24}$$

By the Holder inequality, for $r = 2\theta + (1-\theta)$ with θ between 0 and 1, $r \in]2,6[$ and

$$\|\nabla\chi.PU\|_{(L^r(\mathbb{R}^3_+))^3} \leq \kappa\|U\|_{(L^r(\Omega_h))^3} \leq \kappa\|U\|^{2\theta/r}_{(L^2(\Omega_h))^3}\|U\|^{6(1-\theta)/r}_{(L^6(\Omega_h))^3} \leq \kappa\|U\|_{(L^6(\Omega_h))^3}. \tag{25}$$

After that, we use [2, remark 3.1] again, which states that for $r \in]2,3[$, with $p = \frac{3r}{3-r}$,

$$\|\nabla\chi.PU\|_{(\hat{W}^{-1,p,*}(\mathbb{R}^3_+))^3} \leq \kappa\|\nabla\chi.PU\|_{L^r(\mathbb{R}^3_+)^3} \leq \kappa\|U\|_{(L^6(\Omega_h))^3}. \tag{26}$$

Consider that every $p > 6$ is in the form $3r/(3-r)$ with $r \in]2,3[$. Recall that, because of Sobolev inequalities,

$$\|\nabla\chi.PU\|_{(W^{1,p,}(\mathbb{R}^3_+))^3} \leq \kappa\|U\|_{(W^{1,p}_{\#}(\Omega_h))^3} \leq \kappa\|U\|_{(\mathcal{C}^1(\Omega_h))^3} \leq \kappa\|U\|_{(W^{6,2}(\Omega_h))^3}. \tag{27}$$

In view of [2, th. 3.1],

$$\|U\|_{(W^{2,p}(\Omega_h))^3} + \|\nabla q\|_{(L^p(\Omega_h))^3} + |\lambda|\|U\|_{(L^p(\Omega_h))^3} \leq \kappa\|F\|_{(L^p(\Omega_h))^3} \tag{28}$$

for $p > 6$.

This estimate extends to $F \in (L^p(\Omega_h))^3$, alike in the section 3.4. Hence the theorem 1.

6 Further condition for the flowrate

Sometimes, it is useful to consider solutions of (1) with vanishing fluxes through the surfaces $x_1 = 0$ and $x_2 = 0$. This is the case, for instance, when natural thermal convection is studied.

From the solution (U, q) of (1) in $(W^{2,p}_{\#}(\Omega_h))^3 \times W^{1,p}_{\#}(\Omega_h)$, it is possible to build a solution (U', q') to (1) in $(W^{2,p}_{\#}(\Omega_h))^3 \times W^{1,p}(\Omega_h)$, satisfying the condition

$$\int_{x_2=0}^{h_2}\int_{x_3=0}^{1} U'_1(x_1,x_2,x_3)dx_2dx_3 = \int_{x_1=0}^{h_1}\int_{x_3=0}^{1} U'_2(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_3 = 0. \tag{29}$$

With λ' in the half complex plane where $\mathrm{Re}(\lambda') > 0$, let us set $\lambda = \lambda'^2$,

$\mathcal{H}_\lambda(x_3) = (\frac{\sinh\lambda' z + \sinh\lambda'(1-z)}{\sinh\lambda'} - 1)/\lambda$, $\gamma(\lambda) = (2\frac{\cosh\lambda' - 1}{\lambda'\sinh\lambda'} - 1)/\lambda$,

$$\mathcal{W}(x_3) = \frac{\mathcal{H}_\lambda(x_3)}{\gamma(\lambda)}(h_1\int_0^1 S_1(x_3)dx_3, h_2\int_0^1 S_2(x_3)dx_3, 0) \tag{30}$$

and

$$Q(x_1, x_2) = -\frac{1}{\gamma(\lambda)}(h_1 x_1 \int_0^1 S_1(x_3)dx_3 + h_2 x_2 \int_0^1 S_2(x_3)dx_3). \tag{31}$$

Then, $U' = U - \mathcal{W}$ and $q' = q - Q$ satisfy (1). Notice that S_1 and S_2 depend continuously on $F \in (L^p(\Omega_h))^3$: therefore, (U', q') satisfies (28) for large enough $|\lambda|$ because $|\lambda\gamma(\lambda)| \to 1$ when $|\lambda| \to \infty$. Moreover, U' satisfies (29), but q' is no longer periodic. Hence an other version of the theorem 1.

Theorem 2 *Let us consider the Stokes operator in Ω_h with homogeneous Dirichlet boundary - conditions at $x_3 = 0$ or 1, prescribed periods along x_1, x_2, and vanishing flowrates through the surfaces, parallel to x_1Ox_3 and x_2Ox_3. The resolvent $R^f_{\lambda,p}$ is continuous from $(L^p(\Omega_h))^3$ towards $(W^{2,p}_{\#}(\Omega_h))^3$ for $p \geq 6$, and $\lambda \in \Sigma_\eta$ for large enough $|\lambda|$. Moreover, the estimate*

$$|\lambda| \|R^f_{\lambda,p}F\|_{(L^p(\Omega_h))^3} + \|R^f_{\lambda,p}F\|_{(W^{2,p}(\Omega_h))^3} \leq K_{\eta,h,p}\|F\|_{(L^p(\Omega_h))^3}$$

is satisfied.

Appendix A

Proof of (7.a): Suppose that for $x_2^0 \in]0; h_2[$ and $x_3^0 \in]0,1[$, (9.a) is not satisfied. For instance, $\Delta v(0, x_2^0, x_3^0) - \Delta v(h_1, x_2^0, x_3^0) > 0$. Let us construct functions $\psi_n \in \mathcal{V}$ such that $(\Delta v|\Delta\psi_n)$ is less than a negative number while $\psi_n \to 0$ in $W^{0,2}_{\#}(\Omega_h)$, and $((\nabla v|\nabla\psi_n)) \to 0$. This contradicts the continuity of b_v and gives (7.a).

Let χ be a piecewise $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ odd function, taking non negative values on $[0, h_1/4]$ with $\chi'(0) = 1$, and with support in $I = [-h_1/4, h_1/4]$; here χ' denotes the derivative of χ. Let ζ be a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ even function, taking non negative values on I, and with support in this interval. We have $\int_0^{h_1/4} \chi''(s)ds = -1$ and $\int_{-h_1/4}^{h_1/4} \zeta''(s)ds = 0$. Let ψ_n be defined in

$$R_{k,l}(n) = [-\frac{h_1}{4n} + kh_1, \frac{h_1}{4n} + kh_1] \times [x_2^0 - \frac{h_1}{4n} + lh_2, x_2^0 + \frac{h_1}{4n} + lh_2] \times [x_3^0 - \frac{h_1}{4n}, x_3^0 + \frac{h_1}{4n}]$$

by $\psi_n(x_1, x_2, x_3) = n\chi(n(x_1 - kh_1))\zeta(n(x_2 - lh_2 - x_2^0))\zeta(n(x_3 - x_3^0))$,

and vanishing out of $\cup_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} R_{k,l}(n)$.

For large n, $\psi_n \in \mathcal{V}$, and $\psi_n \to 0$ in $W^{0,2}_{\#}(\Omega_h)$ when $n \to \infty$. Integration by parts shows that $((\nabla v|\nabla\psi_n)) \to 0$. Moreover,

$$\Delta\psi_n(x_1, x_2, x_3) =$$

$$n^3\chi''(n(x_1 - kh_1))\zeta(n(x_2 - x_2^0))\zeta(n(x_3 - x_3^0)) + n^3\chi(n(x_1 - kh_1))\zeta''(n(x_2 - x_2^0))\zeta(n(x_3 - x_3^0))$$

$$+n^3\chi(n(x_1 - kh_1))\zeta(n(x_2 - x_2^0))\zeta''(n(x_3 - x_3^0))$$

when $(x_1,x_2,x_3)\in R_{k,l}$, $\Delta\psi_n(x_1,x_2,x_3)=0$ elsewhere. Hence with

$$R^+_{k,l}(n)=[0,\frac{h_1}{4n}+kh_1]\times[x_2^0-\frac{h_1}{4n}+lh_2,x_2^0+\frac{h_1}{4n}+lh_2]\times[x_3^0-\frac{h_1}{4n},x_3^0+\frac{h_1}{4n}],$$

$$(\Delta v|\Delta\psi_n)=\int\int\int_{R^+_{0,0}(n)}[\Delta v]^{(x_1,x_2,x_3)}_{(h_1+x_1,x_2,x_3)}\Delta\psi_n(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3=$$

$$\int\int\int_{R^+_{0,0}(n)}[\Delta v]^{(x_1,x_2,x_3)}_{(h_1+x_1,x_2,x_3)}n^3\chi''(nx_1)\zeta(n(x_2-x_2^0))\zeta(n(x_3-x_3^0))dx_1dx_2dx_3$$

$$+\int\int\int_{R^+_{0,0}(n)}[\Delta v]^{(x_1,x_2,x_3)}_{(h_1+x_1,x_2,x_3)}n^3\chi(nx_1))\zeta''(n(x_2-x_2^0))\zeta(n(x_3-x_3^0))dx_1dx_2dx_3$$

$$+\int\int\int_{R^+_{0,0}(n)}[\Delta v]^{(x_1,x_2,x_3)}_{(h_1+x_1,x_2,x_3)}n^3\chi(nx_1))\zeta(n(x_2-x_2^0))\zeta''(n(x_3-x_3^0))dx_1dx_2dx_3.$$

But

$$\int\int\int_{R^+_{0,0}(n)}[\Delta v]^{(x_1,x_2,x_3)}_{(h_1+x_1,x_2,x_3)}n^3\chi''(nx_1)\zeta(n(x_2-x_2^0))\zeta(n(x_3-x_3^0))dx_1dx_2dx_3=$$

$$[\Delta v]^{(0,x_2^0,x_3^0)}_{(h,x_2^0,x_3^0)}\int_0^{\frac{h_1}{4n}}n\chi''(nx)dx\int_{x_2^0-\frac{h_1}{4n}}^{x_2^0+\frac{h_1}{4n}}n\zeta(n(y-x_2^0))dy\int_{x_3^0-\frac{h_1}{4n}}^{x_3^0+\frac{h_1}{4n}}n\zeta(n(z-x_3^0))dz+$$

$$\int\int\int_{R^+_{0,0}(n)}\varepsilon_n(x_1,x_2,x_3)n^3\chi''(nx_1)\zeta(n(x_2-x_2^0))\zeta(n(x_3-x_3^0))dx_1dx_2dx_3,$$

with ε_n defined by

$$\varepsilon_n(x_1,x_2,x_3)=\Delta v(x_1,x_2,x_3)-\Delta v(x_1+h_1,x_2,x_3)-\Delta v(0,x_2^0,x_3^0)+\Delta v(h_1,x_2^0,x_3^0)$$

in $R^+_{0,0}(n)$. In view of the smoothness of v, $\varepsilon_n\to 0$ in $\mathcal{C}^0(R^+_{0,0}(n))$ when $n\to 0$. Recalling that $\int_0^{\frac{h_1}{4n}}n\chi''(nx_1)dx_1=-1$ and $\int_{-\frac{h_1}{4n}}^{\frac{h_1}{4n}}n\zeta(n(z))dz=1$, and that $\int_0^{\frac{h_1}{4n}}n\mid\chi''(nx)\mid dx$ and $\int_{-\frac{h_1}{4n}}^{\frac{h_1}{4n}}n\mid\zeta(n(z)\mid dz$ are bounded, we get

$$\int\int\int_{R^+_{0,0}(n)}(\Delta v(x_1,x_2,x_3)-\Delta v(h_1+x_1,x_2,x_3))n^3\chi''(nx_1)\zeta(n(x_2-x_2^0))$$
$$\zeta(n(x_3-x_3^0))dx_1dx_2dx_3<-(\Delta v(0,x_2^0,x_3^0))-\Delta v(h,x_2^0,x_3^0))/2$$

for large n.

Then

$$\int\int\int_{R^+_{0,0}(n)}[\Delta v]^{(x_1,x_2,x_3)}_{(h_1+x_1,x_2,x_3)}n^3\chi(nx_1))\zeta''(n(x_2-x_2^0))\zeta(n(x_3-x_3^0))dx_1dx_2dx_3=$$

$$[\Delta v]_{(h_1,x_2^0,x_3^0)}^{(0,x_2^0,x_3^0)} \int_0^{\frac{h_1}{4n}} n\chi(nx)dx \int_{x_2^0-\frac{h_1}{4n}}^{x_2^0+\frac{h_1}{4n}} n\zeta''(n(y-x_2^0))dy \int_{x_3^0-\frac{h_1}{4n}}^{x_3^0+\frac{h_1}{4n}} n\zeta(n(z-x_3^0))dz$$
$$+\int\int\int_{R_{0,0}^+(n)} \varepsilon_n(x_1,x_2,x_3)n^3\chi(nx_1)\zeta''(n(x_2-x_2^0))\zeta(n(x_3-x_3^0))dx_1dx_2dx_3.$$

This expression tends towards 0 when $n \to +\infty$. Indeed, $\int_{x_2^0-\frac{h_1}{4n}}^{x_2^0+\frac{h_1}{4n}} n\zeta''(n(y-x_2^0))dy = 0$ while $\int_0^{\frac{h_1}{4n}} n \mid \chi(nx) \mid dx$ and $\int_{x_2^0-\frac{h_1}{4n}}^{x_2^0+\frac{h_1}{4n}} n \mid \zeta''(n(y-x_2^0) \mid dy$ are bounded. Hence $(\Delta v \mid \Delta\psi_n) < -(\Delta v(0,x_2^0,x_3^0) - \Delta v(h_1,x_2^0,x_3^0))/4$ for large n, and (7.a) is proved.

We only sketch the proof of (7.b), which is similar to the one of (7.a). Assume $\partial_{x_1}\Delta v(0,x_2^0,x_3^0) - \partial_{x_1}\Delta v(h_1,x_2^0,x_3^0) < 0$. Let us still consider functions ψ_n, defined in $R_{k,l}(n)$ by

$$\psi_n(x_1,x_2,x_3) = \chi(n^3(x_1-kh_1))\zeta(n(x_2-x_2^0-lh_1))\zeta(n(x_3-x_3^0)),$$

and vanishing out of $\cup_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2}R_{k,l}$. But now, χ and ζ are even $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ functions, with supports in I: χ is negative on I, increasing on $[0,h_1/4]$ with $\chi(0)=-1$, while ζ takes non negative values with $\int_{-\frac{h_1}{4n}}^{\frac{h_1}{4n}} n\zeta(z)dz = 1$. Assuming $\partial_{x_1}\Delta v(0,x_2^0,x_3^0) - \partial_{x_1}\Delta v(h_1,x_2^0,x_3^0) > 0$ gives a contradiction. Indeed, integrating by parts gives $(\Delta v \mid \Delta\psi_n) = A_n + B_{2,n} + B_{3,n}$ where $A_n = -((\partial_{x_1}\Delta v - \partial_{x_1}\Delta v) \mid \partial_{x_1}\psi_n)$ and $B_{i,n} = (\Delta v \mid \partial^2_{x_i^2}\psi_n)$ for $i=2,3$, where $A_n > (\partial_{x_1}\Delta v(0,x_2^0,x_3^0) - \partial_{x_1}\Delta v(h_1,x_2^0,x_3^0))/2$ while $B_{i,n} \to 0$ when $n \to +\infty$. So the lemma is proved.

References

[1] **Schmitt, B.J.**, and **von Wahl, W. :** *Decomposition of Solenoidal Vector Fields into Poloidal, Toroidal Fields and the Mean Flow, Applications to the Boussinesq Equations.* Lecture notes 1530, Navier-Stokes Equations II, Theory and Numerical Methods, pp. 291-305, Proceedings Oberwolfach 1991

[2] **Farwig, R.**, and **Sohr, H. :** *An Approach to Resolvent estimates for the Stokes Equations in L^q-spaces.* Lecture notes 1530, Navier-Stokes Equations II, Theory and Numerical Methods, pp. 97-110, Proceedings Oberwolfach 1991

[3] **Pazy, A. :** *Semi-groups of linear operators.* Springer 1981

[4] **Giga, Y. :** *Analyticity of the semi-group generated by the Stokes operator in L^r–spaces.* Math. Z. **178**, 297-329 (1981)

[5] **McCracken, M. :** *The resolvent problem for the Stokes equations.* SIAM J. Math. Anal. **12.2**, 201-228 (1981)

[6] **Temam, R. :** *Navier–Stokes equations.* North Holland 1977

received: November 8, 1996

Authors:

Ali Abdennadher
Laboratoire de Modélisation en Mécanique des Fluides,
U.F.R., M.I.G., Université Paul Sabatier,
118 route Narbonne 31062 Toulouse Cedex,
France

Marie Christine Néel
Laboratoire de Modélisation en Mécanique des Fluides,
U.F.R., M.I.G., Université Paul Sabatier,
118 route Narbonne 31062 Toulouse Cedex,
France

Rostock. Math. Kolloq. **53**, 75–110 (1999)

Subject Classification (AMS)
60G44, 60J65

Egbert Dettweiler

Embedding of general martingales into a Brownian motion

Introduction

In 1960 Skorohod proved [10] that for any mean zero, square integrable random variable X there is a Brownian motion and a stopping time τ such that X and B_τ have the same distribution. Meanwhile there exist a series of different, elegant proofs of this so-called Skorohod embedding (cf. [1], [2], [4], [11] and [5]). This embedding gives the possibility to measure the closeness of the distribution of X to a normal distribution $\nu_{0,s}$. Let us shortly indicate the basic idea in the most simple case. Suppose that g is a two times continuously differentiable function. Then an easy application of the Ito-formula gives the first order expansion

$$\mathbb{E}\, g(X) - \mathbb{E}\, g(B_s) = \mathbb{E} g\,(B_\tau) - \mathbb{E}\, g(B_s) = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\, g''(X)(\tau - s) + R\,,$$

with some remainder term R. This and also higher expansions are of course only useful, if the stopping time τ can be handled. For example, if $X = M_t$, where $M = (M_t)_{t\geq 0}$ is a continuous, square integrable martingale, then the theorem of Dubins and Schwartz (cf. [3]) gives the nice stopping time $\tau = \tau_t = [M]_t$.

In [8], P. A. Mykland has obtained a new construction for a Skorohod embedding. He uses this construction to embed general right continuous martingales into a Brownian motion, such that a kind of the Dubins and Schwartz result holds.

The present paper is based on the ideas of Mykland in [8] and had its origin in some gaps in the proofs of [8]. The efforts of filling these gaps finally lead to a slightly different type of embedding.

1 The Skorohod embedding of P. A. Mykland

Suppose that $[a, b]$ is an interval containing 0. Then it is well known that there exists a continuous martingale $(L_t, \mathcal{G}_t)_{0 \le t \le 1}$ such that L_1 has the distribution $\frac{b}{b-a}\delta_a + \frac{-a}{b-a}\delta_b$. Just take a Brownian motion $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$ starting at 0 and let τ denote the hitting time of (B_t) of the set $\{a, b\}$. If $\varphi : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}_+$ is a continuous, strictly increasing function with $\varphi(0) = 0$ and $\varphi(1) = \infty$, then the process $(L_t, \mathcal{G}_t)_{0 \le t \le 1}$, defined by $L_t = B_{\varphi(t) \wedge \tau}$ and $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\varphi(t)}$, has the desired properties. We will call a martingale of this type a martingale ending in $\{a, b\}$. As e.g. in [2] such martingales will play a central role in the following Skorohod imbedding of a single random variable.

Theorem 1.1 *Let X be a random variable on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ with the properties $\mathbb{E}X = 0$ and $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Then there exists an extension $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ of $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (cf. eg. [11], 3.4.1 for the usual definition of an extension) and a continuous, square integrable martingale $(M_t(X), \mathcal{G}_t)_{0 \le t \le 1}$ on Ω' such that $M_1(X) = X$.*

Proof: Let $p \in]0,1[$ be given. For the construction of the martingale $M(X)$ we take an independent sequence $(L^k)_{k \ge 0}$ of continuous martingales $(L_t^k, \mathcal{G}_t^k)_{0 \le t \le 1}$ ending in $\{-p, 1-p\}$, which is also independent of X.

We remark that every martingale L^k as a stopped Brownian motion is an L^q−martingale for every $q \ge 1$. For later use we define with the aid of the sequence (L^k) the following sequences of random variables: We set for $k \ge 0$

$$\begin{aligned} \eta_k &:= p + L_1^k\,, \\ \zeta_k &:= p\eta_k + (1-p)(1-\eta_k)\,, \\ \xi_k &:= p(1-\eta_k) + (1-p)\eta_k\,, \\ \sigma_k &:= [L^k]_1 \quad \text{(the quadratic variation of } L^k \text{ at time 1)}\,. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Then obviously η_k takes the values 0 and 1 with probability $1-p$ and p resp.. Now we start with the construction of $M(X)$. Set $X_1 = X$ and denote by Y_1 an independent copy of X_1, which is also independent of $(L^k)_{k \ge 0}$. Then define

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} &= \eta_0 X_1 + (1-\eta_0) Y_1 \quad \text{and} \\ X_1^{(2)} &= (1-\eta_0) X_1 + \eta_0 Y_1\,, \end{aligned}$$

and

$$X_{2^{-1}} = pX_1^{(1)} + (1-p) X_1^{(2)}\,.$$

If $X_{2^{-n}}$ $(n \geq 0)$ is already defined, we proceed similary to define $X_{2^{-(n+1)}}$. First we take an independent copy $Y_{2^{-n}}$ of $X_{2^{-n}}$, which is also independent of all random variables which are already introduced. Then we set

$$\begin{aligned} X^{(1)}_{2^{-n}} &= \eta_n X_{2^{-n}} + (1-\eta_n) Y_{2^{-n}}\,, \text{ and} \\ X^{(2)}_{2^{-n}} &= (1-\eta_n) X_{2^{-n}} + \eta_n Y_{2^{-n}}\,, \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

and

$$X_{2^{-(n+1)}} = p X^{(1)}_{2^{-n}} + (1-p) X^{(2)}_{2^{-n}}\,. \tag{1.1.3}$$

Now we define a filtration $(\overline{\mathcal{F}}_{2^{-n}})_{n\geq 0}$ such that $(X_{2^{-n}})_{n\geq 0}$ is $(\overline{\mathcal{F}}_{2^{-n}})-$adapted. We set

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_1 &= \sigma\left(X,\, X^{(1)}_{2^{-k}},\, X^{(2)}_{2^{-k}}\ (k \geq 0)\right)\,, \quad \text{and} \\ \overline{\mathcal{F}}_{2^{-(n+1)}} &= \sigma\left(X^{(1)}_{2^{-k}},\, X^{(2)}_{2^{-k}}\ (k \geq n)\right)\ (n \geq 0)\,. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Then $(X_{2^{-n}}, \overline{\mathcal{F}}_{2^{-n}})_{n\geq 0}$ is a martingale.

Proof: Essential for the martingale property of $(X_{2^{-n}}, \overline{\mathcal{F}}_{2^{-n}})$ is the observation that for every $n \geq 0$ the process L^n and the $\sigma-$algebra $\overline{\mathcal{F}}_{2^{-(n+1)}}$ are independent. [Proof: First one gets easily from the definitions that the variables $X^{(1)}_{2^{-n}}$ and $X^{(2)}_{2^{-n}}$ have the same distribution as $X_{2^{-n}}$ and $Y_{2^{-n}}$. For $0 \leq t_1 < \cdots < t_k \leq 1$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, $C_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $C_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) :=$ Borel field of $\mathbb{R}^k$) then one computes

$$\begin{aligned} & P\left[(L^n_{t_1}, \ldots, L^n_{t_k}) \in A,\, X^{(1)}_{2^{-n}} \in C_1,\, X^{(2)}_{2^{-n}} \in C_2\right] \\ & = \ P\left[(L^n_{t_1}, \ldots, L^n_{t_k}) \in A,\, \eta_n = 0,\, X^{(1)}_{2^{-n}} \in C_1,\, X^{(2)}_{2^{-n}} \in C_2\right] \\ & \quad + P\left((L^n_{t_1}, \ldots, L^n_{t_k}) \in A,\, \eta_n = 1,\, X^{(1)}_{2^{-n}} \in C_1,\, X^{(2)}_{2^{-n}} \in C_2\right] \\ & = \ P\left[(L^n_{t_1}, \ldots, L^n_{t_k}) \in A,\, \eta_n = 0\right] P[Y_{2^{-n}} \in C_1] P[X_{2^{-n}} \in C_2] \\ & \quad + P\left[(L^n_{t_1}, \ldots, L^n_{t_k}) \in A,\, \eta_n = 1\right] P[X_{2^{-n}} \in C_1] P[Y_{2^{-n}} \in C_2] \\ & = \ P\left[(L^n_{t_1}, \ldots, L^n_{t_k}) \in A\right] P[X^{(1)}_{2^{-n}} \in C_1] P[X^{(2)}_{2^{-n}} \in C_2]\,, \end{aligned}$$

because of (1.1.2). This gives that L^n and $\left\{X^{(1)}_{2^{-n}},\, X^{(2)}_{2^{-n}}\right\}$ are independent. It follows that L^n and $\sigma\left(X^{(1)}_{2^{-n}},\, X^{(2)}_{2^{-n}}, L^m(m > n), Y_{2^{-m}}(m > n)\right)$ are independent. Since the latter σ-algebra contains $\overline{\mathcal{F}}_{2^{-(n+1)}}$ by 1.1.3, the independence of L^n and $\overline{\mathcal{F}}_{2^{-(n+1)}}$ is proved.] From this independence property we obtain for every $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[X_{2^{-n}} \,|\, \overline{\mathcal{F}}_{2^{-(n+1)}}\right] \\ & = \mathbb{E}\left[X_{2^{-n}} 1_{[\eta_n = 1]} + X_{2^{-n}} 1_{[\eta_n = 0]} \,|\, \overline{\mathcal{F}}_{2^{-(n+1)}}\right] \\ & = \mathbb{E}\left[X^{(1)}_{2^{-n}} 1_{[\eta_n = 1]} + X^{(2)}_{2^{-n}} 1_{[\eta_n = 0]} \,|\, \overline{\mathcal{F}}_{2^{-(n+1)}}\right] \qquad \text{(by (1.1.2))} \\ & = p X^{(1)}_{2^{-n}} + (1-p) X^{(2)}_{2^{-n}} = X_{2^{-(n+1)}}\,, \end{aligned}$$

i.e. $(X_{2^{-n}})_{n\geq 0}$ is an $(\overline{\mathcal{F}}_{2^{-n}})-$martingale.

Next we observe that (1.1.3) implies

$$\begin{aligned} X^{(1)}_{2^{-n}} - X_{2^{-(n+1)}} &= (1-p)\left(X^{(1)}_{2^{-n}} - X^{(2)}_{2^{-n}}\right)\,, \text{ and} \\ X^{(2)}_{2^{-n}} - X_{2^{-(n+1)}} &= (-p)\left(X^{(1)}_{2^{-n}} - X^{(2)}_{2^{-n}}\right)\,, \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

and it follows from the definition of η_n and (1.1.2) that

$$X_{2^{-(n+1)}} + \left(X^{(1)}_{2^{-n}} - X^{(2)}_{2^{-n}}\right) L^n_1 = X_{2^{-n}}\,. \tag{1.1.6}$$

Now we set for every $n \geq 0$ and $2^{-(n+1)} < t \leq 2^{-n}$,

$$M_t(X) = X_{2^{-(n+1)}} + \left(X^{(1)}_{2^{-n}} - X^{(2)}_{2^{-n}}\right) L^n_{2^{n+1}t-1}\,. \tag{1.1.7}$$

Then the process $(M_t(X))_{0<t\leq 1}$ is obviously a continuous process such that

$$M_{2^{-n}}(X) = X_{2^{-n}}$$

for every $n \geq 0$.

Since $\mathbb{E}X_{2^{-n}} = 0$, (1.1.2) implies $\mathbb{E}X^{(1)}_{2^{-n}}X^{(2)}_{2^{-n}} = \mathbb{E}X_{2^{-n}}Y_{2^{-n}} = 0$, and we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X_{2^{-n}}\right)^2 &= (p^2 + (1-p)^2)\mathbb{E}\left(X_{2^{-(n+1)}}\right)^2 \\ &= \cdots = (p^2 + (1-p)^2)^n \mathbb{E}X^2\,, \end{aligned}$$

which implies that $\lim\limits_{t\to 0} M_t(X) = 0$ in L^2. Hence the definition $M_0(X) = 0$ gives the (a.s.) continuous process $(M_t(X))_{0\leq t\leq 1}$. We now define the following filtration associated to this process $M(X)$. We put

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega'\} \\ &\quad \text{(where } \Omega' = \Omega \times \cdots \text{ denotes the extension of } \Omega \text{, such} \\ &\quad \text{that all random variables introduced above are defined} \\ &\quad \text{on } \Omega'.) \\ &\mathcal{G}_t = \sigma\left(\overline{\mathcal{F}}_{2^{-(n+1)}},\, \mathcal{G}^k_s\ (k > n,\, 0 \leq s \leq 1),\, \mathcal{G}^n_s\ (0 \leq s \leq 2^{n+1}t - 1)\right) \\ &\quad \text{for } 2^{-(n+1)} \leq t < 2^{-n}\ (n \geq 0), \text{ and} \\ &\mathcal{G}_1 = \sigma\left(\overline{\mathcal{F}}_1, \mathcal{G}^n_s\ (n \geq 0,\ 0 \leq s \leq 1)\right)\,. \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Then $(M_t(X), \mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq 1}$ is the asserted martingale.

Remarks 1.2 (1) Since the processes L^n in the construction of the martingale $M(X)$ are (as stopped Brownian motions) L^q-martingales for every $q \geq 1$, the martingale $M(X)$ is an L^q-martingale if and only if X is $q-$integrable. (2) By the theorem of Dubins and

Schwartz (cf. [3]) there exists a Brownian motion $(B_t, \mathcal{F}_t)_{0\le t\le 1}$ on Ω' such that $\tau_t = [M(X)]_t$ $(0 \le t \le 1)$ is an $(\mathcal{F}_t)-$stopping time, and such that $B_{\tau_t} = M_t(X)$ a.s. for every t. Especially, $B_{\tau_1} = X$, which means that theorem 1.1 gives a so−called Skorohod embedding of X. The essential feature of the Skorohod embedding of 1.1 is the special structure of $[M(X)]_1$, the quadratic variation of $M(X)$ at time 1. This is described in the following result.

Proposition 1.3 *With the notations introduced in the proof of 1.1 the following formula holds for $[M(X)]_1$:*

$$[M(X)]_1 = \sum_{n\ge 0} (X_{2^{-n}} - Y_{2^{-n}})^2 \sigma_n \quad \text{a.s.}\,, \tag{1.3.1}$$

and $X_{2^{-n}}$ has the structure

$$\begin{aligned} X_{2^{-n}} &= Z_n X + V_n\,, \text{ where } Z_0 = 1,\ V_0 = 0\,, \qquad (1.3.2)\\ &\text{and for } n \ge 1\\ Z_n &= \zeta_{n-1}\zeta_{n-2}\cdots\zeta_0\,,\\ V_n &= \sum_{j=0}^{n-1} Z_{n,j} Y_{2^{-j}} \quad \text{with}\\ Z_{n,j} &= \zeta_{n-1}\cdots\zeta_{j+1}\xi_j\,. \end{aligned}$$

Proof: From the definition of $M(X)$ it follows that

$$[M(X)]_1 = \sum_{n\ge 0} \left(X^{(1)}_{2^{-n}} - X^{(2)}_{2^{-n}}\right)^2 \sigma_n = \sum_{n\ge 0} (X_{2^{-n}} - Y_{2^{-n}})^2 \sigma_n\,,$$

i.e. (1.3.1) holds. The assertion (1.3.2) is easily proved by induction, using that (1.1.2) implies (see (1.1.1))

$$X_{2^{-(n+1)}} = \zeta_n X_{2^{-n}} + \xi_n Y_{2^{-n}} \tag{1.3.3}$$

for all $n \ge 0$. [Since $X_{2^{-n}} = X$ and $X_{2^{-1}} = \zeta_0 X + \xi_0 Y_{2^{-0}}$ (by 1.3.3), the assertion (1.3.2) is true for $n = 0, 1$. Now suppose that (1.3.2) holds for $n \ge 1$. Then we get from (1.1.3)

$$\begin{aligned} X_{2^{-(n+1)}} &= \zeta_n Z_n X + \zeta_n V_n + \xi_n Y_{2^{-n}}\\ &= Z_{n+1} X + \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_n Z_{n,j} Y_{2^{-j}} + \xi_n Y_{2^{-n}}\\ &= Z_{n+1} X + \sum_{j=0}^{n} Z_{n+1,j} Y_{2^{-j}}\,.] \end{aligned}$$

By (1.3.1) we have the representation

$$[M(X)]_1 = \sum_{n\ge 0} (Z_n X + V_n - Y_{2^{-n}})^2 \sigma_n, \text{ and we know that} \tag{1.3.4}$$

(i) σ_n is independent of $Z_n X + V_n - Y_{2^{-n}}$ (and of X), and

(ii) $V_n - Y_{2^{-n}}$ and Z_n are independent of X.

Furthermore, the construction of $X_{2^{-n}}$ shows that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y_{2^{-n}}^2 &= \mathbb{E}X_{2^{-n}}^2 = a_n \mathbb{E}X^2 \qquad \text{and}\\ \mathbb{E}Y_{2^{-n}}^4 &= \mathbb{E}X_{2^{-n}}^4 = b_n \mathbb{E}X^4 + c_n(\mathbb{E}X^2)^2\end{aligned}$$

for some constants a_n, b_n, c_n (which can be easily computed).
These observations lead to the following corollary of (1.3).

Corollary 1.4 *The following formulas hold for the conditional expectation* $\mathbb{E}([M(X)]_1|X)$ *and the conditional variance* $\mathit{Var}\,([M(X)]_1|X) = \mathbb{E}([M(X)]_1^2|X) - \{\mathbb{E}([M(X)]_1|X)\}^2$.
There exists constants $\alpha_1(p), \alpha_2(p), \beta_1(p), \dots, \beta_5(p)$ *such that*

$$\mathbb{E}([M(X)]_1|X) = \alpha_1(p)X^2 + \alpha_2(p)\mathbb{E}X^2, \quad \text{and} \tag{1.3.1}$$

$$\begin{aligned}\mathit{Var}\,([M(X)]_1|X) = \beta_1(p)X^4 &+ \beta_2(p)\mathbb{E}X^4 + \beta_3(p)(\mathbb{E}X^2)^2\\ &+ \beta_4(p)X^2\mathbb{E}X^2 + \beta_5(p)X\mathbb{E}X^3.\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Remark 1.5 It will turn out (cf. [8]) that most of the constants do not depend on p. More precisely, we will show in the third paragraph that

$$\begin{aligned}&\alpha_1(p) = \frac{1}{3}\,, && \alpha_2(p) = \frac{2}{3}\,,\\ &\beta_1(p) = \frac{2}{45}\,, && \beta_2(p) = \frac{8}{45}\,,\\ &\beta_3(p) = \frac{4}{9} - c(p)\,, && \beta_4(p) = c(p)\,, \quad \beta_5(p) = -c(p)\,,\end{aligned}$$

where only $c(p)$ depends on p. If we work in the following with the formulas (1.3.1) and (1.3.2), we will already take the above values of the yet unknown constants $\alpha_1(p), \dots, \beta_5(p)$.

For the following results we have to generalize slightly the notion of an extension of a given probability space. A probability space $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ is henceforth called an <u>extension</u> of the given probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, if there exists a map $\pi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ such that $\pi^{-1}(\mathcal{F}) \subset \widetilde{\mathcal{F}}$ and $\pi(\widetilde{\mathbb{P}}) = \mathbb{P}$. If $(\mathcal{F}_t)$ is a filtration on Ω, a filtration $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)$ on $\widetilde{\Omega}$ is called an <u>extension of</u> $(\mathcal{F}_t)$, if $\pi^{-1}(\mathcal{F}_t) \subset \widetilde{\mathcal{F}}_t$ for all t. For the extension $(\pi^{-1}(\mathcal{F}_t))$ we usually use again the notation $(\mathcal{F}_t)$. Similarly, if X is a random variable on Ω, the extended random variable $X \circ \pi$ is usually again denoted by X.

Theorem 1.6 (Skorohod embedding of a discrete time martingale) *Let $M = (M_k, \mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$ be a square integrable martingale on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with $M_0 = 0$. Then there exists an extension $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ of Ω and a continuous, square integrable martingale $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_t, \widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ on $\widetilde{\Omega}$ with the following properties:*

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{\mathcal{F}}_k)_{k\geq 0} \text{ is an extension of } (\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}\,,\\
&\widetilde{M}_k = M_k \quad \text{for all } k \geq 0\,, \text{ and}\\
&\mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_n|\mathcal{F}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}(M_{k+1}-M_k)^2 + \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left((M_{k+1}-M_k)^2|\mathcal{F}_k\right)\\
&\text{for all } n \geq 1\,.
\end{aligned}
$$

If, in addition, M is an L^4 –martingale, then $\widetilde{M}$ is an L^4 –martingale, and

$$
\begin{aligned}
&Var\left([\widetilde{M}]_n|\mathcal{F}\right)\\
&= \frac{2}{45}\sum_{k=0}^{n-1}(M_{k+1}-M_k)^4 + \frac{8}{45}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left((M_{k+1}-M_k)^4|\mathcal{F}_k\right)\\
&\quad + \left(\frac{4}{9}-c(p)\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathbb{E}\left((M_{k+1}-M_k)^2|\mathcal{F}_k\right)\right)^2\\
&\quad + c(p)\sum_{k=0}^{n-1}(M_{k+1}-M_k)^2\mathbb{E}\left((M_{k+1}-M_k)^2|\mathcal{F}_k\right)\\
&\quad - c(p)\sum_{k=0}^{n-1}(M_{k+1}-M_k)\mathbb{E}\left((M_{k+1}-M_k)^3|\mathcal{F}_k\right)
\end{aligned}
$$

for all $n \geq 1$.

Proof: We set $X_0 = 0$ and $X_n = M_n - M_{n-1}$ for $n \geq 1$. From theorem 1.1 we get that there exists an extension $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ of Ω and a continuous, square integrable martingale $(M_t(X_1), \mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq 1}$ such that $M_1(X_1) = X_1$. Now we set

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{F}_t} := \mathcal{G}_t \text{ for } 0 \leq t \leq 1\,, \quad \widetilde{\mathcal{F}_1} := \mathcal{G}_1 \vee \mathcal{F}_1\,, \quad \widetilde{M_t} := M_t(X_1)\\
&\text{for } t \in [0,1] \text{ and } \left(\widetilde{\Omega}^{(1)}, \widetilde{\mathcal{F}}^{(1)}, \widetilde{\mathbb{P}}^{(1)}\right) := (\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')\,.
\end{aligned}
$$

Then it follows from theorem 1.1 that for $\mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_1|\mathcal{F}\right)$ and $Var\left([\widetilde{M}]_1|\mathcal{F}\right)$ the asserted formulas of the theorem hold.

The structure of the proof is now as follows. First we define by induction a sequence $\left(\widetilde{\Omega}^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ of probability spaces with the following properties:

1. For every $n \geq 1$ the probability space $\widetilde{\Omega}^{(n+1)}$ is an extension of $\widetilde{\Omega}^{(n)}$, i.e. there exists a measurable map $\Psi_{n+1} : \widetilde{\Omega}^{(n+1)} \longrightarrow \widetilde{\Omega}^{(n)}$ such that $\Psi_{n+1}\left(\widetilde{\mathbb{P}}^{(n+1)}\right) = \widetilde{\mathbb{P}}^{(n)}$.

2. On every $\widetilde{\Omega}^{(n)}$ there is a filtration $\left(\widetilde{\mathcal{F}}_t\right)_{0\leq t\leq n}$ such that for $0 \leq t \leq n-1$ the σ-algebra $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ is just the canonical extension of the σ-algebra $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ defined before on $\widetilde{\Omega}^{(n-1)}$.

3. On $\widetilde{\Omega}^{(n)}$ there exists a continuous L^2- (resp. L^4-)martingale $\left(\widetilde{M}_t\right)_{0\leq t\leq n}$ relative to the filtration $\left(\widetilde{\mathcal{F}}_t\right)$, such that for $0 \leq t \leq n-1$ the $\widetilde{M}_t$ is the canonical extension of the $\widetilde{M}_t$ defined before on $\widetilde{\Omega}^{(n-1)}$.

4. $\widetilde{M}_k = M_k$ for $0 \leq k \leq n$ and the asserted formulas for $\mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_m|\mathcal{F}\right)$ and $Var\left([\widetilde{M}]_m|\mathcal{F}\right)$ hold for $1 \leq m \leq n$.

The final extension $\widetilde{\Omega}$ then is defined as the projective limit $\varprojlim \widetilde{\Omega}^{(n)}$, and the canonical extensions of the $\widetilde{M}_t$ and $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ to $\widetilde{\Omega}$ then yield the martingale $\left(\widetilde{M}_t, \widetilde{\mathcal{F}}_t\right)_{t\geq 0}$ with the asserted properties.

First we construct the extensions $\widetilde{\Omega}^{(n)}$ under the additional hypothesis that for every $n \geq 1$ there exists a regular conditional probability of $\mathcal{F}_n$ relative to $\mathcal{F}_{n-1}$, i.e. a Markov kernel

$$\mathbb{K}^{(n)} : \Omega \times \mathcal{F}_n \longrightarrow [0, 1]\,,$$

such that $\mathbb{K}^{(n)}(., A)$ is $\mathcal{F}_{n-1}$-measurable for every $A \in \mathcal{F}_n$ and such that $\mathbb{K}^{(n)}(\omega, .)$ is a probability measure on $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ for every ω, which we also denote by $\mathbb{K}_\omega^{(n)}$. At the end of the proof we will indicate how to dispense from this assumption.

If $\overline{\Omega}$ is an extension of Ω, and $\pi : \overline{\Omega} \longrightarrow \Omega$ the associated extension map, then for every $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}$ we write $\mathbb{K}_{\overline{\omega}}^{(n)}$ for the probability measure $\mathbb{K}_{\pi(\overline{\omega})}^{(n)}$.

Now suppose that $\widetilde{\Omega}^{(n-1)}$ is already constructed. Let (S, Σ, Q) be a probability space, on which a martingale $(L_t, \mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq 1}$ ending in $\{-p, 1-p\}$ is defined. Then we set

$$\widetilde{\Omega}^{(n)} := \prod_{k\geq 0} \widetilde{\Omega}_k \times \prod_{k\geq 0} S_k$$

with $\widetilde{\Omega}_k = \widetilde{\Omega}^{(n-1)}$ and $S_k = S$ for all $k \geq 0$, and we denote by π_k^1 resp. π_k^2 the canonical projections from $\widetilde{\Omega}^{(n)}$ onto $\widetilde{\Omega}_k$ resp. S_k. We identify $\widetilde{\Omega}^{(n-1)}$ with $\widetilde{\Omega}_0$.

We proceed as in the proof of the theorem 1.1. For every $k \geq 0$ let $\left(L_t^k, \mathcal{G}_t^k\right)_{0\leq t\leq 1}$ be the copy of $(L_t, \mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq 1}$ on $\widetilde{\Omega}^{(n)}$ defined by

$$L_t^k := L_t \circ \pi_k^2 \text{ and } \mathcal{G}_t^k := \left(\pi_k^2\right)^{-1}(\mathcal{G}_t)$$

and set $\eta_k := p + L_1^k$. Similarly, we set

$$(X_n)_1 := X_n \circ \pi_0^1 \,,\ (Y_n)_1 := X_n \circ \pi_1^1 \,,$$

and define $(X_n)_1^{(1)}$, $(X_n)_1^{(2)}$ and $(X_n)_{2^{-1}}$ from $(X_n)_1$, $(Y_n)_1$, η_0 as in the proof of theorem 1.1. Suppose now that $(X_n)_{2^{-m}}$ is already defined on $\widetilde{\Omega}^{(n)}$ in such a way that

$$(X_n)_{2^{-m}} = Z_m \circ \left(\pi_0^1, \dots , \pi_{2^m-1}^1\right) \,,$$

where Z_m is a random variable on $\widetilde{\Omega}_0 \times \dots \times \widetilde{\Omega}_{2^m-1}$. Then we set

$$(Y_n)_{2^{-m}} := Z_m \circ \left(\pi_{2^m}^1, \dots , \pi_{2^{m+1}-1}^1\right) \,,$$

and define

$$(X_n)_{2^{-m}}^{(1)} \,,\ (X_n)_{2^{-m}}^{(2)} \,,\ \text{and}\ (X_n)_{2^{-(m+1)}}$$

again from $(X_n)_{2^{-m}}$, $(Y_n)_{2^{-m}}$ and η_m as in the proof of theorem 1.1. Then we set for every $m \geq 0$ and $t \in]2^{-(m+1)}, 2^{-m}]$,

$$\begin{aligned}
M_t(X_n) &:= (X_n)_{2^{-(m+1)}} + \left((X_n)_{2^{-m}}^{(1)} - (X_n)_{2^{-m}}^{(2)}\right) L_{2^{m+1}t-1}^m \,, \\
\overline{\mathcal{F}}_1^{(n)} &:= \sigma\left(X_n, (X_n)_{2^{-k}}^{(1)}, (X_n)_{2^{-k}}^{(2)}\ (k \geq 0)\right) \,, \\
\overline{\mathcal{F}}_{2^{-(m+1)}}^{(n)} &:= \sigma\left((X_n)_{2^{-k}}^{(1)}, (X_n)_{2^{-k}}^{(2)}\ (k \geq m)\right) \quad (\text{for } m \geq 0) \,, \\
\mathcal{G}_0^{(n)} &:= \{\emptyset, \widetilde{\Omega}^{(n)}\} \,, \\
\mathcal{G}_t^{(n)} &:= \sigma\left(\overline{\mathcal{F}}_{2^{-(m+1)}}^{(n)}, \mathcal{G}_1^k\ (k > m), \mathcal{G}_t^m\right) \quad \text{for } t \in [2^{-(m+1)}, 2^{-m}[\,, \\
\mathcal{G}_1^{(n)} &:= \sigma\left(\overline{\mathcal{F}}_1^{(n)}, \mathcal{G}_1^k\ (k \geq 0)\right) \,.
\end{aligned}$$

Then it follows from theorem 1.1 that $\left(M_t(X_n), \mathcal{G}_t^{(n)}\right)_{0 \leq t \leq 1}$ is an L^2- (resp. L^4-)martingale on $\widetilde{\Omega}^{(n)}$ relative to every probability measure

$$\mathbb{R}_{\widetilde{\omega}}^{(n)} := \left(\mathbb{K}_{\widetilde{\omega}}^{(n)}\right)^{\otimes \mathbb{Z}_+} \otimes Q^{\otimes \mathbb{Z}_+} \quad \left(\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}^{(n-1)}\right)$$

on $\widetilde{\Omega}^{(n)}$. Finally, we set $\widetilde{\mathcal{F}}^{(n)} := \widetilde{\mathcal{F}}_{n-1} \vee \mathcal{G}_1^{(n)} \vee \mathcal{F}$ and

$$\widetilde{\mathcal{F}}_t = \begin{cases} \widetilde{\mathcal{F}}_t & \text{for } 0 \leq t \leq n-1 \\ & (\text{canonical extension from } \widetilde{\Omega}^{(n-1)} \text{ to } \widetilde{\Omega}^{(n)}) \,, \\ \widetilde{\mathcal{F}}_{n-1} \vee \mathcal{G}_t^{(n)} & \text{for } n-1 < t < n \,, \\ \widetilde{\mathcal{F}}_{n-1} \vee \mathcal{G}_1^{(n)} \vee \mathcal{F}_n \,. & \end{cases}$$

Then we define on $\left(\widetilde{\Omega}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{F}}^{(n)}\right)$ the probability measure $\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)}$ by

$$\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)}(A) := \int\limits_{\widetilde{\Omega}^{(n-1)}} \mathbb{R}_{\widetilde{\omega}}^{(n)}(A)\widetilde{\mathbb{P}}^{(n-1)}(d\widetilde{\omega})$$

for $A \in \widetilde{\mathcal{F}}^{(n)}$, and set

$$\widetilde{M}_t = \begin{cases} \widetilde{M}_t & \text{for } 0 \le t \le n-1 \\ & \text{(canonical extension from } \widetilde{\Omega}^{(n-1)} \text{ to } \widetilde{\Omega}^{(n)}), \\ \widetilde{M}_{n-1} + \widetilde{M}_{t-(n-1)}(X_n) & \text{for } n-1 < t \le n\,. \end{cases}$$

Then we claim that $\left(\widetilde{M}_t, \widetilde{\mathcal{F}}_t\right)_{0 \le t \le n}$ is an L^2-(resp. L^4-)martingale on $\left(\widetilde{\Omega}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{F}}^{(n)}, \widetilde{\mathbb{P}}^{(n)}\right)$ such that the asserted formulas for $\mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_k|\mathcal{F}\right)$ and $Var\left([\widetilde{M}]_k|\mathcal{F}\right)$ hold for $k = 1, \dots, n$. As already remarked, this is proved by induction. On $\widetilde{\Omega}^{(1)}$ the assertion holds by the theorem 1.1. Now assume that the assertion is proved on $\widetilde{\Omega}^{(n-1)}$. Then we have to show that

(i) $\left(\widetilde{M}_t, \widetilde{\mathcal{F}}_t\right)_{n-1 \le t \le n}$ is a martingale,

(ii) the asserted formula holds for $\mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_n|\mathcal{F}\right)$,

(iii) the asserted formula holds for $Var\left([\widetilde{M}]_n|\mathcal{F}\right)$.

Proof of (i): It is easily proved by induction that for every $n \ge 1$ we have the inclusion

$$\mathcal{F}_n \subset \widetilde{\mathcal{F}}_n \subset \mathcal{F}_n \vee \mathcal{H}_n\,,$$

where $\mathcal{H}_n$ is a σ-algebra independent of $\mathcal{F}_n$ (even independent of the whole σ-algebra $\mathcal{F}$ on Ω). This implies that for every $A \in \mathcal{F}_n$ we have

$$\widetilde{\mathbb{P}}^{(n-1)}\left(A|\widetilde{\mathcal{F}}_{n-1}\right) = \mathbb{P}\left(A|\mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{K}_\bullet^{(n)}(A)\,,$$

i.e. $\mathbb{K}^{(n)}$ is also a regular conditional probability of $\mathcal{F}_n$ given $\widetilde{\mathcal{F}}_{n-1}$.

For (i) we have to prove that

$$\mathbb{E}\left(M_t(X_n) - M_s(X_n)|\widetilde{\mathcal{F}}_s\right) = 0 \quad \widetilde{\mathbb{P}}^{(n)} - a.s.$$

for $0 \le s < t \le 1$. Because of $\widetilde{\mathcal{F}}_s = \widetilde{\mathcal{F}}_{n-1} \vee \mathcal{G}_s^{(n)}$ we choose an $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ and a $B \in \mathcal{G}_s^{(n)}$. Then we get by the above remark

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{A\cap B} (M_t(X_n) - M_s(X_n))\, d\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)} \\
&= \int\limits_{\widetilde{\Omega}^{(n-1)}} \int\limits_{\widetilde{\Omega}^{(n)}} 1_A\left(\widetilde{\omega}^{(n)}\right) 1_B\left(\widetilde{\omega}^{(n)}\right)\left(M_t(X_n)\left(\widetilde{\omega}^{(n)}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - M_s(X_n)\left(\widetilde{\omega}^{(n)}\right)\right)\mathbb{R}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{(n-1)}}(d\widetilde{\omega}^{(n)})\mathbb{P}^{(n)}(d\widetilde{\omega}^{(n-1)}) \\
&= \int\limits_{\widetilde{\Omega}^{(n-1)}} 1_A\left(\widetilde{\omega}^{(n-1)}\right) \int\limits_B (M_t(X_n) - M_s(X_n))\, d\,\mathbb{R}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{(n-1)}} \widetilde{\mathbb{P}}^{(n)}\left(d\widetilde{\omega}^{(n-1)}\right) = 0\,,
\end{aligned}
$$

since $\int_B (M_t(X_n) - M_s(X_n))\, d\,\mathbb{R}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{(n-1)}} = 0$ for all $\widetilde{\omega}^{(n-1)} \in \widetilde{\Omega}^{(n-1)}$ by theorem 1.1. Hence (i) is proved.

Proof of (ii): Since

$$
\mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_n|\mathcal{F}\right) = \mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_{n-1}|\mathcal{F}\right) + \mathbb{E}\left([\widetilde{M} - \widetilde{M}_{n-1}]_n|\mathcal{F}\right)
$$

it remains to prove that

$$
\mathbb{E}\left([\widetilde{M} - \widetilde{M}_{n-1}]_n|\mathcal{F}\right) = \frac{1}{3}X_n^2 + \frac{2}{3}\mathbb{E}\left(X_n^2|\mathcal{F}_{n-1}\right)\,.
$$

Now for every $A \in \mathcal{F}$ we obtain

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_A [\widetilde{M} - \widetilde{M}_{n-1}]_n d\,\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)} \\
&= \int\limits_A [M(X_n)]_1 d\,\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)} \\
&= \int\limits_{\widetilde{\Omega}^{(n-1)}} \int\limits_A [M(X_n)]_1 d\,\mathbb{R}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{n-1}} \widetilde{\mathbb{P}}^{(n-1)}(d\widetilde{\omega}^{n-1})\,.
\end{aligned}
$$

If we denote by $\mathbb{E}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{n-1}}$ the expectation relative to the probability measure $\mathbb{R}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{n-1}}$ on $\widetilde{\Omega}^{(n)}$, then we get from theorem 1.1

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_A [M(X_n)]_1 \mathbb{R}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{n-1}} \\
&= \int\limits_A \mathbb{E}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{n-1}}\left([M(X_n)]_1|\mathcal{F}\right) d\,\mathbb{R}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{n-1}} \\
&= \int\limits_A \left(\frac{1}{3}X_n^2 + \frac{2}{3}\mathbb{E}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{n-1}}(X_n^2)\right) d\,\mathbb{R}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{n-1}}\,,
\end{aligned}
$$

and hence

$$\int_A [M(X_n)]_1 d\,\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)} = \int_A \left(\frac{1}{3}X_n^2 + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n^2|\mathcal{F}_{n-1})\right) d\,\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)}\,.$$

Proof of (iii): We have

$$\begin{aligned}
&Var\left([\widetilde{M}]_n|\mathcal{F}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\left([\widetilde{M}]_{n-1} + [\widetilde{M} - \widetilde{M}_{n-1}]_n - \mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_{n-1}|\mathcal{F}\right) - \mathbb{E}\left([\widetilde{M} - \widetilde{M}_{n-1}]_n|\mathcal{F}\right)\right)^2 |\mathcal{F}\right)\\
&= Var\left([\widetilde{M}]_{n-1}|\mathcal{F}\right) + Var\left([\widetilde{M} - \widetilde{M}_{n-1}]_n|\mathcal{F}\right)\\
&\quad + 2\mathbb{E}\left(\left([\widetilde{M}]_{n-1} - \mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_{n-1}|\mathcal{F}\right)\right)\left([\widetilde{M} - \widetilde{M}_{n-1}]_n - \mathbb{E}\left([\widetilde{M} - \widetilde{M}_{n-1}]_n|\mathcal{F}\right)\right)|\mathcal{F}\right)\,.
\end{aligned}$$

Since $\left([\widetilde{M}]_{n-1} - \mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_{n-1}|\mathcal{F}\right)\right)$ is $\widetilde{\mathcal{F}}_{n-1}$-measurable by (ii), we get for every $A \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}
&\int_A \left([\widetilde{M}]_{n-1} - \mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_{n-1}|\mathcal{F}\right)\right)\left([M(X_n)]_1 - \mathbb{E}\left([M(X_n)]_1|\mathcal{F}\right)\right) d\,\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)}\\
&= \int_{\widetilde{\Omega}^{(n-1)}} \left([\widetilde{M}]_{n-1} - \mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_{n-1}|\mathcal{F}\right)\right) \int_A \left([M(X_n)]_1 - \mathbb{E}\left([M(X_n)]_1|\mathcal{F}\right)\right) d\,\mathbb{R}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{n-1}}\widetilde{\mathbb{P}}^{(n-1)}(d\widetilde{\omega}^{n-1})\\
&= 0\,,\ \text{since obviously}\\
&\int_A \left([M(X_n)]_1 - \mathbb{E}\left([M(X_n)]_1|\mathcal{F}\right)\right) d\,\mathbb{R}^{(n)}_{\widetilde{\omega}^{n-1}} = 0
\end{aligned}$$

for all $\widetilde{\omega}^{n-1} \in \widetilde{\Omega}^{(n-1)}$. Hence we have proved that

$$Var\left([\widetilde{M}]_n|\mathcal{F}\right) = Var\left([\widetilde{M}]_{n-1}|\mathcal{F}\right) + Var\left([M(X_n)]_1|\mathcal{F}\right)\,.$$

Now the induction hypothesis for $Var\left([\widetilde{M}]_{n-1}|\mathcal{F}\right)$ and an application of theorem 1.1 to $Var\left([M(X_n)]_1|\mathcal{F}\right)$ similar as in the proof of (ii) above yields the assertion for $Var\left([\widetilde{M}]_n|\mathcal{F}\right)$. So we have proved the theorem under the additional assumption that for every $n \geq 1$ there exists a regular conditional probability of $\mathcal{F}_{n+1}$ given $\mathcal{F}_n$. We shortly indicate that the construction of $\widetilde{\Omega}$ is possible even without this assumption.

Suppose that $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is given and that $\mathcal{F}_0$ is a sub-σ-algebra of $\mathcal{F}$. Then there is always a unique probability measure $\overline{\mathbb{P}}$ on $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}) = \left(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}^{\otimes\mathbb{N}}\right)$ with the following property: For every σ-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, for which a regular conditional probability $Q^{\mathcal{G}}(\omega_0, d\omega)$ of $\mathcal{G}$ given $\mathcal{F}_0$ exists, and for every sequence $(A_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{G}$,

$$\overline{\mathbb{P}}\left(\prod_{n\geq 1} A_n\right) = \int_\Omega \prod_{n\geq 1} Q^{\mathcal{G}}(\omega_0, A_n)\mathbb{P}(d\omega_0)\,.$$

Using this result, it is now possible to construct $\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)}$ from $\widetilde{\mathbb{P}}^{(n-1)}$ without the assumption on the existence of regular conditional probabilities.

In the next paragraph we need the following immediate corollary.

Corollary 1.7 *Let $M = (M_k)_{k\geq 0}$ be a discrete time, square integrable martingale on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with $M_0 = 0$. Then there exists an extension $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}}\right)$ of Ω and a continuous, square integrable martingale $\widetilde{M} = \left(\widetilde{M}_t, \widetilde{\mathcal{F}}_t\right)_{t\geq 0}$ on $\widetilde{\Omega}$ with the following properties:*

(1) $\widetilde{M}_k = M_k$ *for all* $k \geq 0$,

(2) $$\mathbb{E}\left([\widetilde{M}]_n | M_1, \dots, M_n\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}(M_{k+1} - M_k)^2 + \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left((M_{k+1} - M_k)^2 | M_1, \dots, M_k\right)$$
for all $n \geq 1$.

If, in addition, M is an L^4-martingale, then $\widetilde{M}$ is an L^4-martingale, and

(3) $$\begin{aligned} &Var\left([\widetilde{M}]_n | M_1, \dots, M_n\right) \\ &= \frac{2}{45}\sum_{k=0}^{n-1}(M_{k+1} - M_k)^4 + \frac{8}{45}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left((M_{k+1} - M_k)^4 | M_1, \dots, M_k\right) \\ &\quad + \left(\frac{4}{9} - c(p)\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathbb{E}\left((M_{k+1} - M_k)^2 | M_1, \dots, M_k\right)\right)^2 \\ &\quad + c(p)\sum_{k=0}^{n-1}(M_{k+1} - M_k)^2\mathbb{E}\left((M_{k+1} - M_k)^2 | M_1, \dots, M_k\right) \\ &\quad - c(p)\sum_{k=0}^{n-1}(M_{k+1} - M_k)\mathbb{E}\left((M_{k+1} - M_k)^3 | M_1, \dots, M_k\right) \end{aligned}$$
for all $n \geq 1$.

2 Embedding of general right continuous martingales

On the basis of theorem 1.6 we are now going to prove that any right continuous, square integrable martingale can be imbedded into a Brownian motion in such a way that the corresponding family of stopping times has nice properties.

We denote by D the set of all non–negative, dyadic numbers and we write in addition

$$\begin{aligned} D^{(n)} &:= \{s \in D | s = \frac{k}{2^n},\ k \in \mathbb{Z}_+\}, \\ D_t &:= \{s \in D | s \leq t\} \ \text{ for } t \in \mathbb{R}_+, \text{ and} \\ D_t^{(n)} &:= \{s \in D^{(n)} | s \leq t\} \ \text{ for } t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Now let $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ be a right continuous, square integrable martingale on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ with $M_0 = 0$. An immediate application of theorem 1.6 together with the theorem of Dubins and Schwartz (cf. [3]) gives the following situation which we summarize in a proposition.

Proposition 2.1 *For every $n \in \mathbb{N}$ there exist a probability space $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$, which is an extension of $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a continuous, square integrable martingale $M^n = (M^n_t, \mathcal{F}^n_t)_{t\geq 0}$ on Ω^n, a Brownian motion $B^n = (B^n_t, \mathcal{G}^n_t)$ on Ω^n such that $B^n_{\tau^n_t} = M^n_t$ P^n – a.s. for $\tau^n_t := [M^n]_t$, and such that in addition the following properties hold:*

$$M^n_t = M_t \qquad \text{for all } t \in D^{(n)}\ , \ \text{and} \tag{2.1.1}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\tau^n_t | \sigma(M^n_s; s \in D^{(n)}_t)) \qquad\qquad (2.1.2)\\ &= \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k-1}\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^2 + \frac{2}{3}\sum_{j=0}^{k-1}\mathbb{E}\left(\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^2 | M_{\frac{1}{2^n}}, \dots, M_{\frac{j}{2^n}}\right)\\ &\text{for } t = \frac{k}{2^n},\ k \geq 1\,. \end{aligned}$$

If M in addition is an L^4 - martingale, then we have also the property

$$\begin{aligned} &Var\,(\tau^n_t | \sigma(M^n_s;\, s \in D^{(n)}_t)) \qquad\qquad (2.1.3)\\ &= \frac{2}{45}\sum_{j=0}^{k-1}\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^4 + \frac{8}{45}\sum_{j=0}^{k-1}\mathbb{E}\left(\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^4 | M_{\frac{1}{2^n}}, \dots, M_{\frac{j}{2^n}}\right)\\ &\quad + \left(\frac{4}{9} - c(p)\right)\sum_{j=0}^{k-1}\left(\mathbb{E}\left(\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^2 | M_{\frac{1}{2^n}}, \dots, M_{\frac{j}{2^n}}\right)\right)^2\\ &\quad + c(p)\sum_{j=0}^{k-1}\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^2\mathbb{E}\left(\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^2 | M_{\frac{1}{2^n}}, \dots, M_{\frac{j}{2^n}}\right)\\ &\quad - c(p)\sum_{j=0}^{k-1}\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)\mathbb{E}\left(\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^3 | M_{\frac{1}{2^n}}, \dots, M_{\frac{j}{2^n}}\right)\\ &\text{for } t = \frac{k}{2^n},\ k \in \mathbb{Z}_+\,. \end{aligned}$$

The problem is now to get from all the embeddings collected in the proposition a limit embedding such that at the same time the equations (2.1.2) and (2.1.3) converge in a reasonable sense. The possibility of such a limit embedding is based on an embedding theorem of Monroe (cf. [6]), theorem 1.1 and [7], theorem 2 with a new and correct proof of the former theorem.) Let us first introduce some convenient notations, which will make it possible to write the limit of (2.1.3) in a reasonable short way.

Let $t \geq 0$ be given and $k_n = \max\{j | \frac{j}{2^n} \leq t\}$. Then we write

$$
\begin{aligned}
[M^4]_t &:= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k_n-1} \left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^4 , \qquad (2.2)\\
[\mathbb{E}(M^4|.)]_t &:= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k_n-1} \mathbb{E}\left(\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^4 |M_{\frac{1}{2^n}}, \ldots , M_{\frac{j}{2^n}}\right) ,\\
[(\mathbb{E}(M^2|.))^2]_t &:= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k_n-1} \left(\mathbb{E}\left(\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^2 |M_{\frac{1}{2^n}}, \ldots , M_{\frac{j}{2^n}}\right)\right)^2 ,\\
[M^2\mathbb{E}(M^2|.)]_t &:= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k_n-1} \left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^2 \mathbb{E}\left(\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^2 |M_{\frac{1}{2^n}}, \ldots , M_{\frac{j}{2^n}}\right) ,\\
[M\mathbb{E}(M^3|.)]_t &:= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k_n-1} \left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right) \mathbb{E}\left(\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^3 |M_{\frac{1}{2^n}}, \ldots , M_{\frac{j}{2^n}}\right) ,
\end{aligned}
$$

provided that the limits on the right hand sides exist. Of course, these notations are a little bit inconsistent with the usual notation $[M]$ for the quadratic variation, which we keep up instead of the more consistent notation $[M^2]$, and we will also write as usual $\langle M \rangle$ for the predictable quadratic variation instead of $[\mathbb{E}(M^2|.)]$. Let us note that for a square integrable, continuous martingale all five limits above are zero, and it follows for a general square integrable cadlag – martingale from the decomposition into a continuous and a purely discontinuous part that the five limits above indeed exist for a topology, which is used in the proof of theorem 2.3 below.

Now we can state the main result of this paper.

Theorem 2.3 *Let $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ($M_0 = 0$) be a right continuous, square integrable martingale on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Then there exist*

- *a probability space (S, Σ, Q),*
- *a Brownian motion $(B_t, \mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ on S, and*
- *a right continuous, increasing family (τ_t) of $(\mathcal{G}_t)$ – stopping times,*

such that the following assertions hold:

2.3.1 *The process $Y = (Y_t, \mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$, defined on S by $Y_t = B_{\tau_t}$ and $\mathcal{H}_t = \mathcal{G}_{\tau_t}$ for all $t \geq 0$, is a right continuous (even cadlag) L^2 – martingale with the same finite – dimensional distributions as M.*

2.3.2 *For every $t \geq 0$ the following equation holds:*

$$\mathbb{E}\left(\tau_t|\sigma(Y_s; s \leq t)\right) = \frac{1}{3}[Y]_t + \frac{2}{3}\langle Y\rangle_t \,.$$

2.3.3 *If M is an L^4 – martingale, then also*

$$\begin{aligned} &Var\left(\tau_t|\sigma(Y_s; s \leq t)\right) \\ &= \frac{2}{45}[Y^4]_t + \frac{8}{45}[\mathbb{E}(Y^4|.)]_t + \left(\frac{4}{9} - c(p)\right)[(\mathbb{E}(Y^2|.))^2]_t + c(p)[Y^2\mathbb{E}(Y^2|.)]_t \\ &\quad - c(p)[Y\mathbb{E}(Y^3|.)]_t \end{aligned}$$

holds for every $t \geq 0$.

Proof: The proof consists of two parts. First we prove 2.3.1. This is essentially the proof of Monroe in [7] (theorem 2). For this reason we refer for some steps of the proof to [7]. In the second part then we prove 2.3.2 and 2.3.3.

(1) Let $C(\mathbb{R}_+)$ denote the space of all continuous functions from $\mathbb{R}_+$ into $\mathbb{R}$. It is well known that $C(\mathbb{R}_+)$, provided with the topology of compact convergence, is a polish space. By T we denote the space of all increasing, right continuous functions from $\mathbb{R}_+$ into $\mathbb{R}_+$ with the local L^1 – topology rel. to the Lebesgue measure. This just means that a sequence (φ_n) in T converges to $\varphi \in T$ if and only if $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^C |\varphi_n(s) - \varphi(s)|\, ds = 0$ for all $C > 0$. Again, T is a polish space under this topology. The essential property of T is then that for any sequence $(C_n)_{n\geq 1}$ of positive numbers the set $\{\varphi \in T | \forall n : \varphi(n) \leq c_n\}$ is relatively compact. Now we put $S := C(\mathbb{R}_+) \times T$. S is a polish space under the product topology and we denote by Σ the Borel field of S.

With the notations of proposition 2.1 we define for every $n \geq 1$ a function $F_n : \Omega^n \to S$ by

$$F_n(\omega) := (B^n_{\cdot}(\omega), \overline{\tau}^n_{\cdot}\,(\omega)) \quad \text{for every } \omega \in \Omega^n \,,$$

where $\overline{\tau}^n$ is defined by

$$\overline{\tau}^n_t(\omega) := \sum_{k\geq 0} \tau^n_{\frac{k}{2^n}}(\omega) 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}(t)$$

for $t \geq 0$ and $\omega \in \Omega^n$. It is easy to prove that every F_n is measurable.

Now we consider the sequence (Q_n) of probability measures on S given by $Q_n = F_n(P^n)$, and we show that (Q_n) is uniformly tight. For this it is sufficient to show that the two sequences $(\pi_1(Q_n))$ and $(\pi_2(Q_n))$ of the projections onto $C(\mathbb{R}_+)$ and T resp. are both uniformly tight. Now $(\pi_1(Q_n))$ is trivially uniformly tight as a constant sequence. For every n the measure $\pi_1(Q_n)$ is the Wiener measure on $C(\mathbb{R}_+)$. The uniform tightness of $(\pi_2(Q_n))$ is also easy to prove:

For every $\varepsilon > 0$ and every $k \in \mathbb{N}$ there exists a positive number d_k such that $\mathbb{E}M_k^2 < \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot d_k$. We put $C_k := \{\varphi \in T | \varphi(k) \le d_k\}$. Then $C_\varepsilon = \bigcap_{k\ge 1} C_k$ is a relatively compact subset of T. We get

$$\begin{aligned}\pi_2(Q_n)(C_k^c) &= P^n\left[\overline{\tau}_k^n > d_k\right] = P^n\left[\tau_k^n > d_k\right] \\ &\le \frac{1}{d_k}\int \tau_k^n dP^n = \frac{1}{d_k}\int \left(B_{\tau_k^n}^n\right)^2 dP^n = \frac{1}{d_k}\mathbb{E}M_k^2 < \frac{\varepsilon}{2^k}\,,\end{aligned}$$

and it follows that $\pi_2(Q_n)(C_\varepsilon^c) < \varepsilon$, hence $(\pi_2(Q_n))$ is uniformly tight.

Since (Q_n) is a uniformly tight sequence, it has an accumulation point Q, and w.l.o.g. we assume that the whole sequence (Q_n) converges weakly to Q.

On the probability space (S, Σ, Q) we now define

$$B_t(\omega) = f(t) \quad \text{and} \quad \tau_t(\omega) = \varphi(t)$$

for $\omega = (f, \varphi) \in S$.

With its natural filtration, (B_t) is clearly a Brownian motion on S, but for this filtration the family (τ_t) is in general not a family of stopping times. We put

$$\mathcal{G}_t := \sigma\left(\sigma(B_s; s \le t) \cup \{[\tau_r \le u] | r \in \mathbb{R}_+\,,\ u \le t\}\right)\,.$$

Then it is proved in [7] (not very clear but correct, whereas the first proof of this fact was false: the boundary of a set of the form $[\tau_s < u]$ is different from that stated in [6]) that $(B_t, \mathcal{G}_t)_{t\ge 0}$ is still a Brownian motion such that now every τ_t is a $(\mathcal{G}_t)-$stopping time.

For the proof that M and Y have the same finite−dimensional distributions we repeat the essential arguments of Monroe in [7], since our situation is a little bit different. Since M and Y are right continuous, it is sufficient to prove

$$(Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_m})(Q) = (M_{s_1}, \ldots, M_{s_m})(P) \tag{2.3.4}$$

for $s_1 < \cdots < s_m$ with $s_i \in D$ for $i = 1, \ldots, m$. There exists an n_0 such that $s_i \in D^{(n_0)}$ for $i = 1, \ldots, m$ and it follows that for all Borel sets $B_i \subset \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ we have the equality

$$P[M_{s_1} \in B_1, \ldots, M_{s_m} \in B_m] = Q_n\left\{(f, \varphi) \in S | f(\varphi(s_i)) \in B_i \text{ for } i = 1, \ldots, m\right\},$$

if $n \ge n_0$. For every $i = 1, \ldots, m$ we take a compact subset K_i of $\mathbb{R}$ and a larger compact set $L_i \subset \mathbb{R}$ such that $K_i \subset \overset{\circ}{L}_i$ and define the following subsets of S:

$$\begin{aligned}&\Gamma_\circ = \{(f, \varphi) \in S | f(\varphi(s_i)) \in K_i \ \text{ for } i = 1, \ldots, m\}, \\ &\Gamma_1 = \{(f, \varphi) \in S | f(\varphi(s_i)) \in L_i \ \text{ for } i = 1, \ldots, m\}, \\ &\text{and for every } \delta \text{ with } 0 < \delta < 1, \\ &\Gamma_\delta = \{(f, \varphi) \in S | f(\varphi(s)) \in L_i \ \text{ for } s_i \le s < s_i + \delta, i = 1, \ldots, m\}.\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Then every Γ_δ is a closed subset of S, and the right continuity of the elements of S implies

$$\Gamma_\circ \subset \bigcup_\delta \Gamma_\delta \subset \Gamma_1, \quad \text{and} \qquad (2.3.6)$$
$$\Gamma_{\delta'} \subset \Gamma_\delta \text{ for } \delta < \delta'.$$

We obtain from (2.3.6)

$$\begin{aligned} Q(\Gamma_1) &\geq Q(\Gamma_\delta) \geq \overline{\lim} \, Q_n(\Gamma_\delta) \\ &= \overline{\lim_n} \, P^n \left[M^n_{\frac{k}{2^n}} \in L_i \text{ for } s_i \leq \frac{k}{2^n} < s_i + \delta, \quad i = 1, \dots, m \right] \\ &= \overline{\lim_n} \, P \left[M_{\frac{k}{2^n}} \in L_i \text{ for } s_i \leq \frac{k}{2^n} < s_i + \delta, \quad i = 1, \dots, m \right] \\ &= P[M_s \in L_i \text{ for } s_i \leq s < s_i + \delta, \quad i = 1, \dots, m]. \end{aligned}$$

For $\delta \downarrow 0$ we get

$$Q(\Gamma_1) \geq P\left[M_{s_i} \in K_i \text{ for } \; i = 1, \dots m\right],$$

and this implies (for $L_i \downarrow K_i, \; i = 1, \dots, m$)

$$Q(\Gamma_0) \geq P\left[M_{s_i} \in K_i \text{ for } \; i = 1, \dots m\right].$$

Now is not difficult to extend this inequality to arbitrary Borel sets $B_i \subset \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$, and since Q and P as probability measures have the same total mass, it follows that (2.3.4) holds.

(2) Now we start with the proof of 2.3.2. We have to prove that for every $A \in \sigma(Y_s; s \leq t)$ the equation

$$\int_A \tau_t dQ = \int_A \left(\frac{1}{3}[Y]_t + \frac{2}{3}\langle Y \rangle_t \right) dQ \qquad (2.3.7)$$

holds. We know that for every $n \geq 1$ the equation (2.1.2) holds and that $\lim_{n \to \infty} Q_n = Q$ weakly. The main problem however is that the function $\tau(\omega) \to \tau_t(\omega)$ from T into $\mathbb{R}_+$ (and hence also the function $(B(\omega), \tau(\omega) \longmapsto B_{\tau_t}(\omega) = Y_t(\omega)$ from S into $\mathbb{R}$) is not a continuous function. For this reason we define for every $h > 0$ the function

$$\psi_{t,h} : T \to \mathbb{R}_+$$

by $\psi_{t,h}(\varphi) = \frac{1}{h} \int\limits_h^{2h} \varphi(t+s) ds$. Then $\psi_{t,h}$ is a continuous, non–negative function from T into $\mathbb{R}$ and $\lim_{h \to \infty} \psi_{t,h}(\varphi) = \varphi(t)$ by the right-continuity of φ.

Now we define the following four measures on the σ–algebra $\sigma(Y_s; s \leq t)$. For every $A \in \sigma(Y_s; s \leq t)$ we put

$$\mu_t(A) = \int_A \tau_t dQ, \ \nu_t(A) = \int_A \left(\frac{1}{3}[Y]_t + \frac{2}{3}\langle Y\rangle_t\right) dQ, \text{ and} \tag{2.3.8}$$

$$\mu_{t,h}(A) = \int_A \psi_{t,h}(\tau) dQ, \ \nu_{t,h}(A) = h^{-1}\int_h^{2h}\int_A \left(\frac{1}{3}[Y]_{t+s} + \frac{2}{3}\langle Y\rangle_{t+s}\right) dQds.$$

Then by right – continuity,

$$\lim_{h\to\infty} \mu_{t,h}(A) = \mu_t(A) \text{ and } \lim_{n\to\infty} \nu_{t,h}(A) = \nu_t(A)$$

for every $A \in \sigma(Y_s; s \leq t)$. Hence for the proof of (2.3.7) it is sufficient to prove

$$\mu_{t,h} = \nu_{t,h} \quad \text{for every } h > 0. \tag{2.3.9}$$

We observe that $\mu_{t,h}$ and $\nu_{t,h}$ have the same total mass. This follows from

$$\int \tau_s dQ = \int B^2_{\tau_s} dQ = \int Y_s^2 dQ \qquad (s \geq 0).$$

For the proof of (2.3.9) we will show that for every finite sequence $(s_i)_{1\leq i\leq m}$ in D with $s_1 < \ldots < s_m \leq t$ and every finite sequence $(B_i)_{1\leq i\leq m}$ of Borel subsets of $\mathbb{R}$ the following inequality holds:

$$\int_{\left[Y_{s_1}\in B_1,\ldots,Y_{s_m}\in B_m\right]^c} \psi_{t,h}(\tau) dQ \leq h^{-1}\int_h^{2h}\int_{\left[Y_{s_1}\in B_1,\ldots,Y_{s_m}\in B_m\right]^c} \left(\frac{1}{3}[Y]_{t+s} + \frac{2}{3}\langle Y\rangle_{t+s}\right) dQds\,. \tag{2.3.10}$$

The equality of the total mass of $\mu_{t,h}$ and $\nu_{t,h}$ then implies that (2.3.9) holds.
For the proof of (2.3.10) we will make use of following property of weak convergence.

Lemma 2.3.11 *Suppose that X is a polish space and that (μ_n) is a sequence of probability measures converging weakly towards μ. Then for every open subset G of X and every non – negative, continuous function $f : X \to \mathbb{R}$ with $\int f\, d\mu < \infty$ the inequality*

$$\int_G f\, d\mu \leq \underline{\lim} \int_G f\, d\mu_n \quad \textit{holds}\,.$$

Proof: Let $g : X \to \mathbb{R}_+$ be a bounded, continuous function and let $\nu_n = g\mu_n$ and $\nu = g\mu$ be the measures with density g relative to μ_n and μ resp. Then it is immediate that $\nu_n \to \nu$ weakly for $n \to \infty$. It follows that

$$\nu(G) = \int_G g\, d\mu \leq \underline{\lim}\nu_n(G) = \underline{\lim} \int_G g\, d\mu_n\,.$$

Hence we have for $g = f \wedge m$,

$$\int_G (f \wedge m)\, d\mu \leq \underline{\lim} \int_G (f \wedge m)\, d\mu_n \leq \underline{\lim} \int_G f\, d\mu_n\,,$$

and the assertion of the lemma follows.

Now we start with the proof of (2.3.10). The essential argument in the proof of (2.3.10) and also in the proof of (2.3.12) below will be the following observation. Since M and Y are two right continuous martingales with the same finite dimensional distributions, it follows that the random variables

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}\left(\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^2 |M_{\frac{1}{2^n}}, \ldots, M_{\frac{j}{2^n}}\right)\,,\\
&\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}\left(\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}}\right)^4 |M_{\frac{1}{2^n}}, \ldots, M_{\frac{j}{2^n}}\right)\,, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

on Ω have the same distributions as the random variables

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}\left(\left(Y_{\frac{j+1}{2^n}} - Y_{\frac{j}{2^n}}\right)^2 |Y_{\frac{1}{2^n}}, \ldots, Y_{\frac{j}{2^n}}\right)\,,\\
&\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}\left(\left(Y_{\frac{j+1}{2^n}} - Y_{\frac{j}{2^n}}\right)^4 |Y_{\frac{1}{2^n}}, \ldots, Y_{\frac{j}{2^n}}\right)\,, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

on (S, Σ, Q). Hence also the random variables $\langle M \rangle_t$, $[\mathbb{E}(M^4|.)]_t$ etc. have the same distributions as the random variables $\langle Y \rangle_t$, $[\mathbb{E}(Y^4|.)]_t$ etc..

Let Γ_0, Γ_1 , Γ_δ $(0 < \delta < 1)$ be the sets defined in (2.3.5), and suppose in addition that $t \in D$. Since $\psi_{t,h}$ is non$-$negative and continuous, and since Γ_δ^c is open, we obtain from lemma 2.3.11 for $\delta < h$,

$$\int_{\Gamma_\delta^c} \psi_{t,h}(\tau)\, dQ \le \underline{\lim} \int_{\Gamma_\delta^c} \psi_{t,h}(\tau)\, dQ_n$$
$$= \underline{\lim} \frac{1}{h} \int_h^{2h} \int_S \left(1_{[B_{\tau_s} \in L_i (s_i \le s < s_i+\delta,\ i=1,\dots,m)]^c} \tau_{t+r}\right)\, dQ_n\, dr$$
$$= \underline{\lim} \frac{1}{h} \int_h^{2h} \int_{\Omega^n} (1_{[M_s^n \in L_i (s_i \le s < s_i+\delta, s\in D^n, i=1,\dots,m)]^c} \overline{\tau}^n_{t+r}\, dP^n\, dr$$
$$= \underline{\lim} \frac{1}{h} \int_h^{2h} \int_{\Omega^n} \Bigg(1_{[M_s^n \in L_i (s_i \le s < s_i+\delta, s\in D^n, i=1,\dots,m)]^c}$$
$$\times \left(\frac{1}{3} \sum_{j=0}^{k(r)-1} \left(M^n_{\frac{j+1}{2^n}} - M^n_{\frac{j}{2^n}} \right) + \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{k(r)-1} \mathbb{E}\left(\left(M^n_{\frac{j+1}{2^n}} - M^n_{\frac{j}{2^n}} \right)^2 | M^n_{\frac{1}{2^n}}, \dots, M^n_{\frac{j}{2^n}} \right) \right) dP^n\, dr$$
$$\left(\text{by } (2.3.2), \text{ where } \frac{k(r)}{2^n} \le t + r < \frac{k(r)+1}{2^n} \right)$$
$$= \frac{1}{h} \int_h^{2h} \int_\Omega 1_{[M_s \in L_i (s_i \le s < s_i+\delta, s\in D, i=1,\dots,m)]^c} \left(\frac{1}{3}[M]_{t+r} + \frac{2}{3}\langle M \rangle_{t+r} \right) dP\, dr$$
$$= \frac{1}{h} \int_h^{2h} \int_S 1_{\Gamma_\delta^c} \left(\frac{1}{3}[Y]_{t+r} + \frac{2}{3}\langle Y \rangle_{t+r} \right) dQ\, dr\,.$$

Hence we proved

$$\begin{aligned} &\mu_{t,h}(\Gamma_\delta^c) \le \nu_{t,h}(\Gamma_\delta^c), \qquad \text{which implies} \\ &\mu_{t,h}(\Gamma_1^c) \le \nu_{t,h}(\Gamma_0^c), \\ \text{and for } &L_i \downarrow K_i (i = 1, \dots, m) \\ &\mu_{t,h}(\Gamma_0^c) \le \nu_{t,h}(\Gamma_0^c). \end{aligned}$$

By the same argument as in the proof (2.3.4) this finally implies (2.3.10) and hence (2.3.9).

For the proof of 2.3.3 we use that we already know 2.3.2. Hence we have to prove

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\tau_t^2 | \sigma(Y_s; s \le t)\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}[Y]_t + \frac{2}{3}\langle Y \rangle_t \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{2}{45}[Y^4]_t + \dots + (-c(p))[Y\mathbb{E}(Y^3|.)]_t \right)\ Q - a.s. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

for every $t \ge 0$.

For the proof of (2.3.12) we proceed similarly as in the proof of (2.3.2). Let $G(Y, t)$ denote the right hand side of (2.3.12), and let $\varphi_{t,h} : T \to \mathbb{R}_+$ be the continuous function defined by

$$\varphi_{t,h}(\tau) = \frac{1}{h} \int_h^{2h} \tau^2_{t+s} ds. \tag{2.3.13}$$

Let $\mu_t, \nu_t, \mu_{t,h}, \nu_{t,h}$ now denote the four measures on $\sigma(Y_s; s \leq t)$ defined by

$$\begin{aligned}
\mu_t(A) &= \int_A \tau_t^2 dQ, \\
\nu_t(A) &= \int_A G(Y,t) dQ, \\
\mu_{t,h}(A) &= \int_A \varphi_{t,h}(\tau) dQ, \text{ and} \\
\nu_{t,h}(A) &= \frac{1}{h} \int_h^{2h} \int_A G(Y, t+s) dQ ds
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

for $A \in \sigma(Y_s; s \leq t)$.
Again, by right continuity, $\mu_{t,h}(A) \to \mu_t(A)$ and $\nu_{t,h}(A) \to \nu_t(A)$ for $h \to 0$, and it is sufficient for the proof of (2.3.12) to prove

$$\mu_{t,h} = \nu_{t,h} \tag{2.3.15}$$

for every $h > 0$.
The main problem now is to prove that $\mu_{t,h}$ and $\nu_{t,h}$ have the same total mass. For the proof of this fact it is sufficient to prove

$$\int \tau_s^2 dQ = \int G(Y,s) dQ \tag{2.3.16}$$

for every $s \geq 0$. It is easy to see that

$$\lim_{n \to \infty} \int G(Y,s) dQ_n = \int G(Y,s) dQ$$

and from (2.1.3) we have

$$\int \tau_s^2 dQ_n = \int G(Y,s) dQ_n$$

for every $n \geq 1$. Hence it is sufficient to prove

$$\lim_{n \to \infty} \int \tau_s^2 dQ_n = \int \tau_s^2 dQ. \tag{2.3.17}$$

Proof of (2.3.17): We use the relation

$$\int \tau_s^2 dQ = 2 \int B_{\tau_s}^2 \tau_s dQ - \frac{1}{3} \int B_{\tau_s}^4 dQ \tag{2.3.18}$$

(cf: e. g. [3], p. 128) and suppose w. l. o. g. that $s \in D$.
Define

$$R_n = \int M_s^2 \left(\frac{1}{3} \left([M]_s - \sum_{j=0}^{k(s)-1} \left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}} \right)^2 \right) + \frac{2}{3} \left(\langle M \rangle_s - \sum_{j=0}^{k(s)-1} \mathbb{E} \left(\left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}} \right)^2 | M_{\frac{1}{2^n}}, \ldots, M_{\frac{j}{2^n}} \right) \right) \right) dP$$

(with $s = \frac{k(s)}{2^n}$ for sufficiently large n).

Then we obtain from (2.3.18) together with (2.1.2)

$$\begin{aligned}
\int \tau_s^2 dQ &= 2 \int Y_s^2 \left(\frac{1}{3} [Y]_s + \frac{2}{3} \langle Y \rangle_s \right) dQ - \frac{1}{3} \int Y_s^4 dQ \\
&= 2 \int M_s^2 \left(\frac{1}{3} [M]_s + \frac{2}{3} \langle M \rangle_s \right) dP - \frac{1}{3} \int M_s^4 dP \\
&= 2 \int M_s^2 \left(\frac{1}{3} \sum_{j=0}^{k(s)-1} \left(M_{\frac{j+1}{2^n}} - M_{\frac{j}{2^n}} \right)^2 + \frac{2}{3} \langle M \rangle_s \right) dP - \frac{1}{3} \int M_s^4 dP + 2R_n \\
&= \int \tau_s^2 dQ_n + 2R_n;
\end{aligned}$$

and (2.3.17) follows from $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$.
Now the proof of (2.3.15) is done essentially in the same way as the proof of (2.3.9), using lemma 2.3.11 and the sets $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_\delta$ defined in (2.3.5). This finishes the proof of theorem 2.3.

3 Evaluation of the constants

Suppose that $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ is a continuous, <u>bounded</u> martingale, which is embedded into a Brownian motion $B = (B_t, \mathcal{G}_t)$ by the theorem of Dubins and Schwartz, i.e. $M_t = B_{\tau_t}$ a.s. for the family (τ_t) of stopping times given by $\tau_t = [M]_t$. It is well known that for every θ the process Z^θ defined by

$$Z_t^\theta = \exp \left(\theta B_t - \frac{1}{2} \theta^2 t \right)$$

is a martingale. Since M is assumed to be bounded, it follows that also

$$Y_t^\theta = Z_{\tau_t}^\theta = \exp \left(\theta B_{\tau_t} - \frac{1}{2} \theta^2 \tau_t \right) = \exp \left(\theta M_t - \frac{1}{2} \theta^2 \tau_t \right)$$

is a martingale for every θ.

Now let $t \geq 0$ be fixed and let $\mathcal{H}$ be a $\sigma-$algebra for which M_t (but not necessarily τ_t) is measurable. It follows that $\mathbb{E}[Y_t^\theta|\mathcal{H}]$ has the obvious series expansion

$$\mathbb{E}[Y_t^\theta|\mathcal{H}] = e^{\theta M_t} \cdot \sum_{k\geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\theta^{2k}}{k!} \mathbb{E}[\tau_t^k|\mathcal{H}] \,.$$

It follows (cf. [9]) that for small θ the function

$$L(\theta) := \ln \mathbb{E}[Y_t^\theta|\mathcal{H}] \qquad (t \text{ fixed}) \tag{3.1.1}$$

has a series expansion given by

$$L(\theta) = \theta M_t + \sum_{k\geq 1} \theta^{2k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{k!} \mathrm{cum}_{\,k}(\tau_t|\mathcal{H}) \,, \tag{3.1.2}$$

where $\mathrm{cum}_{\,k}(\tau_t|\mathcal{H})$ denotes the kth conditional cumulant of τ_t. For $k = 1$ or 2 resp. we have $\mathrm{cum}_{\,1}(\tau_t|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\tau_t|\mathcal{H})$ and $\mathrm{cum}_{\,2}(\tau_t|\mathcal{H}) = \mathit{Var}(\tau_t|\mathcal{H})$. Moreover, since $(Y_t^\theta)_{t\geq 0}$ is a martingale, we have that

$$\mathbb{E} \exp(L(\theta)) = 1 \tag{3.1.3}$$

i.e. $L(\theta)$ is a likelihood function. This implies that $L(\theta)$ satisfies the so$-$called Bartlett identities, which are a trivial consequence of the Taylor expansion of $\mathbb{E}\exp(L(\theta))$ at 0. For our purposes we only need the first five Bartlett identities.

3.2 Bartlett identities Let L^I, L^{II}, L^{III}, L^{IV}, L^V denote the first five derivatives of L at $\theta = 0$. Then the following equations hold:

$$\mathbb{E}L^I = 0 \,, \tag{3.2.1}$$

$$\mathbb{E}(L^{II} + (L^I)^2) = 0 \,, \tag{3.2.2}$$

$$\mathbb{E}(L^{III} + 3L^{II} \cdot L^I + (L^I)^3) = 0 \,, \tag{3.2.3}$$

$$\mathbb{E}(L^{IV} + 4L^{III} \cdot L^I + 3(L^{II})^2 + 6L^{II}(L^I)^2 + (L^I)^4) = 0 \,, \text{ and} \tag{3.2.4}$$

$$\mathbb{E}(L^V + 5L^{IV} \cdot L^I + 10L^{III} \cdot L^{II} + 10L^{III}(L^I)^2 + 15(L^{II})^2 L^I + 10L^{II}(L^I)^3 + (L^I)^5) = 0 \,. \tag{3.2.5}$$

Now we can compute the constants of Corollary 1.4 as already stated in remark 1.5.

Proposition 3.3 *The constants $\alpha_1(p), \ldots, \beta_5(p)$ of corollary 1.4 are given as follows*

$$\alpha_1(p) = \frac{1}{3}\,, \qquad \alpha_2(p) = \frac{2}{3}\,,$$
$$\beta_1(p) = \frac{2}{45}\,, \quad \beta_2(p) = \frac{8}{45}\,,$$
$$\beta_3(p) = \frac{4}{9} - c(p)\,, \quad \beta_4(p) = c(p)\,, \quad \beta_5(p) = -c(p)\,,$$

where only $c(p)$ depends on p.

Proof: With the notations of §1 we know from proposition 1.3 that the constants in (1.3.1) and (1.3.2) only depend on the special embedding of theorem 1.1 and not on the embedded X. Hence we may assume that X is bounded, which implies that the martingale $(M_t(X))_{0\le t\le 1}$ is bounded. For $L(\theta) = \ln \mathbb{E}(Z^\theta_{\tau_1}|X)$ with $\tau_1 = [M(X)]_1$ we have therefore the series expansion

$$L(\theta) = \theta M_1(X) + \sum_{k\geq 1} \theta^{2k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{k!} \mathrm{cum}_k(\tau_1|X)$$

from (3.1.2), and we know that the Bartlett identities 3.2 must hold. Since

$$L^I = M_1(X) = X\,, \quad L^{II} = -\mathbb{E}(\tau_1|X)\,, \quad L^{III} = 0\,,$$
$$L^{IV} = 3\,Var(\tau_1|X)\,, \quad L^V = 0\,,$$

the first five Bartlett identities are now

(1) $\mathbb{E}X = 0\,,$

(2) $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\tau_1|X))\,,$

(3) $\mathbb{E}X^3 = 3\mathbb{E}(\mathbb{E}(\tau_1|X)\cdot X)\,,$

(4) $3\mathbb{E}(Var(\tau_1|X)) + 3\mathbb{E}(\mathbb{E}(\tau_1|X))^2 - 6\mathbb{E}(\mathbb{E}(\tau_1|X)\cdot X^2) + \mathbb{E}X^4 = 0$, and

(5) $15\mathbb{E}(Var(\tau_1|X)\cdot X) + 15\mathbb{E}((\mathbb{E}(\tau_1|X))^2\cdot X) - 10\mathbb{E}(\mathbb{E}(\tau_1|X)\cdot X^3) + \mathbb{E}X^5 = 0\,.$

Substituting $\mathbb{E}(\tau_1|X) = \alpha_1(p)X^2 + \alpha_2(p)\mathbb{E}X^2$ into (3) yields $\mathbb{E}X^3 = 3\alpha_1(p)\mathbb{E}X^3$, which implies $\alpha_1(p) = \frac{1}{3}$, since X is arbitrary (beside the assumption of boundedness). From (2) we get $\alpha_2(p) = \frac{2}{3}$.
Substitution of

$$Var(\tau_1|X) = \beta_1(p)X^4 + \beta_2(p)\mathbb{E}X^4 + \beta_3(p)(\mathbb{E}X^2)^2 + \beta_4(p)X^2\mathbb{E}X^2 + \beta_5(p)X\mathbb{E}X^3 \qquad (*)$$

into (4) yields

$$\left(3\left(\beta_1(p)+\beta_2(p)\right) - \frac{2}{3}\right)\mathbb{E}X^4 + \left(3\left(\beta_3(p)+\beta_4(p)\right) - \frac{4}{3}\right)(\mathbb{E}X^2)^2 = 0,$$

which gives

$$\beta_1(p) + \beta_2(p) = \frac{2}{9} \text{ and } \beta_3(p) + \beta_4(p) = \frac{4}{9}. \qquad (6)$$

Substitution of $(*)$ into (5) yields

$$\left(15\beta_1(p) - \frac{2}{3}\right)\mathbb{E}X^5 + 15\left(\beta_4(p)+\beta_5(p)\right)\mathbb{E}X^3\cdot\mathbb{E}X^2 = 0,$$

which gives

$$\beta_1(p) = \frac{2}{45} \text{ and } \beta_5(p) = -\beta_4(p). \tag{7}$$

With $c(p) := \beta_4(p)$ we obtain from (6) and (7) that

$$\beta_2(p) = \frac{8}{45}, \quad \beta_3(p) = \frac{4}{9} - c(p), \quad \beta_4(p) = c(p), \quad \beta_5(p) = -c(p).$$

So it remains to compute the constant $c(p)$. For this we need some moments of the random variables involved in the Skorohod imbedding (see (1.1.1) and(1.3.2)).
In [10] Skorohod derived the Laplace transform of the exit time τ from an interval $[a, b]$ containing 0 of a Brownian motion B starting at 0. He obtained

$$\mathbb{E}e^{-t\tau} = \frac{\sinh b\sqrt{2t} - \sinh a\sqrt{2t}}{\sinh(b-a)\sqrt{2t}}.$$

This gives

$$\mathbb{E}\tau^2 = \frac{d^2}{dt^2}\left(\mathbb{E}e^{-t\tau}\right)|_{t=0} = -\frac{1}{3}ab(a^2 - 3ab + b^2).$$

The well-know equation (cf. e.g. [3], p. 128)

$$6\mathbb{E}(B_\tau^2 \cdot \tau) = \mathbb{E}B_\tau^4 + 3\mathbb{E}\tau^2$$

then also gives a formula for $\mathbb{E}(B_\tau^2 \cdot \tau)$. From this we derive immediately for the exit times $\sigma_k (k \geq 0)$ of $[-p, 1-p]$ the corresponding moments, which are listed in the proposition below.

Proposition 3.4 *With the notations of §1 we have the following moment relations*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sigma_k &= \mathbb{E}\left(B^k_{\sigma_k}\right)^2 = \mathbb{E}\xi_k^2 = q := p(1-p)\,, && (3.4.1)\\
\mathbb{E}\sigma_k^2 &= \frac{1}{3}(q+q^2)\,,\\
\mathbb{E}\sigma_k\xi_k^2 &= \mathbb{E}\sigma_k\left(B^k_{\sigma_k}\right)^2 = \frac{1}{3}(q-q^2)\,,\\
\mathbb{E}\zeta_k &= (1-2q), \mathbb{E}\zeta_k^2 = (1-3q)\,, && (3.4.2)\\
\mathbb{E}X^2_{2^{-n}} &= \mathbb{E}Y^2_{2^{-n}} = (1-2q)^n\mathbb{E}X^2\,,\\
\mathbb{E}X^3_{2^{-n}} &= (1-3q)^n\mathbb{E}X^3\,, \ \textit{and}\\
\zeta_k\xi_k &\equiv q\,.
\end{aligned}$$

Now we can compute the constant $c(p)$.

Proposition 3.5 *For every p with $0 < p < 1$ we have*

$$c(p) = \frac{16}{45}\frac{5-3q}{5-6q}\,.$$

Proof: We have already remarked that the constants of proposition 3.3 only depend on the Skorohod embedding, i.e. on moments of random variables connected with the sequence $(L^k)_{k\geq 0}$ of stopped Brownian motions introduced in the proof of Theorem 1.1, and not on the embedded random variable X. One special feature of the Skorohod embedding of theorem 1.1 is the property that

$$X_{2^{-n}} = M_{2^{-n}}(X)$$

can be viewed itself as the Skorohod embedding $M_1(X_{2^{-n}})$.
Hence we have also for

$$\tau_{2^{-n}} = [M(X)]_{2^{-n}} = \sum_{k\geq n} \left(X_{2^{-k}} - Y_{2^{-k}}\right)^2 \sigma_k$$

the relations

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\tau_{2^{-n}}|X_{2^{-n}}\right) &= \frac{1}{3}X^2_{2^{-n}} + \frac{2}{3}\mathbb{E}X^2_{2^{-n}} \text{ and} \\ Var\left(\tau_{2^{-n}}|X_{2^{-n}}\right) &= \frac{2}{45}X^4_{2^{-n}} + \frac{8}{45}\mathbb{E}X^4_{2^{-n}} + \left(\frac{4}{9} - c(p)\right)(\mathbb{E}X^2_{2^{-n}})^2 \\ &\qquad + c(p)X^2_{2^{-n}}\mathbb{E}X^2_{2^{-n}} + (-c(p))X_{2^{-n}}\mathbb{E}X^3_{2^{-n}}. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

We use (3.5.1) to compute $c(p)$. We have

$$\tau_1 = \tau_{2^{-1}} + A_0 \text{ with } A_0 = (X - Y_0)^2\sigma_0,$$

and we obtain

$$\begin{aligned} Var(\tau_1|X) &= \mathbb{E}((A_0 + \tau_{2^{-1}})^2|X) - \left(\frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}\mathbb{E}X^2\right)^2 \\ &= \mathbb{E}(A_0^2|X) \\ &\quad + 2\mathbb{E}(A_0\tau_{2^{-1}}|X) \\ &\quad + \mathbb{E}\left[Var(\tau_{2^{-1}}|X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, X)|X\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\tau_{2^{-1}}|X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, X)|X\right] \\ &\quad - \left(\frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}\mathbb{E}X^2\right)^2. \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

The coefficicent of $X\mathbb{E}X^3$ in the equation (3.5.1) for $n=0$ is just $(-c(p))$. We now compute the coefficient of $X\mathbb{E}X^3$ on the right hand side of (3.5.2), which gives the equation for $c(p)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(A_0^2|X) &= \mathbb{E}((X-Y_0)^4\sigma_0^2|X) \\ &= \mathbb{E}(-4XY_0^3\sigma_0^2|X) + R_1 \\ &= -4X\mathbb{E}X^3\mathbb{E}\sigma_0^2 + R_1 = \left\{-\frac{4}{3}(q+q^2)\right\} X\mathbb{E}X^3 + R_1\end{aligned} \tag{1}$$

by (3.4.1), where R_1 (and in the following $R_i (i \geq 2)$) contains the remaining terms (with $X^4, \mathbb{E}X^4, (\mathbb{E}X^2)^2,\ X^2\mathbb{E}X^2$ as factors).

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(A_0\tau_{2^{-1}}|X) \\ &= \mathbb{E}\left\{(X-Y_0)^2\sigma_0\sum_{n\geq 1}(Z_nX+V_n-Y_{2^{-n}})^2\sigma_n|X\right\}\end{aligned} \tag{2}$$

(cf. 1.3)

$$\begin{aligned}&= B_1 + B_2 + R_2, \quad \text{with} \\ &B_1 = -2\mathbb{E}\left\{XY_0\sigma_0\sum_{n\geq 1}(V_n - Y_{2^{-n}})^2\sigma_n|X\right\} \text{ and} \\ &B_2 = 2\mathbb{E}\left\{Y_0^2\sigma_0\sum_{n\geq 1}Z_nX(V_n - Y_{2^{-n}})\sigma_n|X\right\}.\end{aligned}$$

We get with the aid 1.3 and 3.4

$$\begin{aligned}B_1 &= -2X\mathbb{E}X^3\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}(\sigma_0 Z_{n,0}^2\sigma_n) \\ &= -2X\mathbb{E}X^3\sum_{n\geq 1}q\mathbb{E}((\sigma_0\xi_0^2)\zeta_1^2\ldots\zeta_{n-1}^2) \\ &= -2X\mathbb{E}X^3\left\{q\left(\frac{1}{3}(q-q^2)\right)\sum_{n\geq 1}(1-3q)^{n-1}\right\} \\ &= \left\{-\frac{2}{9}(q-q^2)\right\}X\mathbb{E}X^3, \\ B_2 &= 2X\mathbb{E}X^3\cdot\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}(\sigma_n\sigma_0 Z_n Z_{n,0}) \\ &= 2X\mathbb{E}X^3 q\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}(\sigma_0(\xi_0\zeta_0)\zeta_1^2\ldots\zeta_{n-1}^2) \\ &= 2X\mathbb{E}X^3\cdot q^3\sum_{n\geq 1}(1-3q)^{n-1} \\ &= \left\{\frac{2}{3}q^2\right\}X\mathbb{E}X^3.\end{aligned}$$

So we have

$$\mathbb{E}(A_0\tau_{2^{-1}}|X) = \left\{\frac{2}{3}q^2 - \frac{2}{9}(q-q^2)\right\} X\mathbb{E}X^3 + R_2\,,$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\mathit{Var}(\tau_{2^{-1}}|X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, X)|X] \qquad (3)\\
&= \mathbb{E}[\mathit{Var}(\tau_{2^{-1}}|X_{2^{-1}})|X] \qquad \text{(because of } X_{2^{-1}} = pX_0^{(1)} + (1-p)X_0^{(2)})\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{2}{45}X_{2^{-1}}^4 + c(p)X_{2^{-1}}^2\mathbb{E}X_{2^{-1}}^2 - c(p)X_{2^{-1}}\mathbb{E}X_{2^{-1}}^2\right)|X\right] + R_{3,1}\\
&\quad \text{(by(3.5.1))}\\
&= \mathbb{E}\left[\frac{2}{45}(\zeta_0X + \xi_0Y_0)^4 + c(p)(\zeta_0X+\xi_0Y_0)^2\mathbb{E}X_{2^{-1}}^2 - c(p)(\zeta_0X+\xi_0Y_0)\mathbb{E}X_{2^{-1}}^3|X\right] + R_{3,1}\\
&= \frac{8}{45}X\mathbb{E}X^3\mathbb{E}(\zeta_0\xi_0^3) - c(p)X\mathbb{E}\zeta_0\mathbb{E}X_{2^{-1}}^3 + R_3 \qquad \text{(because of } \mathbb{E}Y_0 = 0)\\
&= \left\{\frac{8}{45}q^2 - c(p)(1-2q)(1-3q)\right\} X\mathbb{E}X^3 + R_3 \qquad \text{(by 3.4)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(\mathbb{E}(\tau_{2^{-1}}|X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, X))^2|X] \qquad (4)\\
&= \mathbb{E}[(\mathbb{E}(\tau_{2^{-1}}|X_{2^{-1}}))^2|X]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{3}X_{2^{-1}}^2 + \frac{2}{3}\mathbb{E}X_{2^{-1}}^2\right)^2|X\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{9}(\zeta_0X+\xi_0Y_0)^4 + \frac{4}{9}(\zeta_0X+\xi_0Y_0)^2\mathbb{E}X_{2^{-1}}^2|X\right] + R_{4,1}\\
&= (X\mathbb{E}X^3)\left(\frac{4}{9}\mathbb{E}\zeta_0\xi_0^3\right) + R_4\\
&= \left\{\frac{4}{9}q^2\right\} X\mathbb{E}X^3 + R_4.
\end{aligned}$$

From (1) to (4) we now have the following equation for $c(p)$:

$$-c(p) = -\frac{4}{3}(q+q^2) + 2\left\{\frac{2}{3}q^2 - \frac{2}{9}(q-q^2)\right\} + \frac{8}{45}q^2 + \frac{4}{9}q^2 - c(p)(1-5q-6q^2),$$

from which we obtain the asserted equation

$$c(p)(5q-6q^2) = \frac{16}{9}q - \frac{16}{15}q^2.$$

Remark 3.6 One can modify the embedding of a right continuous martingale M into a Brownian motion in theorem 2.3 in the following way. Suppose that the martingale M^n of proposition 2.1 are Skorohod embeddings of $(M_t)_{t\in D^{(n)}}$ for $p_n(0 < p_n < 1)$ such that $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ ($\lim_{n\to\infty} p_n = 1$ would do the same). Then

$$\lim_{n\to\infty} c(p_n) = \frac{16}{45},$$

and assertion 2.3.3 of theorem 2.3 would read

$$
\begin{aligned}
& Var(\tau_t|\sigma(Y_s; s \le t)) \\
&= \frac{2}{45}[Y^4]_t + \frac{8}{45}[\mathbb{E}(Y^4|\cdot)]_t + \frac{4}{45}[(\mathbb{E}(Y^2|\cdot))^2]_t + \frac{16}{45}[Y^2\mathbb{E}(Y^2|\cdot)]_t - \frac{16}{45}[Y\mathbb{E}(Y^3|\cdot)]_t.
\end{aligned}
$$

4 A series expansion for a right continuous martingale

For an application of the foregoing results we will prove a series expansion of second order for a right continuous martingale. This expansion is based on the following lemma, which is probably well-known, but in lack of a suitable reference we give a complete proof.

Lemma 4.1 *Let $(B_t, \mathcal{F}_t) = B$ be a Brownian motion on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, let further σ, τ be square integrable $(\mathcal{F}_t)$–stopping times such that $\sigma \vee \tau$ is $\mathcal{F}_\tau$–measurable, and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a bounded, four times continuously differntiable function with bounded derivatives. Then the following second order series expansion holds:*

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}f(B_\tau) - \mathbb{E}f(B_\sigma) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\{f^{II}(B_\tau)(\tau - \sigma)\} - \frac{1}{8}\mathbb{E}\{f^{IV}(B\tau)(\tau - \sigma)^2\} + R(\sigma, \tau),
\end{aligned}
\tag{4.1.1}
$$

where the remaider term $R(\sigma, \tau)$ is estimated by

$$
\begin{aligned}
|R(\sigma, \tau)| &\le \frac{1}{8}\mathbb{E}\{\rho(\sigma, \tau)(\tau - \sigma)^2\} \text{ with} \\
\rho(\sigma, \tau) &= \sup_{s \in [\sigma \wedge \tau, \sigma \vee \tau]} |f^{IV}(B_s) - f^{IV}(B_\tau)|.
\end{aligned}
$$

Proof: The proof is based on a twofold application of the Ito–formula. We have

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}f(B_\tau) - \mathbb{E}f(B_\sigma) \\
&= \ \mathbb{E}\{1_{[\tau<\sigma]}(f(B_\tau) - f(B_\sigma))\} + \mathbb{E}\{1_{[\tau>\sigma]}(f(B_\tau) - f(B_\sigma))\} \\
&= -\mathbb{E}\{1_{[\tau<\sigma]}(f(B_{\sigma\vee\tau}) - f(B_\tau))\} + \mathbb{E}\{1_{[\tau>\sigma]}(f(B_{\sigma\vee\tau}) - f(B_\sigma))\} \\
&= -\mathbb{E}\left\{1_{[\tau<\sigma]}\left(\frac{1}{2}\int_\tau^{\sigma\vee\tau} f^{II}(B_s)ds + \int_\tau^{\sigma\vee\tau} f^{I}(B_s)dB_s\right)\right\} \\
&\quad + \mathbb{E}\left\{1_{[\tau>\sigma]}\left(\frac{1}{2}\int_\sigma^{\sigma\vee\tau} f^{II}(B_s)ds + \int_\sigma^{\sigma\vee\tau} f^{I}(B_s)dB_s\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

(by the Ito–formula)

$$= -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau<\sigma]}\int_{\tau}^{\sigma\vee\tau} f^{II}(B_s)ds\right\} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau>\sigma]}\int_{\sigma}^{\sigma\vee\tau} f^{II}(B_s)ds\right\}$$

$\Bigg($ since $[\tau<\sigma], [\tau>\sigma] \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau($ cf.[12]), and

$$\mathbb{E}\left[\int_{\tau}^{\sigma\vee\tau} f^{I}(B_s)dB_s|\mathcal{G}_\tau\right] = 0, \mathbb{E}\left[\int_{\sigma}^{\sigma\vee\tau} f^{I}(B_s)dB_s|\mathcal{G}_\tau\right] = 0$$

by Doob's stopping theorem applied to the martingale $(\int_0^t f^I(B_s)dB_s)_{t\geq 0}\Bigg)$

$$= -\frac{1}{2}\mathbb{E}\{1_{[\tau<\sigma]}f^{II}(B_\tau)(\sigma\vee\tau-\tau)\} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{1_{[\tau>\sigma]}f^{II}(B_\tau)(\sigma\vee\tau-\sigma)\} + S(\sigma,\tau)$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{E}\{f^{II}(B_\tau)(\tau-\sigma)\} + S(\sigma,\tau), \quad \text{where}$$

$$\begin{aligned} S(\sigma,\tau) = &-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau<\sigma]}\int_{\tau}^{\sigma\vee\tau}(f^{II}(B_s)-f^{II}(B_\tau))ds\right\} \\ &+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau>\sigma]}\int_{\sigma}^{\sigma\vee\tau}(f^{II}(B_s)-f^{II}(B_\tau))ds\right\}. \end{aligned}$$

For $S(\sigma,\tau)$ we handle both terms on the right hand side separately.

(i) $\quad \mathbb{E}\left\{1_{[\tau<\sigma]}\int_{\tau}^{\sigma\vee\tau}(f^{II}(B_s)-f^{II}(B_\tau))ds\right\}$

$$= \mathbb{E}\left\{1_{[\tau<\sigma]}\int_{\tau}^{\sigma\vee\tau}\left[\frac{1}{2}\int_{\tau}^{s} f^{IV}(B_r)dr + \int_{\tau}^{s} f^{III}(B_r)dB_r\right]ds\right\}$$

(from the Ito-formula).

Now it is not difficult to prove the formula

$$\int_0^t\int_0^s f^{III}(B_r)dB_r ds = t\int_0^t f^{III}(B_r)dB_r - \int_0^t (rf^{III}(B_r))dB_r.$$

[Consider the martingale $M_t = \int_0^t f^{III}(B_r)dB_r$ and apply the Ito-formula with the function $f(t,x) = tx$.]

From this formula and the assumption that the stopping time $\sigma \vee \tau$ is $\mathcal{F}_\tau$–measurable, we get that

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left\{\int_\tau^{\sigma\vee\tau}\int_\tau^s f^{III}(B_r)dB_r ds|\mathcal{F}_\tau\right\}\\&=\mathbb{E}\left\{(\sigma\vee\tau)\int_\tau^{\sigma\vee\tau} f^{III}(B_s)dB_s-\int_\tau^{\sigma\vee\tau}(sf^{III}(B_s))dB_s|\mathcal{F}_\tau\right\}=0\,.\end{aligned}$$

Thus we have obtained that

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left\{1_{[\tau<\sigma]}\int_\tau^{\sigma\vee\tau}(f^{II}(B_s)-f^{II}(B_\tau))ds\right\}\\&=\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau<\sigma]}\int_\tau^{\sigma\vee\tau}\int_\tau^s f^{IV}(B_r)dr\right\}.\end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left\{1_{[\tau>\sigma]}\int_\sigma^{\sigma\vee\tau}(f^{II}(B_s)-f^{II}(B_\tau))ds\right\}\\&=\mathbb{E}\left\{1_{[\tau>\sigma]}\int_\sigma^{\sigma\vee\tau}\left[-\frac{1}{2}\int_s^{\sigma\vee\tau} f^{IV}(B_r)dr+\int_s^{\sigma\vee\tau} f^{III}(B_r)dB_r\right]ds\,.\right.\end{aligned}$$

Now we put $N_t=\int_0^t\int_s^t f^{III}(B_r)dB_r ds$ and obtain as above $N_t=\int_0^t(rf^{III}(B_r))dB_r$, which shows that (N_t) is a martingale. By Doob's stopping theorem we get

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_\sigma^{\sigma\vee\tau}\int_s^{\sigma\vee\tau} f^{III}(B_r)dB_r ds|\mathcal{F}_\sigma\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_\sigma^{\sigma\vee\tau}(rf^{III}(B_r))dB_r|\mathcal{F}_\sigma\right]=0\,,\end{aligned}$$

and hence

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left\{1_{[\tau>\sigma]}\int_\sigma^{\sigma\vee\tau}(f^{II}(B_s)-f^{II}(B_\tau))ds\right\}\\&=-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau>\sigma]}\int_\sigma^{\sigma\vee\tau}\int_s^{\sigma\vee\tau} f^{IV}(B_r)ds\,dr\right\}.\end{aligned}$$

Altogether we have proved

$$S(\sigma,\tau) = -\frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau<\sigma]}\int\limits_{\tau}^{\sigma\vee\tau}\int\limits_{\tau}^{s} f^{IV}(B_r)dr\,ds\right\} - \frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau>\sigma]}\int\limits_{\sigma}^{\sigma\vee\tau}\int\limits_{s}^{\sigma\vee\tau} f^{IV}(B_r)drds\right\}.$$

We compute further

$$\begin{aligned} S(\sigma,\tau) =& -\frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau<\sigma]}\int\limits_{\tau}^{\sigma\vee\tau}\int\limits_{\tau}^{s} f^{IV}(B_\tau)dr\ ds\right\} \\ & - \frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau>\sigma]}\int\limits_{\sigma}^{\sigma\vee\tau}\int\limits_{s}^{\sigma\vee\tau} f^{IV}(B_\tau)drds\right\} \\ & - \frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau<\sigma]}\int\limits_{\tau}^{\sigma\vee\tau}\int\limits_{\tau}^{s} (f^{IV}(B_r)-f^{IV}(B_\tau))dr\,ds\right\} \\ & - \frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau>\sigma]}\int\limits_{\sigma}^{\sigma\vee\tau}\int\limits_{s}^{\sigma\vee\tau} (f^{IV}(B_r)-f^{IV}(B_\tau))dr\,ds\right\} \\ =& -\frac{1}{8}\mathbb{E}\{1_{[\tau<\sigma]}f^{IV}(B_\tau)(\sigma\vee\tau-\tau)^2\} \\ & - \frac{1}{8}\mathbb{E}\{1_{[\tau>\sigma]}f^{IV}(B_\tau)(\sigma\vee\tau-\sigma)^2\} + R(\sigma,\tau) \\ =& -\frac{1}{8}\mathbb{E}\{f^{IV}(B_\tau)(\tau-\sigma)^2\} + R(\sigma,\tau)\,, \end{aligned}$$

where

$$R(\sigma,\tau) = -\frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau<\sigma]}\int\limits_{\tau}^{\sigma\vee\tau}\int\limits_{\tau}^{s} (f^{IV}(B_r)-f^{IV}(B_\tau))dr\ ds\right\} - \frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{1_{[\tau>\sigma]}\int\limits_{\sigma}^{\sigma\vee\tau}\int\limits_{s}^{\sigma\vee\tau} (f^{IV}(B_r)-f^{IV}(B_\tau)drds\right\}.$$

With $\rho(\sigma,\tau)$ as defined in the lemma, we obviously get the asserted inequality

$$R(\sigma,\tau) \le \frac{1}{8}\mathbb{E}\{\rho(\sigma,\tau)(\tau-\sigma)^2\}$$

and the lemma is proved.

Now let $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ be a right continuous L^4-martingale on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, and suppose that M is embedded into a Brownian motion $B = (B_t, \mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ on (S, Σ, Q) in the sense of theorem 2.3.
Then for any $s \geq 0, t \geq 0$ the stopping time $\tau_t \vee s$ is $\mathcal{G}_{\tau_t}$-measurable, and an application of the lemma gives the series expansion (cf. theorem 2.3)

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}f(M_t) - \mathbb{E}f(B_s) \\
&= \mathbb{E}f(B_{\tau_t}) - \mathbb{E}f(B_s) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\{f^{II}(B_{\tau_t})(\tau_t - s)\} - \frac{1}{8}\mathbb{E}f^{IV}(B_{\tau_t})(\tau_t - s)^2 + R(s, \tau_t) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\{\mathbb{E}[f^{II}(Y_t)(\tau_t - s)|\sigma(Y_s; s \leq t)]\} \\
&\quad - \frac{1}{8}\mathbb{E}\{\mathbb{E}[f^{IV}(Y_t)(\tau_t - s)^2|\sigma(Y_s; s \leq t]\} + R(s, \tau_t) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\{f^{II}(Y_t)\mathbb{E}[\tau_t - s|\sigma(Y_s; s \leq t]\} \\
&\quad - \frac{1}{8}\mathbb{E}\{f^{IV}(Y_t)\mathbb{E}[(\tau_t - s)^2|\sigma(Y_s; s \leq t)]\} + R(s, \tau_t) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{f^{II}(Y_t)\left[\frac{1}{3}[Y]_t + \frac{2}{3}\langle Y\rangle_t - s\right]\right\} \\
&\quad - \frac{1}{8}\mathbb{E}\{f^{IV}(Y_t)[Var(\tau_t|\sigma(Y_s; s \leq t) + (\mathbb{E}(\tau_t|\sigma(Y_s; s \leq t)) - s)^2]\} + R(s, \tau_t)\,.
\end{aligned}
$$

Since the processes M and Y have the same finite–dimensional distributions, we have obtained the following result:

Theorem 4.2 *Let M be a right continuous L^4-martingale embedded into a Brownian motion B in the sense of theorem 2.3.*
Then for any $t \geq 0, s \geq 0$, and any bounded four times continuously differentiable function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with bounded derivatives the following series expansion holds:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}f(M_t) - \mathbb{E}f(B_s) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{f^{II}(M_t)\left[\frac{1}{3}[M]_t + \frac{2}{3}\langle M\rangle_t - s\right]\right\} \\
&\quad - \frac{1}{8}\mathbb{E}\left\{f^{IV}(M_t)\left[\left(\frac{2}{45}[M^4]_t + \frac{8}{45}[\mathbb{E}(M^4|.)]_t + \left(\frac{4}{9} - c(p)\right)[(\mathbb{E}(M^2|.))^2]_t\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. + c(p)[M^2\mathbb{E}(M^2|.)]_t - c(p)[M\mathbb{E}(M^3|.)]_t\right) + \left(\frac{1}{3}[M]_t + \frac{2}{3}\langle M\rangle_t - s\right)^2\right]\right\} + R(s, \tau_t)\,.
\end{aligned}
$$

References

[1] **Azéma, J.**, and **Yor, M. :** *Une solution simple au problème de Skorohod.* Sém. Probab. XIII, Lecture Notes in Math. **721**, 90 – 115 and 625 – 633 (1979)

[2] **Chacon, R.**, and **Walsh, J. B. :** *One – dimensional potential embedding.* Sém. Probab. X, Lecture Notes in Math. **511**, 19 – 23 (1976)

[3] **Chung, K. L.**, and **Williams, R. J. :** *Introduction to Stochastic Integration.* 2nd edition. Birkhäuser Boston, 1990

[4] **Dubins, L. E. :** *On a theorem of Skorohod.* Ann. Math. Stat. **39**, 2094 – 2097 (1968)

[5] **Dudley, R. M. :** *Real Analysis and Probability.* Wadsworth & Brooks – Cole, 1989

[6] **Monroe, I. :** *On embedding right continuous martingales in Brownian motion.* Ann. Math. Stat. **43**, 1293 – 1311 (1972)

[7] **Monroe, I. :** *Processes that can be embedded in Brownian motion.* Ann. Probab. **6**, 42 – 56 (1978)

[8] **Mykland, P. A. :** *Embedding and Asymptotic Expansions for Martingales.* Probab. Theory Related Fields **103**, 475 – 492 (1995)

[9] **Shiryayev :** *Wahrscheinlichkeit.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988

[10] **Shen, Sh. Sh. :** *Representing a distribution by stopping a Brownian motion: Root's construction.* Bull. Austral. Math. Soc. **34**, 427 – 431 (1986)

[11] **Karatzas, I.**, and **Shreve, St. E. :** *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer 1988

[12] **Skorohod, A. V. :** *Studies in the Theory of Random Processes.* Addison – Wesley, Reading 1965

received: June 1996 **revised:** August 27, 1998

Author:

Egbert Dettweiler
Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Auf der Morgenstelle 10
72076 Tbingen
Germany

Rostock. Math. Kolloq. **53**, 111–123 (1999)

Subject Classification (AMS)
93A25, 93C62, 94A12

Holger Boche

Stabilitätsverhalten der kausalen Variante des idealen Tiefpasses

ABSTRACT. In this paper the behaviour of the causal variant of the ideal low-pass is investigated. It is shown that this system is not stable with respect to the energy norm. A construction of an input signal with finite energy is given in the paper such that the output signal has an infinite energy. This result solves a problem proposed by Professor Mathis.

1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird das Stabilitätsverhalten der kausalen Variante des idealen Tiefpasses untersucht. Der ideale Tiefpaß ist ein energetisch stabiles System, d.h., die Energie des Ausgangssignals des idealen Tiefpasses ist stets kleiner oder gleich der Energie des Eingangssignals. Es wird in der Arbeit gezeigt, daß die kausale Variante des idealen Tiefpasses bezüglich der energetischen Norm instabil ist. Es wird ein Eingangssignal mit endlicher Energie angegeben, so daß der entsprechende Ausgang der kausalen Variante des idealen Tiefpasses eine unendliche Energie besitzt. Dieses System wird im weiteren mit T_+ bezeichnet. Natürlich besitzt die Impulsantwort h_+ des Systems T_+ eine endliche Energie. Es ist deshalb interessant, daß bestimmte Ausgangssignale eine unendliche Energie besitzen. Die Resultate der Arbeit zeigen, daß durch den Übergang von nicht kausalen energetisch stabilen Systemen zu ihren kausalen Varianten energetisch instabile Systeme entstehen können.

Im Abschnitt 2 der Arbeit werden die notwendigen Begriffe eingeführt. Im Abschnitt 3 wird das Verhalten des idealen Tiefpasses und seiner kausalen Variante untersucht. Die Arbeit endet mit einer Diskussion der Resultate.

2 Begriffe

Als erstes werden wichtige Signalräume eingeführt. Mit l^2 wird der Signalraum aller Signale x bezeichnet, für welche die Beziehung

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{1}$$

gilt. Die Signale $x \in l^2$ werden als Signale mit endlicher Energie bezeichnet. Es sei l^2_+ der Signalraum aller Signale x mit endlicher Energie, für welche die Beziehung $x(k) = 0$ für $k < 0$ gilt.

Weiterhin wird der Signalraum l^∞ aller beschränkten Signale eingeführt. Für ein Signal $x \in l^\infty$ gilt somit die Beziehung

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)| \ . \tag{2}$$

Ein Signal x mit endlicher Energie gehört stets zum Signalraum l^∞, jedoch gilt im allgemeinen die Umkehrung dieser Aussage nicht. Man hat also $l^2 \subset l^\infty$.

In der weiteren Arbeit werden zeitdiskrete zeitinvariante lineare Systeme (LTI-Systeme) untersucht. Ein solches System S heißt energetisch stabil, wenn eine positive Zahl C_1 existiert, so daß für alle Eingangssignale x mit endlicher Energie die Beziehung

$$\|Sx\|_2 \leq C_1 \cdot \|x\|_2 \tag{3}$$

gilt. Die Energie des Ausgangssignals Sx ist somit kleiner oder gleich der Energie des Eingangssignals, multipliziert mit der Konstanten C_1. Das Input-Output-Verhalten eines energetisch stabilen LTI-Systems S ist stets durch die übliche Faltungssumme

$$y(k) = (Sx)(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)x(l) \tag{4}$$

gegeben. Hierbei ist h die Impulsantwort des Systems S. Diese Tatsache gilt nicht für beliebige BIBO-stabile (bounded-input bounded-output) lineare Systeme. Ein solches System ist im allgemeinen nicht eindeutig durch seine Impulsantwort bestimmt ([1], [2], [3], [13]). Die Beschränkung auf energetisch stabile Systeme stellt somit tatsächlich eine Einschränkung der zulässigen Systeme dar.

Ein LTI-System S heißt kausal, wenn für alle Signale $x_1, x_2 \in l^2$, für welche $x_1(l) = x_2(l)$ für $l \leq n$ gilt, ebenfalls die Beziehung

$$(Sx_1)(k) = (Sx_2)(k) \tag{5}$$

für $k \leq n$ erfüllt ist. Ein System der Form (4) mit einer Impulsantwort $h \in l^2$ ist genau dann kausal, wenn für die Impulsantwort h die Beziehung $h(k) = 0$ für $k < 0$ gilt.

Im weiteren wird der ideale Tiefpaß untersucht. Er besitzt für die digitale Signalverarbeitung eine große Bedeutung ([4], [5], [11], [12], [14]). Dazu sei $0 < \omega_g < \pi$ eine feste Grenzfrequenz. Die Impulsantwort des idealen Tiefpasses ist durch

$$h_{\omega_g}(k) = \begin{cases} \frac{\sin \omega_g k}{\pi k}\,, & k \neq 0\,, \\ \\ \frac{\omega_g}{\pi}\,, & k = 0\,, \end{cases} \tag{6}$$

gegeben. Hierbei ist $\sqrt{-1} = j$. Da ω_g eine feste Grenzfrequenz ist, kann im weiteren $h = h_{\omega_g}$ gesetzt werden. Damit gilt für das Input-Output-Verhalten des idealen Tiefpasses T die Darstellung

$$(Tx)(k) = \sum_{l=-\infty;l\neq 0}^{\infty} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} x(k-l) + \frac{\omega_g}{\pi} x(k)\ . \tag{7}$$

Der Frequenzgang H des idealen Tiefpasses ist durch

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1\,, & |\Omega| < \omega_g\,, \\ \frac{1}{2}\,, & |\Omega| = \omega_g\,, \\ 0\,, & \omega_g < |\Omega| \leq \pi\,, \end{cases} \tag{8}$$

gegeben ([6], [7]). Aufgrund der Darstellung (8) kann der ideale Tiefpaß T kein kausales System sein. Aus (8) kann ebenfalls sofort auf das energetische Verhalten des idealen Tiefpasses T geschlossen werden. Es gilt für alle Signale $x \in l^2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |y(k)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 \cdot |X(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} |X(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2\ , \end{aligned} \tag{9}$$

d.h., es gilt

$$\|y\|_2 \leq \|x\|_2\ . \tag{10}$$

Bei der Abschätzung (10) wurden die Parsevalsche Gleichung und die Beziehung

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) \cdot X(e^{j\Omega}) \tag{11}$$

genutzt. Die Gleichung (11) gilt für fast alle $\Omega \in [-\pi, \pi)$. Aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für den Raum $L^2[-\pi, \pi)$ gehört die Funktion Y zum Raum $L^2[-\pi, \pi)$. Für $N \in \mathbb{N}$ werden die Funktionen

$$X_N(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-N}^{N} x(k) e^{-jk\Omega}$$

eingeführt. Man hat $\lim_{N\to\infty} \|X - X_N\|_{L^2[-\pi,\pi)} = 0$. Weiterhin ist mit

$$y_N(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l) x_N(l) \tag{12}$$

ebenfalls für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{N\to\infty} y_N(k) = y(k) \; . \tag{13}$$

Aufgrund der Beziehung $\|y_N\|_2 \leq \|h\|_2 \cdot \|x_N\|_1$ erhält man nach einer einfachen Rechnung für fast alle $\Omega \in [-\pi, \pi)$ die Beziehung $Y_N(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) \cdot X_N(e^{j\Omega})$. Damit ergibt sich für die durch die Gleichung (11) definierte Funktion Y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y(e^{j\Omega}) - Y_N(e^{j\Omega})| \, d\Omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})| \cdot |X(e^{j\Omega}) - X_N(e^{j\Omega})| \, d\Omega \\ &\leq \|H\|_{L^2[-\pi,\pi)} \cdot \|X - X_N\|_{L^2[-\pi,\pi)} \, , \end{aligned} \tag{14}$$

also

$$\lim_{N\to\infty} \|Y - Y_N\|_{L^1[-\pi,\pi)} = 0 \; . \tag{15}$$

Somit gilt für die durch die Gleichung (11) definierte Funktion Y

$$y(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\Omega}) e^{jk\Omega} \, d\Omega \; ,$$

womit sich der gewünschte Zusammenhang ergibt.

Die Energie des Ausgangssignals y des idealen Tiefpasses ist somit stets kleiner oder gleich der Energie des Eingangssignals x.

Im weiteren wird die kausale Variante T_+ des idealen Tiefpasses T untersucht. Dieses System T_+ ist dadurch definiert, daß seine Impulsantwort h_+ unter allen kausalen Systemen der Form (4) bezüglich der energetischen Norm am dichtesten an der Impulsantwort h des idealen Tiefpasses liegt. Die Impulsantwort h_+ ergibt sich damit aus

$$h_+(k) = \begin{cases} h(k) \, , & k \geq 0 \, , \\ 0 \, , & k < 0 \; . \end{cases} \tag{16}$$

Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus der folgenden einfachen Rechnung. Hierbei sei $g \neq h_+$ ein beliebiges Signal aus dem Signalraum l^2_+. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k) - g(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{-1} |h(k)|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} |h(k) - g(k)|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k) - h_+(k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k) - g(k)|^2 \\
&> \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k) - h_+(k)|^2 \, .
\end{aligned} \tag{17}$$

Damit stellt das System T_+ bezüglich der Approximierbarkeit der Impulsantwort h in der energetischen Norm das optimale System dar. Die Impulsantwort h_+ ergibt sich aufgrund der Darstellung (16) aus $h_+(k) = h(k) \cdot s(k)$, wobei mit s die Sprungfunktion

$$s(k) = \begin{cases} 1\,, & k \geq 0\,, \\ \\ 0\,, & k < 0\,, \end{cases} \tag{18}$$

bezeichnet wird. Das System T_+ wird somit aufgrund einer sehr einfachen Konstruktion aus dem idealen Tiefpaß gewonnen. Als nächstes soll gezeigt werden, daß das System T_+ ein völlig anderes Stabilitätsverhalten besitzt als der ideale Tiefpaß T. Es wird gezeigt, daß das System T_+ nicht energetisch stabil ist. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 1 *Es existiert ein Signal x_* mit endlicher Energie, so daß das Ausgangssignal T_+x_* eine unendliche Energie besitzt. Es gilt also*

$$\|T_+x_*\|_2 = \infty \, . \tag{19}$$

Für das Eingangssignal x_* gilt ebenfalls $x_*(l) = 0$ für $l < 0$, d.h., es gehört zum Signalraum l^2_+.

Der Satz 1 wird im nächsten Abschnitt bewiesen.

Trotzdem das System T_+ eine Impulsantwort mit endlicher Energie besitzt, erzeugt das System T_+ für das Eingangssignal x_* ein Ausgangssignal, welches eine unendliche Energie besitzt. Die Faltung zweier Signale mit endlicher Energie muß somit kein Signal mit endlicher Energie ergeben. Natürlich gilt für alle Eingangssignale x mit endlicher Energie für den Ausgang $y_+ = T_+x$ des Systems T_+ aufgrund der Cauchyschen Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|y_+(k)| &= \left| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} x(k-l) + \frac{\omega_g}{\pi} x(k) \right| \leq \sum_{l=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} x(k-l) \right| + \frac{\omega_g}{\pi} |x(k)| \\
&\leq \left(\left(\frac{\omega_g}{\pi}\right)^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega_g l}{\pi l} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} |x(k-l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|h_+\|_2 \cdot \|x\|_2 \, .
\end{aligned} \tag{20}$$

Weiterhin ergibt sich für die Energie der Impulsantwort h_+ aufgrund der Parsevalschen Gleichung

$$\sum_{l=0}^{\infty} |h_+(l)|^2 < \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega = \frac{\omega_g}{\pi} \ , \tag{21}$$

womit man

$$|y_+(k)| \leq \sqrt{\frac{\omega_g}{\pi}} \cdot \|x\|_2 \tag{22}$$

erhält. Der Spitzenwert des Ausgangs y_+ des Systems T_+ ist somit stets kleiner oder gleich der Energie des Eingangssignals, multipliziert mit $\sqrt{\frac{\omega_g}{\pi}}$. Somit ist für alle Zahlen N die Energiekonzentration

$$E_N(y) = \left(\sum_{l=-N}^{N} |y_+(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{23}$$

stets endlich. Der Satz 1 besagt nun, daß speziell für das Ausgangssignal T_+x_* die Beziehung

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{l=-N}^{N} |(T_+x_*)(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \infty \tag{24}$$

gilt, d.h., die Energiekonzentration wächst in Abhängigkeit von N unbegrenzt an, womit das Signal T_+x_* keine endliche Energie besitzen kann.

Für ein System S mit einer absolut summierbaren Impulsantwort h kann das in diesem Abschnitt geschilderte Verhalten nicht auftreten. Hier hat man stets

$$\|Sx\|_2 \leq \|h\|_1 \cdot \|x\|_2 \, ,$$

womit ebenfalls die kausale Variante eines solchen Systems energetisch stabil ist.

Die Abschätzung (9) kann auf ein beliebiges LTI-System ausgedehnt werden, dessen Frequenzgang H zum Raum $L^\infty[-\pi,\pi)$ gehört. Man erhält hier

$$\|Sx\|_2 \leq \|H\|_{L^\infty[-\pi,\pi)} \cdot \|x\|_2 \, .$$

Es ist damit klar, daß der Frequenzgang der kausalen Variante des idealen Tiefpasses nicht zum Raum $L^\infty[-\pi,\pi)$ gehört.

3 Konstruktion des Signals x_*

Im weiteren wird das System

$$(Ux)(k) = (T_+x)(k) - \frac{\omega_g}{\pi}x(k) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} x(k-l) \tag{25}$$

betrachtet. Damit gilt für alle Signale $x \in l^2$ die Beziehung

$$\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} |(T_+x)(k) - (Ux)(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} |x(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{26}$$

Als nächstes wird das Signal $x_* \in l_+^2$ konstruiert, so daß

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{l=0}^{N} |(Ux_*)(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \infty \tag{27}$$

gilt. Da mit (26) ebenfalls

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=0}^{N} |(Ux_*)(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \left(\sum_{l=0}^{N} |x_*(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{l=0}^{N} |(T_+x_*)(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \|x_*\|_2 + \left(\sum_{l=0}^{N} |(T_+x_*)(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{28}$$

gilt, hat man mit (27)

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{l=0}^{N} |(T_+x_*)(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \infty , \tag{29}$$

d.h., das Ausgangssignal T_+x_* besitzt keine endliche Energie, womit der Satz 1 bewiesen wäre. Es verbleibt also nur noch, das Signal x_* so zu konstruieren, daß die Beziehung (27) erfüllt ist.

Im weiteren sei $n(m) = 2^{m^4} + 1$. Es wird das Signal x_m mit

$$x_m(l) = \begin{cases} \frac{e^{j\omega_g l}}{\sqrt{n(m)}} , & 0 \leq l \leq n(m) , \\ 0 , & l \notin [0, n(m)] , \end{cases} \tag{30}$$

betrachtet. Es gilt für alle Zeitpunkte $k \in [1, n(m)]$

$$\begin{aligned} (Ux_m)(k) &= \frac{1}{\sqrt{n(m)}} \sum_{l=1}^{k} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} e^{j\omega_g (k-l)} = \frac{e^{j\omega_g k}}{\sqrt{n(m)}} \sum_{l=1}^{k} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} e^{-j\omega_g l} \\ &= \frac{e^{j\omega_g k}}{2j\pi\sqrt{n(m)}} \cdot \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} - \sum_{l=1}^{k} \frac{e^{-2j\omega_g l}}{l} \right) . \end{aligned} \tag{31}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\Re\left(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)\right) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{n(m)}}\cdot\Re\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{k}\frac{e^{-2j\omega_g l}}{l}\right)\\ &\geq \frac{1}{2\pi\sqrt{n(m)}}\cdot\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}-\left|\sum_{l=1}^{k}\frac{e^{-2j\omega_g l}}{l}\right|\right) , \end{aligned}\tag{32}$$

wobei mit $\Re z$ der Realteil einer komplexen Zahl z bezeichnet wird. Die rechte Seite von (32) wird weiter untersucht. Dabei wird als erstes das erste Glied auf der rechten Seite von (32) betrachtet. Es ist für $l \leq \tau \leq l+1$

$$\frac{1}{l} > \int_{l}^{l+1}\frac{1}{\tau}\,d\tau , \tag{33}$$

also

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l} > \sum_{l=1}^{k}\int_{l}^{l+1}\frac{1}{\tau}\,d\tau = \int_{1}^{k+1}\frac{1}{\tau}\,d\tau = \ln(1+k) . \tag{34}$$

Damit erhält man die Abschätzung

$$\Re\left(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)\right) \geq \frac{1}{2\pi\sqrt{n(m)}}\ln(k+1) - \frac{1}{2\pi\sqrt{n(m)}}\cdot\left|\sum_{l=1}^{k}\frac{e^{-2j\omega_g l}}{l}\right| . \tag{35}$$

Der zweite Ausdruck auf der rechten Seite von (35) wird als nächstes untersucht. Es soll gezeigt werden, daß für alle Zahlen k die Abschätzung

$$\left|\sum_{l=1}^{k}\frac{e^{-2j\omega_g l}}{l}\right| \leq \frac{1}{\sin\omega_g} \tag{36}$$

gilt. Dazu wird die Hilfsfunktion

$$\phi(k) = \sum_{l=0}^{k} e^{-2j\omega_g l} = \frac{1-e^{-2j\omega_g(k+1)}}{1-e^{-2j\omega_g}} \tag{37}$$

eingeführt. Weiterhin ist $\phi(0) = 1$. Es gilt damit

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{k}\frac{e^{-2j\omega_g l}}{l} &= \sum_{l=1}^{k}\frac{\phi(l)-\phi(l-1)}{l} = \sum_{l=1}^{k}\frac{\phi(l)}{l} - \sum_{l=1}^{k}\frac{\phi(l-1)}{l}\\ &= \sum_{l=1}^{k}\frac{\phi(l)}{l} - \sum_{l=2}^{k+1}\frac{\phi(l)}{l-1}\\ &= \phi(1) - \frac{\phi(k+1)}{k+1} + \sum_{l=2}^{k}\phi(l)\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l-1}\right) . \end{aligned}\tag{38}$$

Damit erhält man

$$\left|\sum_{l=1}^{k} \frac{e^{-2j\omega_g l}}{l}\right| \leq |\phi(1)| + \frac{|\phi(k+1)|}{k+1} + \sum_{l=2}^{k} |\phi(l)| \cdot \frac{1}{l(l-1)} \ . \tag{39}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} |\phi(n)| &= \frac{|1-e^{-2j\omega_g(n+1)}|}{|1-e^{-2j\omega_g}|} \leq \frac{2}{|1-e^{-2j\omega_g}|} \\ &= \frac{2}{|e^{j\omega_g}-e^{-j\omega_g}|} = \frac{1}{\sin\omega_g} \ . \end{aligned} \tag{40}$$

Mit (40) erhält man für das letzte Glied der rechten Seite die Abschätzung von (39)

$$\begin{aligned} \sum_{l=2}^{k} |\phi(l)| \cdot \frac{1}{l(l-1)} &\leq \frac{1}{\sin\omega_g} \cdot \sum_{l=2}^{k} \frac{1}{l(l-1)} < \frac{1}{\sin\omega_g} \cdot \sum_{l=2}^{k} \frac{1}{(l-1)^2} \\ &< \frac{1}{\sin\omega_g} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{4\cdot\sin\omega_g} \ . \end{aligned} \tag{41}$$

Damit muß

$$\left|\sum_{l=1}^{k} \frac{e^{-2j\omega_g l}}{l}\right| \leq \frac{2}{\sin\omega_g} + \frac{\pi^2}{4\sin\omega_g} < \frac{5}{\sin\omega_g} \tag{42}$$

sein. Mit (42) erhält man für den Ausdruck (35)

$$\Re\left(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)\right) \geq \frac{1}{\sqrt{n(m)}}\left(\frac{1}{2\pi}\ln(k+1) - \frac{1}{\sin\omega_g}\right) \ . \tag{43}$$

Gilt nun für den Zeitpunkt k die Beziehung $\sqrt{n(m)} \leq k \leq n(m)$, so erhält man

$$\Re\left(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)\right) \geq \frac{1}{\sqrt{n(m)}}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{n(m)} - \frac{1}{\sin\omega_g}\right) \ . \tag{44}$$

Weiterhin existiert eine natürliche Zahl m_0 derart, daß für alle Zahlen $m \geq m_0$ stets die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{n(m)} - \frac{1}{\sin\omega_g} = \frac{\ln 2}{2\pi}m^4 - \frac{1}{\sin\omega_g} > \frac{1}{10}m^4$$

erfüllt ist. Damit erhält man für alle Zahlen $m \geq m_0$ die Abschätzung

$$\Re\left(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)\right) > \frac{1}{10\sqrt{n(m)}}m^4 \ . \tag{45}$$

Es wird nun für das Signal x_* der Ansatz

$$x_*(l) = \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot x_m(l) \tag{46}$$

gewählt. Für die Energie des Signals x_* ergibt sich mit der Dreiecksungleichung

$$\|x_*\|_2 \leq \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \|x_m\|_2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} \ . \tag{47}$$

Es wird als nächstes das Signal $y_* = Ux_*$ untersucht. Es gilt für alle Zeitpunkte k

$$\begin{aligned} (Ux_*)(k) &= \sum_{l=1}^{k} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} \cdot x_*(k-l) \\ &= \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{l=1}^{k} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} \cdot x_m(k-l) \ . \end{aligned} \tag{48}$$

Da für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} |x(k) - \sum_{m=m_0}^{n} \frac{1}{m^2} \cdot x_m(k-l)| &\leq \|x - \sum_{m=m_0}^{n} \frac{1}{m^2} \cdot x_m\| \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{49}$$

gilt, konvergiert die endliche Reihe $\sum_{m=m_0}^{n} \frac{1}{m^2} x_m(k-l)$ gleichmäßig gegen das Signal x_*. Somit war die Vertauschung der Summationsreihenfolge in (48) zulässig. Aus (48) ergibt sich

$$\Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_*)(k)) = \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)) \ . \tag{50}$$

Es sei nun $k > n(m_0)$ ein beliebiger Zeitpunkt und $m > m_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Es können die beiden Fälle $k \leq n(m)$ bzw. $k > n(m)$ eintreten. Für den ersten Fall hat man

$$\begin{aligned} \Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)) &\geq \frac{1}{\sqrt{n(m)}} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \ln(k+1) - \frac{1}{\sin \omega_g} \right) \\ &> \frac{1}{\sqrt{n(m)}} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{n(m_0)} - \frac{1}{\sin \omega_g} \right) > 0 \ . \end{aligned} \tag{51}$$

Für den zweiten Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} \Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)) &\geq \frac{1}{2\pi\sqrt{n(m)}} \Re\left(\sum_{l=1}^{n(m)} \frac{1}{l} - \sum_{l=1}^{n(m)} \frac{e^{-2j\omega_g}}{l} \right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n(m)}} \Re\left(\frac{1}{2\pi} \ln n(m) - \frac{1}{\sin \omega_g} \right) > 0 \ . \end{aligned} \tag{52}$$

Somit ist für alle Zahlen $M \geq m_0$ stets

$$\Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_*)(k)) > \frac{1}{M^2} \Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_M)(k)) \ . \tag{53}$$

Betrachtet man nun speziell die Zeitpunkte k aus dem Zeitintervall $\sqrt{n(M)} \leq k \leq n(M)$, so ergibt das

$$\Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_*)(k)) > \frac{1}{M^2} \cdot \frac{M^4}{10\sqrt{n(M)}} \ . \tag{54}$$

Nun ist ebenfalls

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |(Ux_*)(k)|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |je^{-j\omega_g k} \cdot (Ux_*)(k)|^2 \geq \sum_{k=0}^{\infty} \left|\Re\Big(je^{-j\omega_g k} \cdot (Ux_*)(k)\Big)\right|^2 \\
&\geq \sum_{k=\sqrt{n(M)}}^{n(M)} \left|\Re\Big(je^{-j\omega_g k} \cdot (Ux_*)(k)\Big)\right|^2 \\
&> \frac{1}{M^4} \sum_{k=\sqrt{n(M)}}^{n(M)} \left|\Re\Big(e^{-j\omega_g k} \cdot (Ux_M)(k)\Big)\right|^2 \\
&> \frac{M^8}{10M^4} \frac{1}{n(M)} \sum_{k=\sqrt{n(M)}}^{n(M)} 1 \\
&= \frac{M^4}{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n(M)}}\right) > \frac{M^4}{20} \ .
\end{aligned} \tag{55}$$

Somit gilt für alle natürlichen Zahlen $M > m_0$ stets

$$\|Ux_*\|_2 > \frac{M^2}{\sqrt{20}} \ , \tag{56}$$

womit

$$\|Ux_*\|_2 = \infty \tag{57}$$

gelten muß. Damit wurde der Satz 1 vollständig bewiesen.

4 Abschließende Bemerkungen

In der Arbeit wurde gezeigt, daß die kausale Variante T_+ des idealen Tiefpasses ein energetisch instabiles System ist. Es wurde ein Eingangssignal x_* mit endlicher Energie angegeben, so daß das Ausgangssignal T_+x_* eine unendliche Energie besitzt. Nun hat die Impulsantwort h_+ ebenfalls eine endliche Energie. Da sich das Ausgangssignal T_+x_* aus der Faltung der Impulsantwort h_+ mit dem Eingangssignal x_* ergibt, zeigen die Resultate der Arbeit, daß die Faltung von Signalen mit endlicher Energie nicht unbedingt ein Signal mit endlicher Energie ergibt.

Es ist überraschend, daß bereits das System T_+ energetisch instabil ist. Es wurde sehr einfach aus dem idealen Tiefpaß konstruiert. Die Resultate der Arbeit zeigen also, daß mit Hilfe sehr einfacher Operationen im Zeitbereich aus einem energetisch stabilen System ein energetisch instabiles System erzeugt werden kann. Die Resultate der Arbeit bestätigen die von Professor Mathis geäußerte Vermutung, daß die Faltung zweier Signale mit endlicher Energie nicht unbedingt ein Signal mit endlicher Energie liefert ([8], [9]). Der Signalraum l^2 der Signale mit endlicher Energie bildet somit keine Faltungsalgebra. Damit kann für diesen Signalraum keine Systemtheorie im Sinne von Küpfmüller aufgebaut werden. Für eine ausführliche Diskussion über die Konsequenzen der in dieser Arbeit dargestellten Resultate sei auf die von Professor Mathis gehaltene Akademievorlesung [10] vor der Rheinisch-Westphälischen Akademie der Wissenschaften verwiesen .

Danksagung: Der Verfasser dankt Herrn Professor Mathis für die interessante Problemstellung und für die vielen Diskussionen und Hinweise zu dieser Arbeit.

Literatur

[1] **Boche, H. :** *Complete Characterization of the Structure of Discrete-Time Linear Systems.* In: Proc. of 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics. pp. 6-12, Berlin 1997

[2] **Boche, H.** und **Reißig, G. :** *Complete Characterization of all Discrete-Time Linear Systems of Convolution Type.* In: Proc. of ECCTD'97, European Conference on Circuit Theory and Design. Vol. III, pp. 1185-1192, Budapest 1997

[3] **Boyd, S.P. :** *Volterra Series: Engineering Fundamentals.* PhD Thesis, Univ. California, Berkeley 1985

[4] **Couch II, L.W. :** *Digital and Analog Communication Systems.* 3rd. Ed., New York 1990

[5] **Crochiere, R.E.** und **Rabiner, L.R. :** *Multirate Signal Processing.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York 1983

[6] **Fettweis, A. :** *Elemente nachrichtentechnischer Systeme.* Teubner Studienbücher Elektrotechnik, Stuttgart 1990

[7] **Kammeyer, K.D.** und **Kroschel, K. :** *Digitale Signalverarbeitung; Filterung und Spektralanalyse.* Teubner Studienbücher Elektrotechnik, Stuttgart 1992

[8] **Mathis, W. :** *Persönliche Mitteilung auf der Kleinheubacher Tagung.* Kleinheubach, Oktober 1995

[9] **Mathis, W. :** *Persönliche Mitteilung an der Universität Wuppertal.* Mai 1996

[10] **Mathis, W. :** *Die begrifflichen Grundlagen der Netzwerk- und Systemtheorie - ein Beitrag zur Mathematisierung der Elektrotechnik.* Vortrag an der Rheinisch-Westphälischen Akademie der Wissenschaften in Düsseldorf, 24 Seiten, Akademie-Bericht im Westdeutschen Verlag, Oppladen 1997

[11] **Proakis, J.H., Rader, Ch.M., Ling, F.** und **Nikias, Ch.L. :** *Advanced Digital Signal Processing.* New York 1992

[12] **Rabiner, L.R.** und **Gold, B. :** *Theory and Application of Digital Signal Processing.* Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, New Jersey 1975

[13] **Sandberg, I.W. :** *A Representation Theorem for Linear Systems.* IEEE Trans. Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications **45**, No. 5, 578-581 (1998)

[14] **Ziehmer, R.E.** und **Tranter, W.H. :** *Principles of Communications; Systems, Modulation and Noise.* 4rd Ed., New York 1995

eingegangen: 7. Oktober 1997 **revidierte Fassung:** 21. Januar 1999

Autor:

Holger Boche
Heinrich-Hertz-Institut für Nachrichtentechnik Berlin GmbH
Broadband Mobile Communication Networks
Einsteinufer 37
D-10587 Berlin,
Germany
und
Swiss Institute of Technology, Zürich (ETH-Zürich)
Communication Technology Laboratory
Sternwartstr. 7
CH-8092 Zurich,
Switzerland

Hinweise für Autoren

Um die redaktionelle Bearbeitung und die Herstellung der Druckvorlage zu erleichtern, wären wir den Autoren dankbar, sich betreffs der Form der Manuskripte an den in **Rostock. Math. Kolloq.** veröffentlichten Beiträgen zu orientieren.
Insbesondere beachte man:

(1) Manuskripte sollten grundsätzlich **maschinengeschrieben** (Schreibmaschine, PC) in **deutscher oder englischer Sprache** abgefaßt sein. Falls LaTeX - Manuskripte eingesandt werden, sollten eigene definierte Befehle möglichst vermieden werden.

(2) Zur inhaltlichen Einordnung der Arbeit sind **1-2 Klassifizierungsnummern** anzugeben.

(3) **Literaturzitate** sind im Text durch laufende Nummern (vgl. [3], [4]; [7, 8, 10]) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift **Literatur** bzw. **References** zusammenzustellen. Hierbei ist die durch die nachfolgenden Beispiele veranschaulichte Form einzuhalten.

[3] **Zariski, O.**, and **Samuel, P.:** *Commutative Algebra.* Princeton 1958

[4] **Steinitz, E.:** *Algebraische Theorie der Körper.* J. Reine Angew. Math. **137**, 167-309 (1920)

[8] **Gnedenko, B.W.:** *Über die Arbeiten von C.F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.* In: Reichard, H. (Ed.): C.F. Gauß, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages. S. 193-204, Leipzig 1967

Die Angaben erfolgen in Originalsprache; bei kyrillischen Buchstaben sollte die (bibliothekarische) Transliteration verwendet werden.

(4) Die aktuelle, vollständige Adresse des Autors sollte enthalten: Vornamen Name / Institution / Struktureinheit / Straße Hausnummer / Postleitzahl Ort / Land / e-mail-Adresse (falls vorhanden).

Es besteht die Möglichkeit, mit dem **Satzsystem LaTeX** oder unter anderen Textprogrammen erstellte Manuskripte auf unter **MS-DOS** formatierten Disketten (**3.5″, 1.44MB**) einzureichen oder per e-mail an folgende Adresse zu schicken:

romako@mathematik.uni-rostock.de